MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

74. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

74. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1960

Unveränderter Nachdruck 1972

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Inhalt des 74. Bandes

Seite

ALBRECHT, R., und G. KARRER, Fixpunktsätze in uniformen Räumen 387

BERGAU, P., und J. MENNICKE, Über topologische Abbildungen der Brezelfläche vom Geschlecht 2 414

COHEN, E., Arithmetical functions associated with the unitary divisors of an integer 66

COLLATZ, L., Monotone Operatoren bei Anfangswertaufgaben von Differentialgleichungen 158

EHLICH, H., Über zwei Randwertaufgaben für nichtlineare Differentialgleichungssysteme 302

EWEIDA, M. T., On Bessel Polynomials 319

FEIT, W., M. HALL jr. and J. G. THOMPSON, Finite groups in which the centralizer of any non-identity element is nilpotent 1

FRÖHLICH, A., Discriminants of algebraic number fields 18

FRÖHLICH, A., Ideals in an extension field as modules over the algebraic integers in a finite number field 29

HEINZ, E., Neue a-priori-Abschätzungen für den Ortsvektor einer Fläche positiver Gaußscher Krümmung durch ihr Linienelement 129

HEUSER, H., Zur Eigenwerttheorie einer Klasse symmetrischer Operatoren 167

HOFMANN, J. E., Über die Quadrisectio trianguli 105

HOFMANN, K. H., Topologische Halbgruppen mit dichter submonogener Unterhalbgruppe 232

ITÔ, N., Zur Theorie der Permutationsgruppen vom Grad p 299

ITÔ, N., Faktorisierung endlicher auflösbarer Gruppen 392

JURKAT, W. B., Polynomial approximation of continuous functions on linear spaces 99

KNESER, H., Majoranten bei einem Existenzsatz über partielle Differentialgleichungen 293

KRULL, W., Über die Endomorphismen von total geordneten Archimedischen Abelschen Gruppen 81

LINGENBERG, R., Einbettung projektiv-metrischer Teilstrukturen in projektivmetrische Ebenen 367

MENZEL, W., Über den Untergruppenverband einer Abelschen Operatorgruppe. Teil I: $\mathfrak{m}$-Verbände 39

MENZEL, W., Über den Untergruppenverband einer Abelschen Operatorgruppe. Teil II: Distributive und $\mathfrak{m}$-Verbände von Untergruppen einer Abelschen Operatorgruppe 52

MEYER-KÖNIG, W., und K. ZELLER, Ein high-indices-Theorem für Dirichletsche Reihen 221

Seite

Nickel, K., Ein Eindeutigkeitssatz für instationäre Grenzschichten 209

Nitsche, J. C. C., Ein Eindeutigkeitssatz für zweifach zusammenhängende Minimalflächen 289

Picone, M., Sull'equazione integrale non lineare di seconda specie di Fredholm . . . 119

Schäfke, F. W., Reihenentwicklungen analytischer Funktionen nach Biorthogonalsystemen spezieller Funktionen. I 436

Specht, W., Zur Theorie der elementaren Mittel 91

Specht, W., Zur Theorie der meßbaren Gruppen 325

Tamaschke, O., Submodulare Verbände 186

Walter, W., Eindeutigkeitssätze für gewöhnliche, parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen 191

Wielandt, H., Über den Transitivitätsgrad von Permutationsgruppen 297

Wittich, H., Eindeutige Lösungen der Differentialgleichung $w' = R(z, w)$ 278

FEIT, W., M. HALL jr. and J. G. THOMPSON
Math. Zeitschr. 74, 1–17 (1960)

Finite groups in which the centralizer of any non-identity element is nilpotent

By
WALTER FEIT[1]), MARSHALL HALL jr., and JOHN G. THOMPSON

Introduction

SUZUKI [6] showed that a non-solvable finite group in which the centralizer of any non-identity element is abelian is necessarily of even order.

In another vein, G. HIGMAN [5] has studied groups in which every element has order a power of a prime, the prime being allowed to vary from element to element. Such groups have the property that the centralizer of any non-identity element is a p-group for some prime p.

Theorem A, proved here, generalizes SUZUKI's result by replacing "abelian" with "nilpotent". At the same time, Theorem A gives information about groups in which every element is of prime-power order.

I. Statement of Theorem A, and group-theoretic lemmas

THEOREM A. *If G is a finite non-solvable group, and if the centralizer of any non-identity element of G is nilpotent, then G is of even order.*

A finite group X in which $C_X(x)$ is nilpotent for x in X, $x \neq 1$, will be called a CN-group. (X) denotes the order of X, as does $[X:1]$. All groups referred to are assumed finite.

LEMMA 1.1. *If X is a group, A is a group of automorphisms of X, and each non-identity element of A is a fixed-point-free automorphism of X, and T is an A-invariant normal subgroup of X, then the non-identity elements of A induce fixed-point-free automorphisms of X/T.*

PROOF. Let $\sigma \in A$, $\sigma \neq 1$. Since $\sigma(x)\,x^{-1}=1$ implies $x=1$, and $\sigma(x)\,x^{-1}=\sigma(y)\,y^{-1}$ implies $\sigma(y^{-1}x)=y^{-1}x$ so that $x=y$, it follows that each element u of X is represented uniquely as $\sigma(x)\,x^{-1}=u$ for some x in X. If σ fixes the coset yT, then $\sigma(y)\,y^{-1} \in T$. Since T is assumed A-invariant, $\sigma(y)\,y^{-1}=\sigma(t)\,t^{-1}$ for some $t \in T$. Hence, $y=t \in T$, so that σ is fixed-point-free on X/T.

LEMMA 1.2. *If a q-group Q, q an odd prime, normalizes a group N, and if each non-identity element of Q induces a fixed-point-free automorphism of N, then Q is cyclic.*

PROOF. [1, pp. 334–335].

[1]) The work of the first author was supported by the Office of Ordnance Research, U.S.Army.

LEMMA 1.3. *In a CN-group X, if p_1 and p_2 are distinct primes, P_i is a Sylow p_i-subgroup of X, and $x_i \in P_i$, $x_i \neq 1$, $i=1, 2$, satisfy $x_1 x_2 = x_2 x_1$, then P_1 and P_2 permute elementwise.*

PROOF. $\{x_2, Z(P_1)\} \leqq C_X(x_1)$ is nilpotent, whence x_2 and $Z(P_1)$ permute elementwise. Hence, $\{x_2, P_1\} \leqq C_X(Z(P_1))$ is nilpotent, so x_2 and P_1 permute elementwise. Then also $\{P_1, Z(P_2)\} \leqq C_X(x_2)$, so P_1 and $Z(P_2)$ permute elementwise. Finally, $\{P_1, P_2\} \leqq C_X(Z(P_2))$ so that P_1 and P_2 permute elementwise.

We write $Z_1(P) = Z(P)$, $Z_2(P)$, $Z_3(P)$ ... for the terms of the ascending central series of P.

LEMMA 1.4. *If P is a non-cyclic p-group, p odd, then $Z_2(P)$ is non-cyclic.*

PROOF. If $Z_1(P) = Z(P)$ is non-cyclic, then since $Z_1(P) \leqq Z_2(P)$, the lemma follows. Hence, we can suppose that $Z_1(P)$ is cyclic. Since P is assumed non-cyclic, P is non-abelian. We can further suppose that $Z_2(P)$ is cyclic, and that P is a group of least possible order violating the lemma.

If $Z_3(P)$ were cyclic, then since

$$Z_2(P/Z(P)) = Z_3(P)/Z(P),$$

we would conclude from the minimal nature of P that $P/Z(P)$ was cyclic, so that P would be abelian. Hence, we can assume that $Z_3(P)$ is non-cyclic. If

$$x \in Z_3(P), \quad \text{and} \quad x^p = 1, \tag{1.1}$$

we will show that $[x, y, z] = 1$ for all $y, z \in P$, so that $x \in Z_2(P)$. Set $u = [x, y]$, so that

$$y^{-1} x y = x \cdot u, \tag{1.2}$$

and $u \in Z_2(P)$, since $x \in Z_3(P)$. Since $u \in Z_2(P)$,

$$[u, x, x] = 1. \tag{1.3}$$

Using (1.3) and the identity

$$[a, bc] = [a, c]\,[a, b]\,[a, b, c],$$

which holds in the free group, we conclude by induction that

$$[u, x^n] = [u, x]^n, \tag{1.4}$$

for all positive integers n. Taking $n = p$, by (1.1) and (1.4) we have

$$[u, x]^p = 1. \tag{1.5}$$

Using (1.3) and (1.4), we conclude by induction that

$$(xu)^n = x^n u^n [u, x]^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

for all positive integers n. Taking $n = p$, using (1.1) and (1.2), we conclude

$$1 = u^p [u, x]^{\frac{p(p-1)}{2}}. \tag{1.6}$$

Since p is odd, (1.5) and (1.6) yield

$$1 = u^p.$$

Since $u \in Z_2(P)$, and $Z_2(P)$ is cyclic, we conclude that $u \in Z(P)$, so that $[u, z] = [x, y, z] = 1$, as desired. We have shown that all elements of order p in $Z_3(P)$ are contained in $Z_2(P)$, and hence that $Z_3(P)$ contains only one subgroup of order p. By [1, p. 131], $Z_3(P)$ is cyclic. This contradiction completes the proof of this lemma.

LEMMA 1.5. *If Y is a CN-group, and A is a solvable normal subgroup of Y, then Y/A is a CN-group.*

PROOF. We proceed by double induction on (Y) and (A), assuming the lemma true for all Y_1 and A_1, A_1 a solvable normal subgroup of the CN-group Y_1, such that either $(Y_1) < (Y)$, or $(Y_1) = (Y)$ and $(A_1) < (A)$.

CASE 1. A is an elementary abelian p-group. We must show that if yA is a non-identity element of Y/A, then $C_{Y/A}(yA)$ is nilpotent. If C is the inverse image in Y of $C_{Y/A}(yA)$ and if $C < Y$, then the pair C, A is less than the pair Y, A in the ordering, so that $C/A = C_{Y/A}(yA)$ is nilpotent. Hence, we can assume that $C = Y$, and we can assume that yA has prime order q.

SUBCASE 1. $q \neq p$. We can assume in this case that y has order q. The hypothesis that yA is in the center of Y/A is equivalent to the assertion that for every $g \in Y$,

$$g\,y\,g^{-1} = y\,a, \qquad a = a(g) \in A. \tag{1.7}$$

From (1.7) it follows that $y^{-1}A\,g\,y = A\,g$ for every $g \in Y$. Since the number of elements in the coset $A\,g$ is a power of p, and since y is of order $q \neq p$, it follows that y centralizes some element in the coset $A\,g$. Hence, $C_Y(y) \cdot A = Y$, so that $Y/A \cong C_Y(y)/A \cap C_Y(y)$ is nilpotent.

SUBCASE 2. $q = p$. Put $B = \{y, A\}$, so that B is a p-group, and then choose x in Y of prime power order prime to p. Then x fixes the coset yA, and since x has order prime to p, it centralizes some element of yA, say ya. By lemma 1.3, x centralizes A, and hence $A \cap Z(Y_p)$, Y_p being a Sylow p-subgroup of Y. Since $A \lhd Y$, $A \cap Z(Y_p) \neq 1$, and since x was any element of prime power order prime to p, $A \cap Z(Y_p) \subseteq Z(Y)$, so that Y is nilpotent, so also Y/A. This completes the first case.

CASE 2. A is not an elementary abelian p-group. Choose $A_1 \neq 1$, A_1 characteristic in A, so that $A_1 \lhd Y$. By induction, Y/A_1 is a CN-group, by a second induction, $Y/A_1/A/A_1$ is a CN-group isomorphic to Y/A.

LEMMA 1.6. *If Theorem* A *is false, then there is a CN-group T which has the properties:*

1. *T is simple.*
2. *Every proper subgroup of T is solvable.*
3. *T is of odd order.*

PROOF. Let H be any group violating Theorem A, so that H is non-solvable of odd order. Let K be a non-solvable subgroup of H of least possible order, so that every proper subgroup of K is solvable, and let $L \geqq 1$ be the maximal solvable normal subgroup of K. Subgroups of CN-groups are again CN-groups, so K is a CN-group. By lemma 1.5, $T = K/L$ is a CN-group. T is simple since it has no solvable normal subgroups, and all its proper subgroups are solvable.

The remainder of this section is devoted to the study of a CN-group G satisfying the conditions 1, 2, 3 of lemma 1.6.

If the Sylow p-subgroup P of G is not cyclic, we choose $W = W(P)$ as follows: in case $Z(P)$ is not cyclic, we choose $W(P)$ to be any non-cyclic subgroup of $Z(P)$ of order p^2. In case $Z(P)$ is cyclic, we choose $W(P)$ to be any non-cyclic subgroup of $Z_2(P)$ of order p^2 which contains $\Omega_1(Z(P))$, the subgroup of elements of order at most p in $Z(P)$. Since P is not cyclic and since p is odd, $Z_2(P)$ is not cyclic by lemma 1.4, so in this second case, we will be able to find a subgroup $W(P)$ of the desired type. We put

$$V(P_0) = V_G(W; P_0) = \{(W(P))^x \mid (W(P))^x \leqq P_0,\ x \in G\},$$

P_0 being any subgroup of G.

LEMMA 1.7. *If P is a non-cyclic Sylow p-subgroup of G, and $y \in G$ is a p-element which centralizes a subgroup U of $W(P)$ of order p, then*

$$[y, w, w] = 1 \tag{1.8}$$

for every w in $W(P)$.

PROOF. Case 1. $W(P) \leqq Z(P)$. In this case, $U \leqq Z(P)$, so that $C_G(U) \geqq \{P, y\}$ Since $C_G(U)$ is nilpotent, so is $\{P, y\}$. This forces $y \in P$, so $[y, w] = 1$ for all $w \in W$. All the moreso, (1.8) holds.

Case 2. $W(P) \not\leqq Z(P)$. This can only occur because $Z(P)$ is cyclic. In case $U \leqq Z(P)$, we again conclude that $\{y, P\}$ is nilpotent, so that $y \in P$, and (1.8) holds since $W(P) \leqq Z_2(P)$. If $U \not\leqq Z(P)$, then the cyclicity of $Z(P)$ tells us that $C_P(U)$ is of index p in P. Hence $C_P(U) = P \cap C_G(U)$ is either a Sylow p-subgroup of $C_G(U)$ or is of index p in the Sylow p-subgroup P^* of $C_G(U)$. In any case, $C_P(U) \lhd P^*$. Clearly, $Z(P) \leqq C_P(U) < P$, so that $Z(P) \leqq Z(C_P(U))$, and so $W(P) \leqq Z(C_P(U))$, since $\Omega_1(Z(P))$ and U generate $W(P)$. The p-element y lies in the nilpotent group $C_G(U)$, and so in P^*. If $w \in W(P)$, then $[y, w] \in C_P(U)$, since $C_P(U) \lhd P^*$. Hence $[y, w, w] = 1$ since $w \in W(P) \leqq Z(C_P(U))$.

The remainder of this section is devoted to proving Theorem 1.

THEOREM 1. *If P is any Sylow p-subgroup of G, then $P \cap P^x = 1$ or P for each $x \in G$.*

The proof of this theorem will be by contradiction. We leave as an exercise that Theorem 1 holds in case P is abelian, so we confine attention to the non-abelian, and hence non-cyclic, Sylow subgroups of G.

Since Theorem 1 is assumed false, we choose $P^x \neq P$ so that $K = P \cap P^x$ has maximal possible order, so that $1 < K < P$, and we set $N = N_G(K)$. Since

$N \geqq N_P(K) > K$, and $N \geqq N_{Px}(K) > K$, by [2, p. 44], it follows from the maximal nature of K that $\{N_P(K), N_{Px}(K)\}$ is not a p-group. Consequently, the Sylow p-subgroups of N are not normal in N, and in particular N is not nilpotent, and more particularly, N is not a p-group. Since $K \neq 1$, $N < G$, so N is solvable. Hence, N satisfies the hypotheses of the next lemma.

LEMMA 1.8. *If S is a solvable CN-group of odd order, if S possesses a non-trivial normal p-subgroup, and if a Sylow p-subgroup S_p of S is not normal in S, then S possesses a normal series*

$$1 < H < K < S,$$

where H is a p-subgroup of S, K/H is a cyclic group of order prime to p, and S/K is a cyclic p-group. Furthermore, if $K = HL$, $H \cap L = 1$, then the non-identity elements of L induce fixed-point-free automorphisms of H, and if $\overline{S} = S/H$, $\overline{K} = K/H$, and $\overline{S}_p = S_p/H$, then the non-identity elements of $\overline{S}_p$ induce fixed-point-free automorphisms of $\overline{K}$.

PROOF. Let H be the maximal normal p-subgroup of S, and let M be the maximal normal p'-subgroup of S. By assumption, $H \neq 1$. Suppose $M \neq 1$. Since H and M are normal subgroups of S, of coprime orders, they permute elementwise. By lemma 1.3, S_p and M permute elementwise. Since $M \neq 1$, $C_S(M)$ is nilpotent, and contains S_p. Since $M \lhd S$, $C_S(M) \lhd S$. Since $C_S(M)$ is nilpotent, S_p is characteristic in $C_S(M)$, so $S_p \lhd S$, contrary to assumption. Hence, $M = 1$.

Since $M = 1$, $H \geqq C_S(H)$ by [2, p. 5]. By lemma 1.3, elements in S of order prime to p induce fixed-point-free automorphisms of H. It follows now from lemma 1.2 that S_q, a Sylow q-subgroup of S, $q \neq p$, is cyclic. Since S is solvable, given primes q and r, we can find S_q and S_r which are permutable [4]. If $qr \mid (S)$, $q \neq p \neq r \neq q$, then $S_q \cdot S_r$ possesses a subgroup D of order qr, since if $q > r$, then $S_q \lhd S_q \cdot S_r$, both S_q and S_r being cyclic. Since the non-identity elements of D induce fixed-point-free automorphisms of H, D is cyclic [1, pp. 334–335]. (As pointed out elsewhere, BURNSIDE's Theorem V, p. 336, is false. What he actually proved is the assertion made here.) By lemma 1.3, S_q and S_r permute elementwise. It follows immediately that a Sylow complement L of S_p in S, which exists by [4], is cyclic.

Since S/H has no non-trivial normal p-subgroups, and since L is abelian, it follows from [2, p. 5] that

$$LH/H \lhd S/H,$$

so that $LH = K \lhd S$. The remaining assertions of this lemma follow directly from lemmas 1.2, 1.3, and [2, p. 5].

Definition

$\mathscr{H} = [H \mid$ 1. H is a p-subgroup of G.

2. The Sylow p-subgroups of $N_G(H)$ are not normal in $N_G(H)$.

3. $N_G(H)/C_G(H)$ is not a p-group.$]$

By lemma 1.8 and the remark preceding lemma 1.8, $\mathscr{H}$ is not empty. If $H_1, H_2 \in \mathscr{H}$, then $H_1 \leqq H_2$ means

1. $(N_G(H_1)) < (N_G(H_2))$,

or

2. $(N_G(H_1)) = (N_G(H_2))$, and $(H_1) < (H_2)$,

or

3. $H_1 = H_2$.

We see that $\leqq$ is a partial ordering, and that conjugate subgroups are not comparable.

LEMMA 1.9. *If $H \in \mathscr{H}$ is maximal in the ordering $\leqq$, and if P_0 is a Sylow p-subgroup of $N = N_G(H)$, then*

$$V_G(W; P_0) = V_G(W; H).$$

PROOF. By maximality of H in the ordering $\leqq$, H is the maximal normal p-subgroup of N. By lemma 1.8, N has a chief series

$$1 < H < HL < N,$$

where L is cyclic of order prime to p, and P_0/H is cyclic. Suppose $W^x \leqq P_0$. Then $H \cap W^x \neq 1$, since P_0/H is cyclic and W^x is of type (p, p). By lemma 1.7,

$$[Z(H), w, w] = 1, \quad \text{for all } w \in W^x.$$

If we represent N as linear transformations of $\Omega_1(Z(H))$, we have a faithful representation of N/H, by lemma 1.8. By theorem B of HALL and HIGMAN [2, p. 3], W^x is in the kernel, that is, $W^x \leqq H$. This completes the proof of lemma 1.9.

We remark that $V_G(W; P_0) \neq 1$. Namely, if $P_0 \leqq P^y$, then $Z(P^y)$ centralizes H, so that $Z(P^y) \leqq Z(H) \leqq H$, since H contains its centralizer. If $W^y \leqq Z(P)^y$, then $W^y \leqq V_G(W; P_0)$. If $W^y \not\leqq Z(P^y)$, then $Z(P^y)$ is cyclic, and we at least have $Z(P^y) \leqq H$. But then $Z_2(P^y)$ normalizes H, so that $Z_2(P^y) \leqq P_0$ and once again $W^y \leqq V_G(W; P_0)$.

LEMMA 1.10. $V(W; P_0) \in \mathscr{H}$.

PROOF. Since $V(W; P_0) = V(W; H) \lhd N_G(H)$, and $V(W; P_0) \neq 1$, we only need to show that $N_G(V(W; H))/C_G(V(W; H))$ is not a p-group. But this is obvious, since the non-identity elements in the group L of the previous lemma induce fixed-point-free automorphisms of $V(W; H)$.

LEMMA 1.11. *P_0 is a Sylow p-subgroup of G.*

PROOF. Otherwise $(N_G(H)) < (N_G(V_G(W; P_0)))$, and H would not be maximal in the ordering $\leqq$.

LEMMA 1.12. $N_G(H) = N_G(V_G(W; P_0))$.

PROOF. Since $N_G(H) \leqq N_G(V_G(W; P_0))$, maximality of H in the ordering $\leqq$ forces equality.

This sequence of lemmas tells us that if H is maximal in the ordering $\leqq$, if $H \lhd P$, $H \in \mathfrak{H}$ then,

$$N = N_G(H) = N_G\big(V_G(W; P)\big) = N_G(V),$$

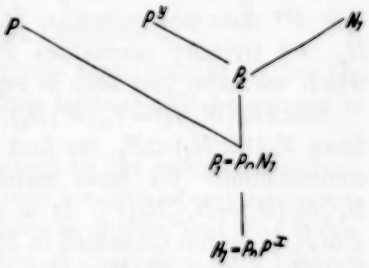
where $V = V_G(W; P)$ is the group selected earlier. Since $P \leqq N$, and $N_N(P) = P$, and since $N_G(V) \geqq N_G(P)$, it follows that

$$N_G(P) = N_N(P) = P,$$

so that P is its own normalizer in G. We denote by H_0 the maximal normal p-subgroup of $N_G(V)$.

LEMMA 1.13. *If $P^x \neq P$, then $P \cap P^x \leqq H_0$.*

PROOF. Assume false. Choose P^x so that $P^x \neq P$ and $P \cap P^x = H_1$, is of maximal order subject to the restriction $H_1 \leqq H_0$. Put $N_1 = N_G(H_1)$, and $P_1 = P \cap N_1$, let P_1 be contained in the Sylow p-subgroup P_2 of N_1, and let P_2 be contained in the Sylow p-subgroup P^y of G. The following diagram is explanatory: H_1 is a proper subgroup of P_1, by a fundamental property of p-groups [2, p. 44]. If P_2 were not contained in P, then $P \neq P^y$, and $P^y \cap P \geqq P_2 \cap P = P_1 > H_1 = P^x \cap P$, contrary to our choice of H_1. Hence $P^y = P$, so that $P_1 = P_2$ is a Sylow p-subgroup of N_1.



Also, by the maximal nature of H_1, P_1 is not normal in N_1, so we are in a position to apply lemma 1.8 to N_1.

It is clear that H_1 is the maximal normal p-subgroup of N_1, since the maximal normal p-subgroup of N_1 is contained in P and in at least one other Sylow p-subgroup of G.

As in the proof of lemma 1.9, we conclude that $V_G(W; P_1) = V_G(W; H_1)$. Let the relevant chief series for N_1 be

$$1 < H_1 < H_1 L_1 < N_1,$$

L_1 being cyclic of order prime to p, while $N_1/H_1 L_1 \cong P_1/H_1$ is a cyclic p-group.

Suppose $P_1 < P$. Then $P_1 \lhd P^* \leqq P$, $P_1 < P^*$, for suitable choice of P^*, [2, p. 44], and we find

$$\{P^*, N_1\} \leqq N_G\big(V_G(W; H_1)\big) = N_2,$$

say. The Sylow p-subgroups of N_2 are not normal in N_2, since if they were we would find that the Sylow p-subgroups of N_1 are normal in N_1, which is not the case. Since $V_G(W; H) \neq 1$, application of lemma 1.8 yields a chief series

$$1 < H_2 < H_2 L_2 < N_2$$

of N_2, L_2 being cyclic of order prime to p, and $N_2/H_2 L_2$ being a cyclic p-group. Since L_2 is abelian, and since $L_1 < N_1 < N_2$, we can apply WIELANDT's theorem

on the conjugacy of nilpotent Hall subgroups [7] to conclude that $L_1 \leqq L_2^v$ for suitable $v \in N_2$. Hence, without loss of generality, we suppose that $L_1 \leqq L_2$.

If H_1 were not contained in H_2, we would choose $h \in H_1$, $h \notin H_2$, and conclude that hH_2 would act without fixed-points on H_2L_2/H_2 and in particular would act without fixed-points on H_2L_1/H_2, all subgroups of a cyclic group being characteristic. However, since $h \in H_1$, we see that $[h, L_1] \leqq H_1$, so that $[h, L_1]$ is a p-group. Hence $[h, L_1]H_2/H_2$ is a p-subgroup of L_1H_2/H_2, and so equals 1, which violates the fact that hH_2 is supposed to act without fixed-points on L_1H_2/H_2. Hence, $H_1 \leqq H_2$.

Consider next $P \cap H_2$. We must have the equality $P \cap H_2 = H_1$, by the maximal nature of H_1, since H_2 is contained in at least two distinct Sylow p-subgroups of G, and since the last paragraph showed that $P \cap H_2 \geqq H_1$.

Now we have the strict containments:

$$H_1 < P_1 < P^*,$$

where $P^* \leqq P$, and $P^* < N_2$. Since $P_1 = N_G(H_1) \cap P$ as we saw earlier, it follows that P^* does not normalize H_1. However, since $P^* < N_2$, P^* does normalize H_2. P^* trivially normalizes P, since $P^* \leqq P$. Hence P^* normalizes $P \cap H_2$, which we have just seen is equal to H_1. This contradiction forces $P_1 = P$.

Since $V_G(W; P_1) = V_G(W; H_1)$, and since $P_1 = P$, we find $V_G(W; P) = V_G(W; H_1)$. Since $V_G(W; H_1) \lhd N_1$, we find $N_1 \leqq N_G(V)$. We are now close to the desired contradiction. We have assumed that $H_1 \leqq H_0$, and we have found that $H_1 \leqq N_G(H_1) = N_1 \leqq N_G(V)$. It is straightforward to check that if a p-subgroup T of $N_G(V)$ is not contained in H_0, then $N_{N_0(V)}(T)$ is a p-group. Since $N_1 \leqq N_G(V)$, it follows that $N_G(H_1) = N_{N_0(V)}(H_1)$, so that N_1 must be a p-group. This contradiction forces us to accept the conclusion that $H_1 \leqq H_0$.

We are now in a position to apply GRÜN's Theorem. [2, p. 214] Since $P \cap (P^x)' \leqq P \cap P^x \leqq H_0$ for all $P^x \neq P$ and since $N_G(P) = P$, we conclude that G has a normal subgroup of index p, against our assumption that G is a non-solvable simple group. This last contradiction forces us to accept Theorem 1.

LEMMA 1.14. *If H is a maximal nilpotent subgroup of G, then H is a Hall subgroup, $H \cap H^x = 1$ or H for all $x \in G$, $N_G(H) \neq H$ and elements in $N_G(H) - H$ induce fixed-point-free automorphisms of H.*

PROOF. That H is Hall follows from lemma 1.3, and the fact that H is a maximal nilpotent subgroup of G.

If $H \cap H^x \neq 1$, and H is a Sylow p-subgroup of G, Theorem 1 says $H = H^x$. Otherwise, $H \cap H^x \neq 1$ implies $H = H^x$ by lemma 1.3 and the fact that H is a maximal nilpotent subgroup of G.

The last assertion follows from lemma 1.3 and the fact that H is a maximal nilpotent subgroup of G.

By FROBENIUS' theorem [2, p. 292], the simplicity of G, and lemma 1.14, $N_G(H) \neq H$.

LEMMA 1.15. *Two distinct maximal nilpotent subgroups H_1 and H_2 of G intersect in the identity element only, and if H_1 and H_2 are not conjugate then $((H_1), (H_2)) = 1$.*

PROOF. Straightforward, and so omitted.

Let $H_1, \ldots, H_r$ be a set of representatives for the conjugate classes of maximal nilpotent subgroups of G. Set

$$(G) = g, \tag{1.9}$$
$$(H_i) = h_i, \qquad (N_i) = h_i n_i,$$
$$i = 1, 2, \ldots, r.$$

LEMMA 1.16.

$$g = 1 + \sum_{i=1}^{r} \frac{h_i - 1}{h_i n_i} \cdot g. \tag{1.10}$$

PROOF. (1.10) is the "counting" equation. Each H_i^x contains $h_i - 1$ non-identity elements. (1.10) now follows from (1.9), lemma 1.15, and the fact that each element of G is contained in the (nilpotent) group it generates, and hence is contained in some H_i^x.

II. The Character-Theoretic Lemmas

Although much of this section is taken directly from SUZUKI [6], for the sake of completeness and clarity, the necessary lemmas will be proved in detail.

The character theory used here is with respect to the complex numbers. By a character of the group X is meant the trace function of any homomorphism of X into matrices with complex numbers as entries, and by a generalized character is meant a linear combination of characters with rational integer coefficients. The character ring of X, denoted by $\chi(X)$, is the set of all generalized characters of X, and we denote by $\chi_0(X)$ the ideal of all generalized characters which vanish at the identity element of X.

If Y is a subgroup of X, we denote by * the induced map from $\chi(Y)$ to $\chi(X)$, so that if $\varphi \in \chi(Y)$,

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{[Y:1]} \sum_{g \in X} \varphi(x^g),$$

with the convention that $\varphi(z) = 0$ if $z \notin Y$.

If $Y < Z < X$, Y and Z being subgroups of X, we will use $\sim$ to indicate the induced map from $\chi(Y)$ to $\chi(Z)$, reserving * for the map from $\chi(Y)$ to $\chi(X)$ (or from $\chi(Z)$ to $\chi(X)$). It is well-known and easy to verify that if $\varphi \in \chi(Y)$, then $(\tilde{\varphi})^* = \varphi^*$. If one keeps in mind the agreement that a * always maps characters into $\chi(X)$, X being the "big" group, then no confusion arises.

If $\varphi, \psi \in \chi(X)$, then

$$(\varphi, \psi)_X = \frac{1}{[X:1]} \sum_{x \in X} \varphi(x) \cdot \overline{\psi(x)}$$

defines an inner product on $\chi(X)$. We put $\|\varphi\|_X = (\varphi, \varphi)_X$ and observe that $\|\varphi\|_X^{\frac{1}{2}}$ makes $\chi(X)$ into a metric space.

The major strength of the character theory for the problem at hand lies in the fact that if G is the group of the first section, H is a maximal nilpotent subgroup of G and $N=N_G(H)$, then there are some exploitable connections involving $\chi(H)$, $\chi(N)$, and $\chi(G)$. First, if φ is a non-principal irreducible character of H, then $\tilde{\varphi}$ is an irreducible character of N. Second, and perhaps most important from the point of view of computation, if $\tilde{\chi}_0(H)$ is the image in $\chi_0(N)$ of $\chi_0(H)$ under the map $\sim$, then the map $*$ induces an isometry between $\tilde{\chi}_0(H)$ and its image in $\chi_0(G)$. It is this fact which enables us to "keep track" of the irreducible characters of G which are involved in suitable ϱ^*, ϱ being an element of $\chi_0(H)$. We now proceed to formalize these facts, making as yet no specific reference to our group G.

The basic hypothesis of the following lemmas include:

1. A finite group S of odd order.
2. A subgroup M of S, satisfying:
   a) M is nilpotent.
   b) $M\cap M^s=1$ or M, for all $s\in S$.
   c) $M<N_S(M)=N<S$.
   d) If $m\in M$, $m\neq 1$, then $C_S(m)\leqq M$.

We denote by Ω the hypotheses just listed.

LEMMA 2.1. *Given Ω, N/M induces automorphisms of $\chi(M)$ which have no fixed points on the non-principal irreducible characters of M.*

PROOF. Let φ be a non-principal irreducible character of a representation ϱ of M left fixed by some non-identity element $\bar{x}\in N/M$, that is, suppose $\varphi(m^x)=\varphi(m)$ for each $m\in M$. Note that $\varphi(m^x)$ does not depend on the coset representative x of $\bar{x}$, since φ is a class function. Then x normalizes the kernel K of ϱ, since K is characterized as the set of all $m\in M$ such that $\varphi(m)=\varphi(1)$. Since x is not in M, 2. d) implies that x induces a fixed-point-free automorphism of M, and hence by lemma 1.1, also on M/K, and also on $Z(M/K)$, which is cyclic of order t, say, with cyclic generator z. But then $\varphi(z)=\zeta\cdot\varphi(1)$, ζ being some primitive t-th root of unity. Since x normalizes $Z(M/K)$ and is fixed-point-free there, $z^x=z^n$ with $n\not\equiv 1 \pmod t$. Hence $\varphi(z^x)=\varphi(z^n)=\zeta^n\varphi(1)\neq\varphi(z)$, a contradiction.

LEMMA 2.2. *The map $\sim$: $\chi(M)\to\chi(N)$ sends non-principal irreducible characters of M into irreducible characters of N. The map $*$: $\chi(N)\to\chi(S)$ is an isometry from $\tilde{\chi}_0(M)$ into $\chi_0(S)$.*

PROOF. Let φ be a non-principal irreducible character of M. By definition of $\tilde{\varphi}$,

$$\text{(2.1)}\qquad \begin{cases} \tilde{\varphi}(h)=0 & \text{if } h\notin M, \\ \tilde{\varphi}(m)=\dfrac{1}{[M:1]}\displaystyle\sum_{x\in N}\varphi(m^x)=\sum_{x\in N/M}\varphi(m^x), & m\in M. \end{cases}$$

Since $\tilde{\varphi}$ vanishes outside M, we see that

$$\|\tilde{\varphi}\|_N=\frac{1}{[N:M]}\|\tilde{\varphi}|M\|_M.$$

By (2.1) and lemma 2.1, $\tilde{\varphi}|M$ is a sum of $[N:M]$ distinct irreducible characters of M, so that

$$||\tilde{\varphi}|M||_M = [N:M],$$

which proves the first assertion of the lemma.

Let α be a generalized character of M vanishing at 1. Then

$$||\tilde{\alpha}||_N = \frac{1}{[N:1]} \sum_{x \in N} |\tilde{\alpha}(x)|^2,$$

while

$$||\tilde{\alpha}^*||_S = ||\alpha^*||_S = \frac{1}{[S:1]} \sum_{y \in S} |\alpha^*(y)|^2$$
$$= \frac{1}{[N:1]} \sum_{m \in M} |\tilde{\alpha}(m)|^2 = ||\tilde{\alpha}||_N,$$

by Ω. This proves the second assertion of the lemma.

We say that two characters φ and φ_1 of M are equivalent if $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1$, otherwise inequivalent. In a group of odd order, if φ is a non-principal irreducible character, then $\varphi \neq \bar{\varphi}$, its complex conjugate [1, p. 294], so the total number of non-principal irreducible characters of any degree is even.

Let d be the degree of some irreducible character of M, and suppose there are $w \cdot [N:M]$ such non-principal characters so that w is even. Let $\varphi_1, \ldots, \varphi_w$ be a set of representatives for the equivalence classes of non-principal irreducible characters of M of degree d, so that $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_w$ are w distinct irreducible characters of N.

Consider $\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2$. Since $\tilde{\varphi}_1$ and $\tilde{\varphi}_2$ are both irreducible characters of N,

$$||\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2||_N = 2.$$

Since $\varphi_1 - \varphi_2 \in \chi_0(M)$,

$$||\varphi_1^* - \varphi_2^*||_S = 2,$$

by lemma 2.2, so that

$$\varphi_1^* - \varphi_2^* = \varepsilon \Theta + \eta \Theta', \qquad \varepsilon^2 = \eta^2 = 1,$$

Θ and Θ' being distinct irreducible characters of S. Since $\varphi_1^* - \varphi_2^* \in \chi_0(S)$, $\eta = -\varepsilon$, so that

$$\varphi_1^* - \varphi_2^* = \varepsilon(\Theta - \Theta').$$

If $w = 2$, we associate φ_1 with Θ and φ_2 with Θ', the association being determined once we have decided on whether we want $\varepsilon = +1$ or $\varepsilon = -1$.

If $w > 2$, we also have

$$\varphi_1^* - \varphi_3^* = \varepsilon'(\Theta_1 - \Theta_1'),$$

and by interchanging Θ_1 and Θ_1' if necessary, we can assume that $\varepsilon = \varepsilon'$. We now have the two equations

$$\varphi_1^* - \varphi_2^* = \varepsilon(\Theta - \Theta')$$
$$\varphi_1^* - \varphi_3^* = \varepsilon(\Theta_1 - \Theta_1'),$$

and since the difference $\varphi_1^* - \varphi_2^* - (\varphi_1^* - \varphi_3^*) = \varphi_3^* - \varphi_2^*$ has norm 2, so does $\varepsilon(\Theta - \Theta' - (\Theta_1 - \Theta_1'))$. By interchanging, Θ and Θ', Θ_1 and Θ_1', and using $-\varepsilon$ if necessary, we can suppose that $\Theta = \Theta_1$. Put $\Theta' = \Theta_2$ and $\Theta_1' = \Theta_3$, so that the equations become

$$\varphi_1^* - \varphi_2^* = \varepsilon(\Theta_1 - \Theta_2),$$
$$\varphi_1^* - \varphi_3^* = \varepsilon(\Theta_1 - \Theta_3).$$

Since φ_2 and φ_3 are inequivalent under the action of N/M, $\Theta_2 \neq \Theta_3$. It follows easily now that if $w \geqq 4$, then

$$\varphi_i^* - \varphi_j^* = \varepsilon(\Theta_i - \Theta_j), \quad i, j = 1, 2, \ldots, w \tag{2.2}$$

for suitable irreducible characters Θ_j of S. We associate $\tilde{\varphi}_i$ with Θ_i and also we associate φ_i with Θ_i, establishing in this fashion a $1-1$ correspondence between the equivalence classes of non-principal irreducible characters of M and certain irreducible characters of S.

Let $z_1 = 1, z_2, z_3, \ldots, z_t$ be the distinct degrees of irreducible characters of M. Let w_i be the number of equivalence classes of non-principal irreducible characters of M of degree z_i, so that $w_i[N:M]$ is the total number of non-principal irreducible characters of M of degree z_i. We note that

$$w_1 = \frac{[M:M'] - 1}{[N:M]}. \tag{2.3}$$

Let $\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{iw_i}$ correspond to $\Theta_{i1}, \ldots, \Theta_{iw_i}$ in the fashion described above, $\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{iw_i}$ being a set of representatives for the equivalence classes of non-principal irreducible characters of M of degree z_i, $\Theta_{i1}, \ldots, \Theta_{iw_i}$ being irreducible characters of S. Also, set

$$\Xi_i = \sum_{j=1}^{w_i} \Theta_{ij}$$

and

$$\Gamma_i = z_i 1_M^* - \varphi_{i1}^*. \tag{2.4}$$

We denote by 1_M the principal character of M, and by ϱ_0 the principal character of S.

LEMMA 2.3. *1_M^* is equal to ϱ_0 plus a linear combination of the Ξ_i's plus a linear combination of characters which involve neither ϱ_0 nor any Θ_{ij}.*

PROOF. By orthogonality of the irreducible characters of G, if ϱ is an irreducible character of S, then

$$(1_M^*, \varrho)_S$$

is the multiplicity of ϱ in l_M^*. By Frobenius reciprocity [2, p. 284]

$$(1_M^*, \varrho)_S = (1_M, \varrho | M)_M. \tag{2.5}$$

Since $\varrho_0 | M = 1_M$, (2.5) shows that the multiplicity of ϱ_0 in 1_M^* is 1. The rest of the lemma is the statement that

$$(1_M^*, \Theta_{ij}) = (1_M^*, \Theta_{ik}), \quad 1 \leqq i \leqq t, \quad 1 \leqq j, k \leqq w_i. \tag{2.6}$$

Now (2.6) follows from (2.2) and Frobenius reciprocity.

LEMMA 2.4. *φ_{ij}^* equals $\pm\Theta_{ij}$ plus a linear combination of the Ξ's plus a linear combination of characters which involve neither ϱ_0 nor any Θ_{rs}, $1 \leqq r \leqq t$, $1 \leqq s \leqq w_r$.*

PROOF.

$$\begin{aligned}(\varphi_{ij}^*, \Theta_{kr} - \Theta_{ks})_S &= (\varphi_{ij}^*, \pm(\varphi_{kr}^* - \varphi_{ks}^*))_S \\ &= (\tilde{\varphi}_{ij}, \pm(\tilde{\varphi}_{kr} - \tilde{\varphi}_{ks}))_N \\ &= \pm\delta_{ik}(\delta_{jr} - \delta_{js}),\end{aligned}$$

by (2.2) and Frobenius reciprocity. Also,

$$(\varphi_{ij}^*, \varrho_0)_S = (\varphi_{ij}, 1_M)_M = 0,$$

and the lemma follows.

The two previous lemmas yield immediately that

$$\Gamma_i = z_i\varrho_0 + \varepsilon_i\Theta_{i1} + \sum_{j=1}^{t} a_{ij}\Xi_j + \Delta_i, \tag{2.7}$$

with

$$(\Delta_i, \Theta_{ks})_S = (\Delta_i, \varrho_0)_S = 0, \quad \begin{matrix}1 \leqq k \leqq t,\\ 1 \leqq s \leqq w_k,\\ 1 \leqq i \leqq t.\end{matrix} \tag{2.8}$$

Since each of the groups $H_1, \ldots, H_r$ of Section I satisfies Ω, we can apply the previous lemmas. If H_i has $1+s_i$ conjugate classes, we determine

$$a = \sum_{i=1}^{r} \frac{s_i}{[N_i : H_i]}$$

distinct irreducible non-principal characters of G, (distinctness is easily verified) each one being associated with one of the H_i's. Since a is the number of non-identity conjugate classes of G, it follows that each non-principal irreducible character of G is exceptional with respect to a unique one of $H_1, \ldots, H_r$. We adjoin an extra subscript throughout (2.4) and (2.7), so that

$$\begin{cases}\Gamma_{ik} = z_{ik}\cdot\varrho_0 + \varepsilon_{ik}\Theta_{i1k} + \sum_{j=1}^{t_k} a_{ijk}\Xi_{jk} + \Delta_{ik},\\ \Gamma_{ik} = z_{ik}\,1_{H_k}^* - \varphi_{i1k}^*,\end{cases} \tag{2.9}$$

the subscript k indicating the group H_k.

LEMMA 2.5. *Δ_{jk} is a linear combination of the $\Xi_{\sigma\tau}$, with $\tau \neq k$.*

PROOF. By lemmas 2.3 and 2.4 and (2.8), we know that Δ_{jk} does not involve ϱ_0 or any $\Theta_{\sigma\varrho k}$. The lemma now follows from the fact that if $\tau \neq k$, then

$$\begin{aligned}(\Delta_{jk}, \Theta_{\sigma\lambda\tau} - \Theta_{\sigma\mu\tau})_G &= (\Gamma_{jk}, \Theta_{\sigma\lambda\tau} - \Theta_{\sigma\mu\tau})_G \\ &= \pm(z_{jk}\,1_{H_k}^* - \varphi_{j1k}^*, \varphi_{\sigma\lambda\tau}^* - \varphi_{\sigma\mu\tau}^*)_G \\ &= 0,\end{aligned}$$

since in the last inner product, the first factor vanishes outside the conjugate class of H_k, while the second vanishes at 1 and outside the conjugate class of H_τ.

DEFINITION. $\mathcal{I}(\Delta_{jk})$ is the set of all H_τ, $\tau \neq k$, such that $\Xi_{\sigma\tau}$ is involved in Δ_{jk} for at least one value of σ.

LEMMA 2.6. *$\Theta_{jik} = \Theta$ assumes rational integer values outside the conjugate class of H_k, and assumes non-zero rational integer values on H_λ, provided $\lambda \neq k$, and $H_\lambda \notin \mathcal{I}(\Delta_{jk})$.*

PROOF. Consider for $\lambda \neq k$,

$$\Theta | H_\lambda = \sum_\chi a_\chi \chi ,$$

χ ranging over the irreducible characters of H_λ. By orthogonality of the irreducible characters, and by Frobenius reciprocity,

$$\begin{aligned} a_{\chi_1} - a_{\chi_2} &= (\Theta | H_\lambda, \chi_1)_{H_\lambda} - (\Theta | H_\lambda, \chi_2)_{H_\lambda} \\ &= (\Theta, \chi_1^* - \chi_2^*)_G . \end{aligned}$$

If χ_1 and χ_2 are two non-principal irreducible characters of H_λ of the same degree, then by lemma 2.2 applied to H_λ, $\chi_1^* - \chi_2^*$ is the difference of two irreducible characters of G, neither of which is Θ. Thus,

$$a_{\chi_1} - a_{\chi_2} = (\Theta, \chi_1^* - \chi_2^*)_G = 0 .$$

Since the sum of all irreducible characters of a given degree assumes rational integer values, so does $\Theta | H_\lambda$.

If furthermore, $H_\lambda \notin \mathcal{I}(\Delta_{jk})$, and $h \in H_\lambda$, then by the result just proved, if $\Theta_{\sigma\varrho\tau}$ is involved in Δ_{jk}, $\Theta_{\sigma\varrho\tau}(h)$ is a rational integer. It follows that

$$\Delta_{jk}(h) \equiv 0 \,(2),$$

$$\sum_{l=1}^{l_k} a_{jlk} \Xi_{lk}(h) \equiv 0 \,(2).$$

If $\Theta_{j1k}(h) = 0$, then (2.9) would yield

$$\Gamma_{jk}(h) = 0 \equiv z_{jk} \pmod 2 . \tag{2.10}$$

Since z_{jk} is odd, (2.10) cannot hold. Since Θ_{j1k} and Θ_{jik} agree outside the conjugate class of H_k, by lemmas 2.2 and (2.2) the lemma follows.

LEMMA 2.7. *$\mathcal{I}(\Delta_{1i})$ has no more than*

$$u_i = \frac{[N_i : H_i] + 1 - \left\| \varrho_0 + \varepsilon_{1i}\Theta_{11i} + \sum_{j=1}^{l_i} a_{1ji}\Xi_{ji} \right\|_G}{2} \tag{2.11}$$

elements.

PROOF.

$$\|\tilde{1}_{H_i} - \tilde{\varphi}_{11i}\|_{N_i} = \|\Gamma_{1i}\|_G = 1 + [N_i : H_i]$$
$$= \|\varrho_0 + \varepsilon_{1i}\Theta_{11i} + \sum_{j=1}^{t_i} a_{1ji}\Xi_{ji}\|_G + \|\Delta_{1i}\|_G,$$

by (2.9), lemma 2.2, and the fact that $\|\tilde{1}_{H_i}\|_{N_i} = [N_i : H_i]$.

By definition of $\mathscr{I}(\Delta_{1i})$, if $H_\tau \in \mathscr{I}(\Delta_{1i})$, then some $\Xi_{\sigma\tau}$ makes a contribution of at least two to $\|\Delta_{1i}\|_G$. The lemma follows.

We assume now that our notation is chosen so that

$$[N_1 : H_1] \leqq [N_2 : H_2] \leqq \cdots \leqq [N_r : H_r]. \tag{2.12}$$

We recall the notation of (1.9) and (2.3), and we set

$$\Xi = \Xi_{11}.$$

If $[N_1 : H_1] = [N_2 : H_2]$, we order H_1 and H_2 so that $[H_1 : H_1'] > [H_2 : H_2']$. We remark that if $[N_1 : H_1] = [N_2 : H_2]$, then

$$\frac{[H_1 : H_1'] - 1}{[N_1 : H_1]} > \frac{[H_2 : H_2'] - 1}{[N_2 : H_2]} \geqq 2,$$

so that

$$w = w_{11} = \frac{[H_1 : H_1'] - 1}{[N_1 : H_1]} \geqq 4. \tag{2.13}$$

LEMMA 2.8.

$$\sum_{\substack{H_\tau \notin \mathscr{I}(\Delta_{11}) \\ \tau \neq 1}} \frac{h_\tau - 1}{h_\tau n_\tau} \leqq \frac{1}{w}.$$

PROOF.

$$g \cdot \|\Xi\|_G = g\, w = \sum_{x \in G} |\Xi(x)|^2 \geqq w^2 \sum_{\substack{H_\tau \notin \mathscr{I}(\Delta_{11}) \\ \tau \neq 1}} \frac{h_\tau - 1}{h_\tau n_\tau} \cdot g,$$

by (2.2), lemma 2.6, and the fact that the conjugate classes of the H_λ's partition G. The lemma follows.

LEMMA 2.9.

$$\sum_{H_\lambda \in \mathscr{I}(\Delta_{11})} \frac{h_\lambda - 1}{h_\lambda n_\lambda} \leqq \frac{u_1}{n_2}.$$

PROOF. By lemma 2.7, there are at most u_1 elements in $\mathscr{I}(\Delta_{11})$. By (2.12), each such element makes a contribution of at most $1/n_2$ to the above sum. The lemma follows.

Combining lemmas 2.8 and 2.9, we conclude

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{h_i - 1}{h_i n_i} \leqq \frac{h_1 - 1}{h_1 n_1} + \frac{1}{w} + \frac{u_1}{n_2}.$$

By the counting equation (1.10), we find

$$1 = \frac{1}{g} + \sum_{i=1}^{r} \frac{h_i - 1}{h_i n_i} \leqq \frac{1}{g} + \frac{h_1 - 1}{h_1 n_1} + \frac{1}{w} + \frac{u_1}{n_2}.$$

Since

$$u_1 \leqq \frac{n_1 - 1}{2},$$

by (2.11), we conclude

$$1 \leqq \frac{1}{g} + \frac{h_1 - 1}{h_1 n_1} + \frac{1}{w} + \frac{n_1 - 1}{2n_2}. \tag{2.14}$$

Suppose $w > 2$, so that $w \geqq 4$, since w is even. Since $n_2 \geqq n_1$, we conclude from (2.14), that

$$\frac{1}{4} \leqq \frac{1}{g} + \frac{h_1 - 1}{h_1 n_1} - \frac{1}{2n_1} = \frac{1}{g} - \frac{1}{h_1 n_1} + \frac{1}{2n_1}.$$

Since $n_1 \geqq 3$, we have

$$\frac{1}{12} \leqq \frac{1}{g} - \frac{1}{h_1 n_1} \leqq \frac{1}{g},$$

or

$$g \leqq 12,$$

which is not the case. Hence $w = 2$. It follows from (2.13) and the remark preceding (2.13), that $n_2 > n_1$. Since n_1 and n_2 are odd, we find that $n_2 \geqq n_1 + 2$. Using (2.14), with $w = 2$, we find

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{g} + \frac{h_1 - 1}{h_1 n_1} + \frac{n_1 - 1}{2(n_1 + 2)},$$

or

$$0 \leqq \frac{1}{g} + \frac{h_1 - 1}{h_1 n_1} - \frac{3}{2(n_1 + 2)} = \frac{1}{g} - \frac{1}{h_1 n_1} + \left(\frac{1}{n_1} - \frac{3}{2(n_1 + 2)}\right). \tag{2.15}$$

If $n_1 \geqq 5$, it follows that

$$\frac{1}{n_1} - \frac{3}{2(n_1 + 2)} \leqq 0, \tag{2.16}$$

so that (2.15) and (2.16) imply

$$0 \leqq \frac{1}{g} - \frac{1}{h_1 n_1},$$

$$g \leqq h_1 n_1,$$

which is not the case, since $h_1 n_1 = [N_1 : 1]$, and N_1 is a proper subgroup of G.

There remains that possibility that $n_1 = 3$. Since $w = 2$, we conclude that $[H_1 : H_1'] = 1 + n_1 w = 7$. It follows that $H_1' = \{1\}$, and $h_1 = 7$. In this case, (2.15) gives

$$0 \leqq \frac{1}{g} - \frac{1}{21} + \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{g} - \frac{1}{70},$$

or

$$g \leqq 70,$$

which is not the case. This completes the proof of Theorem A.

REMARK. This proof differs from the corresponding proof of SUZUKI in that nowhere in this proof do we estimate the value of an exceptional character

on the subgroup with respect to which it is exceptional. In SUZUKI'S proof, attention is focussed on a maximal abelian subgroup of minimal order. Here, attention is focussed on a maximal nilpotent subgroup such that its normalizer index is minimal. By so doing, we are able to avoid the possibility that H_1 is heavily non-abelian, and so a potentially nasty group H_1 is not really looked at very closely.

References

[1] BURNSIDE, W.: Theory of Groups of Finite Order, 2nd edition. Cambridge 1911. — [2] HALL, M.: The Theory of Groups. The Macmillan Co. New York: 1959. — [3] HALL, P., and G. HIGMAN: On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem. Proc. London math. Soc. (3) **6**, 1—42 (1956). — [4] HALL, P.: A note on soluble groups. J. London math. Soc. **3**, 98—105 (1928). — [5] HIGMAN, G.: Finite groups in which every element has prime power order. J. London math. Soc. **32**, 335—342 (1957). — [6] SUZUKI, M.: The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order. Proc. Amer. math. Soc. **8**, 686—695 (1957). — [7] WIELANDT, H.: Zum Satz von SYLOW. Math. Z. **60**, 407—408 (1954).

Cornell University, Ithaca, N.Y. (U.S.A.)

California Institute of Technology, Pasadena, Cal. (U.S.A.)

Institute for Defense Analyses, Princeton, N. J. (U.S.A.)

(Eingegangen am 27. November 1959)

FRÖHLICH, A.
Math. Zeitschr. 74, 18–28 (1960)

Discriminants of algebraic number fields

By
ALBRECHT FRÖHLICH

The definition of a discriminant in the theory of finite algebraic number fields has always suffered from a dichotomy. The "relative" discriminant of an extension Λ/K is an ideal (or divisor); if K happens to be the rational field however a numerical "absolute" discriminant is defined. In the present note a new concept of a discriminant $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$ will be introduced which covers both classical notions [1]).

One can in a purely formal manner and without affecting in any way the theory of the absolute discriminant reword its definition so as to consider it as a class of rational idèles modulo the squares of the unit-idèles [cf. (2.4)]; as will be shown this definition generalises in a natural manner to an arbitrary finite number field K as base field.

The foremost problem arising in this context is to obtain in terms of the new discriminant $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$ a criterion for the existence of a relative integral basis for Λ/K, i.e. of a free module basis of the algebraic integers in Λ over those in K. It will be shown in fact (cf. 2.5) that such a basis exists if, and only if, $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$ is *principal*, i.e. is represented by a number in K. This condition can then be utilised to determine, by means of simple arithmetic criteria, families of fields Λ for which relative integral bases over K exist (cf. 3.2, 4.3).

Using the new concept the basic properties of absolute discriminants can now be seen to extend quite generally to arbitrary base fields K. Thus the theorem of STICKELBERGER-SCHUR on congruence relations of $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$ mod 4 is true in full generality (cf. 2.6). The signature of a discriminant is always defined and has the expected interpretation. Of particular interest are, as in the rational case, the quadratic discriminants. We shall give a complete determination of these (cf. 3.1). It will be seen in particular that distinct quadratic fields have distinct discriminants (cf. 3.4). The corresponding results for the classical relative discriminant are either not true, or cannot even be sensibly formulated.

The relative discrimant of Λ/K in the hitherto accepted sense is simply the ideal defined by $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$. On the basis of our theory HECKE's theorem on the absolute ideal class of the discriminant will follow quite easily (cf. 2.3), and an analogous criterion for the ideal class in the narrow sense will also

[1]) Our definitions and results will be formulated in terms of number fields only. The possible generalisation to quotient fields Λ and K of appropriate Dedekind domains is obvious. It is only necessary to introduce the analogue to the group $J_{\mathsf{K}}/U_{\mathsf{K}}^{2}$ (c.f. § 2). At each step the required conditions on Λ and K — such as separability of Λ/K — are clear from the text.

be established (cf. 4.6). At the same time we shall prove a conjecture of HERBRAND'S (cf. 4.7).

As a final illustration we shall derive, in analogy to the rational case, the classification of cubic fields over K into cyclic ones and non-normal ones by means of their discriminant.

In a subsequent paper [3] the concepts developed here will be used to determine arithmetically the structure of the ideals in a finite extension Λ qua modules over the integers in the base field K. Other problems which may be of interest in this context are the generalisation of the Kronecker-symbol and the application of the ideas of the present paper to quadratic forms.

§ 1. Local Discriminants

NOTATION AND CONVENTIONS. Throughout K is a finite algebraic number field and $\mathfrak{o}$ the ring of (algebraic) integers in K. If R is an integral domain, $R^\times$ is the multiplicative semigroup of non zero elements; if moreover R is a principal ideal ring $(M:R)$ stands for the rank of the free R-module M.

Let $\mathfrak{p}$ be a prime divisor in K and let $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ be the corresponding completion of K. If $\mathfrak{p}$ is finite $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ is the ring of $\mathfrak{p}$-adic integers in $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ and $U_\mathfrak{p}$ the group of units; if $\mathfrak{p}$ is infinite we put $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}=\mathsf{K}_\mathfrak{p}$, $U_\mathfrak{p}=\mathsf{K}_\mathfrak{p}^\times$. We shall consider finite dimensional commutative $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$-algebras without radical, briefly called $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$-algebras. Such an algebra $\Lambda_\mathfrak{p}$ is the direct sum of fields $\Lambda_\mathfrak{p}^{(i)}$,

$$\Lambda_\mathfrak{p}=\sum \Lambda_\mathfrak{p}^{(i)}. \tag{1.1}$$

$\Lambda_\mathfrak{p}$ will contain a unique maximal order $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ and $(\Lambda_\mathfrak{p}:\mathsf{K}_\mathfrak{p})=(\mathfrak{O}_\mathfrak{p}:\mathfrak{o}_\mathfrak{p})$. $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ is the direct sum of the corresponding maximal orders $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}^{(i)}$:

$$\mathfrak{O}_\mathfrak{p}=\sum \mathfrak{O}_\mathfrak{p}^{(i)}. \tag{1.2}$$

The discriminant of every $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-basis of $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ is an element of $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}^\times$ and is uniquely determined modulo $U_\mathfrak{p}^2$ by $\Lambda_\mathfrak{p}$. We denote its class in $\mathsf{K}_\mathfrak{p}^\times/U_\mathfrak{p}^2$ by $\mathfrak{d}(\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p})$; this is the discriminant of $\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p}$. From (1.2) we have immediately

$$\mathfrak{d}(\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p})=\prod_i \mathfrak{d}(\Lambda_\mathfrak{p}^{(i)}/\mathsf{K}_\mathfrak{p}). \tag{1.3}$$

If in particular $\Lambda_\mathfrak{p}$ is a field then the norm mapping $N_{\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p}}$ takes the group $\overline{U}_\mathfrak{p}$ of units in $\Lambda_\mathfrak{p}$ into $U_\mathfrak{p}$ and thus gives rise to a homomorphism $\Lambda_\mathfrak{p}^\times/\overline{U}_\mathfrak{p}^2\to\mathsf{K}_\mathfrak{p}^\times/U_\mathfrak{p}^2$ again to be denoted by $N_{\Lambda_\mathfrak{p}\mathsf{K}_\mathfrak{p}}$. One obtains then for a $\Lambda_\mathfrak{p}$-algebra $\Omega_\mathfrak{p}$ the formula

$$\mathfrak{d}(\Omega_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p})=\mathfrak{d}(\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p})^{(\Omega_\mathfrak{p}:\Lambda_\mathfrak{p})}\cdot N_{\Lambda_\mathfrak{p}\mathsf{K}_\mathfrak{p}}\mathfrak{d}(\Omega_\mathfrak{p}/\Lambda_\mathfrak{p}). \tag{1.4}$$

In establishing (1.4) we may assume $\Omega_\mathfrak{p}$ to be actually an extension field of $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ contained in some normal extension $\overline{\mathsf{K}}_\mathfrak{p}$ of $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$. Indicating row and column indices in the obvious manner we consider matrices

$$A=(a_i^\gamma)_{i,\gamma},\qquad B=(b_\tau^\sigma)_{\tau,\sigma},$$

where the a_i (the b_τ) form an integral basis for $\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ (for $\Omega_\mathfrak{p}/\Lambda_\mathfrak{p}$); γ (and σ) runs through the complete set of monomorphisms $\Lambda_\mathfrak{p} \to \overline{\mathsf{K}}_\mathfrak{p}$ over $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ (and $\Omega_\mathfrak{p} \to \overline{\mathsf{K}}_\mathfrak{p}$ over $\Lambda_\mathfrak{p}$). Extend each γ to an automorphism of $\overline{\mathsf{K}}_\mathfrak{p}$ and write

$$C = (a_i^\gamma b_\tau^{\sigma\gamma})_{(i,\tau),(\sigma,\gamma)}.$$

Then

$$|A|^2 U_\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{d}(\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p}),$$
$$|B|^2 \overline{U}_\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{d}(\Omega_\mathfrak{p}/\Lambda_\mathfrak{p}),$$
$$|C|^2 U_\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{d}(\Omega_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p}).$$

Define moreover matrices

$$A^\times = (a_i^\gamma \delta_{\tau,\tau'})_{(i,\tau),(\tau',\gamma)},$$
$$B^\times = (b_\tau^{\sigma\gamma} \delta_{\gamma,\gamma'})_{(\tau,\gamma),(\sigma,\gamma')}.$$

Then on the one hand $A^\times B^\times = C$ while on the other hand

$$|A^\times|^2 = |A|^{2(\Omega_\mathfrak{p}:\Lambda_\mathfrak{p})}, \qquad |B^\times|^2 = N_{\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p}} |B|^2.$$

Comparison of the equations we have derived gives (1.4).

Let now Λ be a finite algebraic extension field of K. For[2]) every prime divisor $\mathfrak{p}$ in K,

$$\Lambda_\mathfrak{p} = \Lambda \otimes_\mathsf{K} \mathsf{K}_\mathfrak{p} \tag{1.5}$$

is a $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$-algebra and $(\Lambda_\mathfrak{p}:\mathsf{K}_\mathfrak{p}) = (\Lambda:\mathsf{K})$. Let $\mathfrak{Q}$ be the domain of integers in Λ. Then we have the natural identification for the maximal order in $\Lambda_\mathfrak{p}$

$$\mathfrak{Q}_\mathfrak{p} = \mathfrak{Q} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_\mathfrak{p}. \tag{1.6}$$

The discriminants $\mathfrak{d}(\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p})$ will be called the *local discriminants* of Λ/K.

§ 2. The Global Discriminant

The idèle group (cf. [2]) in K will be denoted by J_K and the group of principal idèles by P_K; we may identify $P_\mathsf{K} = \mathsf{K}^\times$. U_K is the group of unit idèles, i.e. of idèles whose $\mathfrak{p}$-components lie in $U_\mathfrak{p}$ everywhere. $J_\mathsf{K}/U_\mathsf{K}$ is then the ideal group.

Let again Λ be a finite algebraic extension of K. The classical discriminant of Λ/K is an ideal, i.e. is defined modulo U_K. To strengthen this definition we only have to note that $J_\mathsf{K}/U_\mathsf{K}^2$ can be identified with that subgroup in the cartesian product $\prod \mathsf{K}_\mathfrak{p}^\times/U_\mathfrak{p}^2$ whose elements have their $\mathfrak{p}$-components in $U_\mathfrak{p}/U_\mathfrak{p}^2$ almost everywhere. There exists thus a unique element $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$ of $J_\mathsf{K}/U_\mathsf{K}^2$ such that for all $\mathfrak{p}$

$$[\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})]_\mathfrak{p} = \mathfrak{d}(\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p}), \tag{2.1}$$

the right hand side lying in $U_\mathfrak{p}/U_\mathfrak{p}^2$, except when $\mathfrak{p}$ is ramified in Λ.

[2]) For the theory of the "local" algebras associated with the extension Λ/K see e.g. [4]. The following equation (1.6) follows from the "strong independence" of the valuations in Λ which correspond to the components $\Lambda_\mathfrak{p}^{(i)}$ (cf. [4], S. 280).

$\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$ is the *discriminant* of Λ/K; its local components are the local discriminants. An analogous rule applies to the classical discriminant, which will henceforth be denoted by $(\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K}))$. For all $\mathfrak{p}$, the $\mathfrak{p}$-component of this ideal is the ideal of $\mathfrak{d}(\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p})$. Therefore $(\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K}))$ is in fact the ideal derived from $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$, i.e. its image under the mapping $J_\mathsf{K}/U_\mathsf{K}^2 \to J_\mathsf{K}/U_\mathsf{K}$.

The norm mapping $N_{\Lambda/\mathsf{K}}$ will induce a homomorphism $J_\Lambda/U_\Lambda^2 \to J_\mathsf{K}/U_\mathsf{K}^2$. From the properties of the norm-mappings involved and from (1.3), (1.4) we obtain the formula

$$\mathfrak{d}(\Omega/\mathsf{K}) = \mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})^{(\Omega:\Lambda)} \cdot N_{\Lambda/\mathsf{K}}\,\mathfrak{d}(\Omega/\Lambda), \tag{2.2}$$

for any finite algebraic extension Ω of Λ.

We shall in the sequel (cf. 2.1., 2.2., 2.6.) derive a number of restrictions on the possible classes of $J_\mathsf{K}/U_\mathsf{K}^2$ which can give discriminants. Trivially we have of course

2.1. $(\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K}))$ *is an integral ideal.*

In fact, as was pointed out in § 1, $\mathfrak{d}(\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p})$ will always lie in $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}^\times/U_\mathfrak{p}^2$.

2.2. THEOREM. $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$ *lies in* $J_\mathsf{K}^2 P_\mathsf{K}/U_\mathsf{K}^2$.

PROOF. Let $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ be a basis of Λ/K with discriminant α. For every prime divisor $\mathfrak{p}$ the elements $\alpha_\mathfrak{p}^{(i)} = \alpha^{(i)} \otimes 1$ of $\Lambda_\mathfrak{p} = \Lambda \otimes_\mathsf{K} \mathsf{K}_\mathfrak{p}$ form a basis of $\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ whose discriminant is $\alpha_\mathfrak{p}$. On the other hand if δ is a representative of $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$ in J_K then $\delta_\mathfrak{p}$ is the discriminant of some basis of $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$; but this is also a basis of $\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p}$. Therefore for all $\mathfrak{p}$, $\delta_\mathfrak{p}\alpha_\mathfrak{p}^{-1} \in \mathsf{K}_\mathfrak{p}^{\times 2}$, whence $\delta\alpha^{-1} \in J_\mathsf{K}^2$ as required.

The image of $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$ under the mapping $J_\mathsf{K}/U_\mathsf{K}^2 \to J_\mathsf{K}/U_\mathsf{K} P_\mathsf{K}$ is the absolute ideal class of $(\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K}))$. From 2.2 we thus have

2.3. (HECKE [5], Theorem 177). *The absolute ideal class of* $(\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K}))$ *is a square.*

Let Y_K be the group of units in K; thus $Y_\mathsf{K} = U_\mathsf{K} \cap P_\mathsf{K}$. Moreover $J_\mathsf{K}^2 \cap P_\mathsf{K} = P_\mathsf{K}^2$, and so $U_\mathsf{K}^2 \cap P_\mathsf{K} = Y_\mathsf{K}^2$. We thus have a natural isomorphism

$$\varrho\colon \mathsf{K}^\times/Y_\mathsf{K}^2 \cong U_\mathsf{K}^2 P_\mathsf{K}/U_\mathsf{K}^2. \tag{2.3}$$

Assume now that the integral domain $\mathfrak{O}$ in Λ has a free $\mathfrak{o}$-basis (relative integral basis). The discriminant α of such a basis is an element of $\mathsf{K}^\times$, uniquely determined by $\mathfrak{O}$ modulo Y_K^2. We thus obtain a class $d(\Lambda/\mathsf{K})$ of $\mathsf{K}^\times/Y_\mathsf{K}^2$ called the *numerical discriminant* of Λ/K. By (1.6) $\alpha_\mathfrak{p}$ is (for all $\mathfrak{p}$) the discriminant of a basis of $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ over $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. Hence $\alpha\, U_\mathsf{K}^2 = \mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$, and so we have

2.4. ϱ *induces a* $(1, 1)$*-mapping* $d(\Lambda/\mathsf{K}) \to \mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$ *of the set of numerical discriminants into the set of discriminants.* $(\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$ *is the class* mod U_K^2 *determined by* $d(\Lambda/\mathsf{K})$.

If in particular $\mathfrak{o}$ is a principal ideal ring, so that numerical discriminants exist for all Λ we obtain a biunique correspondence

$$d(\Lambda/\mathsf{K}) \leftrightarrow \mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K}). \tag{2.4}$$

Finally if in addition $Y_K^2 = 1$ then the numerical discriminants are actually elements of $K^\times$. This will in particular be the case for the rational field. (2.4) shows that the notion of a discriminant introduced here reduces essentially to that of an absolute discriminant, when K is the rational field.

We shall call an element of J_K/U_K^2 a *principal element* if it belongs to the subgroup $U_K^2 P_K/U_K^2$, i.e. if it is the image of a principal idèle under the mapping $J_K \to J_K/U_K^2$. A discriminant $\mathfrak{d}(\Lambda/K)$ is called a *principal discriminant* if it is a principal element, i.e. if it has a representative in $K^\times$; such a representative is then uniquely determined mod Y_K^2. The images under ϱ of numerical discriminants are principal; the question arises as to whether every principal discriminant is such an image. In other words, we have seen that if Ω has an integral basis over $\mathfrak{o}$, then $\mathfrak{d}(\Lambda/K)$ is principal; is the converse true as well? That this is in fact the case is the contents of the following theorem.

2.5. THEOREM. *The domain Ω of algebraic integers in Λ has a free module basis (integral basis) over the domain of algebraic integers $\mathfrak{o}$ in K if, and only if, $\mathfrak{d}(\Lambda/K)$ is principal.*

A criterion for the existence of a relative integral basis was for the first time given by ARTIN (cf. [1]) in terms of the classical relative discriminant $(\mathfrak{d}(\Lambda/K))$ and of the discriminant α of a K-basis of Λ. The ideal $(\mathfrak{d}(\Lambda/K))\,(\alpha^{-1})$ is the square of an ideal $\mathfrak{a}$ and the required necessary and sufficient condition is that $\mathfrak{a}$ be a principal ideal. We shall see in a consecutive paper (cf. [3]) how this result connects up with our theory. It seems that the new definition of a discriminant is, however, the natural one to use, if one wants to formulate a simple criterion which does not involve explicitly any basis of Λ but only depends on an intrinsic property, and which so allows us to find fairly general classes of extension fields Λ with a relative integral basis (e.g. 3.2., 4.3.). There is no simple property of $(\mathfrak{d}(\Lambda/K))$ qua ideal which would suffice here. Thus it is easy to construct examples of discriminants $\mathfrak{d}(\Lambda/K)$ which are not principal, while the ideal $(\mathfrak{d}(\Lambda/K))$ is principal.

The crux of 2.5. lies in the sufficiency part. For this we require $\mathfrak{d}(\Lambda/K)$ merely to have a representative $\alpha \in K^\times \bmod U_K^2$; that α is the discriminant of a free $\mathfrak{o}$-basis of Ω does not have to be postulated, but is a consequence of the hypothesis.

PROOF of 2.5. The necessity of the condition follows, as already indicated by 2.4.

Assume then $\mathfrak{d}(\Lambda/K)$ to have a representative δ in $K^\times$. There will certainly exist a basis

$$\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)} \tag{2.5}$$

of Λ/K and an integral ideal $\mathfrak{a}$ in K such that $\beta \in \Lambda$ is an algebraic integer if and only if in the representation

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} a^{(i)} \alpha^{(i)} \qquad (a^{(i)} \in K)$$

we have[3])

$$a^{(i)} \in \mathfrak{o} \quad (i < n), \qquad a^{(n)} \in \mathfrak{a}. \tag{2.6}$$

Let α be the discriminant of the basis (2.5). Then for all $\mathfrak{p}$, $\alpha_\mathfrak{p}\delta_\mathfrak{p}^{-1} \in \mathsf{K}_\mathfrak{p}^{\times 2}$ and so $\alpha\delta^{-1} \in J_\mathsf{K}^2$. As $\alpha\delta^{-1} \in \mathsf{K}^\times$ we have $\alpha\delta^{-1} \in \mathsf{K}^{\times 2}$, i.e.

$$\delta = \alpha\gamma^2, \qquad \gamma \in \mathsf{K}^\times. \tag{2.7}$$

Let $\mathfrak{p}^r$ be the highest power of the finite prime divisor $\mathfrak{p}$ contained in $\mathfrak{a}$.

$$\alpha_\mathfrak{p}^{(1)}, \ldots, \alpha_\mathfrak{p}^{(n)} \tag{2.8}$$

is a basis of $\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ and by (2.6) an element $\beta_\mathfrak{p} \in \Lambda_\mathfrak{p}$ will lie in $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ if and only if in the representation

$$\beta_\mathfrak{p} = \sum_{i=1}^{n} b^{(i)}\alpha_\mathfrak{p}^{(i)}, \qquad (b^{(i)} \in \mathsf{K}_\mathfrak{p})$$

we have

$$b^{(i)} \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p} \quad (i < n), \qquad b^{(n)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^r}.$$

Let π be any element in $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ such that $(\pi) = \mathfrak{p}^r$. Then

$$\alpha_\mathfrak{p}^{(1)}, \ldots, \alpha_\mathfrak{p}^{(n-1)}, \pi\alpha_\mathfrak{p}^{(n)} \tag{2.9}$$

is a basis of $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ over $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. The discriminant of (2.8) is $\alpha_\mathfrak{p}$ and so the discriminant of (2.9) is $\alpha_\mathfrak{p}\pi^2$. By hypothesis on δ, $\delta_\mathfrak{p}^{-1}\alpha_\mathfrak{p}\pi^2 \in U_\mathfrak{p}^2$, and so by (2.7) $\pi^{-1}\gamma_\mathfrak{p} \in U_\mathfrak{p}$. But the choice of π among generators of $\mathfrak{p}^r$ was left open, and thus we may take $\pi = \gamma_\mathfrak{p}$. Hence

$$\alpha_\mathfrak{p}^{(1)}, \ldots, \alpha_\mathfrak{p}^{(n-1)}, \gamma_\mathfrak{p}\alpha_\mathfrak{p}^{(n)}$$

is an $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-basis of $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$, for all $\mathfrak{p}$, and thus

$$\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n-1)}, \gamma\alpha^{(n)}$$

is an integral basis of $\mathfrak{Q}$ over $\mathfrak{o}$.

In [8] I. SCHUR gave a surprisingly simple proof of the congruence property

$$D \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod 4$$

of absolute discriminants in the rational field, originally discovered by STICKELBERGER (cf. [9]). To express the non-rational analogue of this result in a simple manner we write for any idèles $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ in J_K and any integral ideal $\mathfrak{a}$ in K, $\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{n}^2 \pmod{\mathfrak{a}}$ if, when $\mathfrak{a} = \prod(\mathfrak{p})^{r_\mathfrak{p}}$ is the decomposition of $\mathfrak{a}$ into distinct prime power ideals, then $\mathfrak{m}_\mathfrak{p} - \mathfrak{n}_\mathfrak{p}^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{r_\mathfrak{p}}}$, whenever $r_\mathfrak{p} > 0$. We shall say the discriminant $\mathfrak{d}$ is quadratic residue mod $\mathfrak{a}$ if for some representative idèle $\mathfrak{m}$ of $\mathfrak{d}$ (and so for all representative idèles of $\mathfrak{d}$), the congruence $\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{n}^2 \pmod{\mathfrak{a}}$ has a solution.

2.6. THEOREM. *Every discriminant is a quadratic residue* mod 4.

PROOF. It will suffice to show that every local discriminant $\mathfrak{d}(\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p})$ is a quadratic residue mod $\mathfrak{p}^{2r}$, whenever $\mathfrak{p}$ lies above 2 and $\mathfrak{p}^{2r}$ is the precise power of $\mathfrak{p}$ dividing 4. Moreover by (1.3) we may assume $\Lambda_\mathfrak{p}$ to be a field. But in this case SCHUR's proof applies almost without change.

[3]) This follows from the fundamental structure theorem on $\mathfrak{o}$-modules. See [3] and the literature quoted there.

§ 3. Quadratic Discriminants

Let $\Omega = \mathsf{K}(\sqrt{\alpha})$ be a quadratic field (over K); $\mathfrak{d}(\Omega/\mathsf{K})$ is called a *quadratic discriminant*. We shall determine the local discriminants. Here we may assume that $\alpha \in \mathfrak{o}^\times$, and, for a fixed finite prime divisor $\mathfrak{p}$, also $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}$. $\delta_\mathfrak{p}$ will stand for a suitable representative of $\mathfrak{d}(\Omega_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p})$ in $\mathsf{K}_\mathfrak{p}^\times$.

3.1. THEOREM. (a) *Let $\mathfrak{p}$ be a finite prime divisor not lying above 2. Then* $\delta_\mathfrak{p} = \alpha_\mathfrak{p}$.

(b) *Let $\mathfrak{p}$ be a finite prime divisor lying above 2.*

(i) *If* $\alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ *then* $\delta_\mathfrak{p} = 4_\mathfrak{p}\alpha_\mathfrak{p}$.

(ii) *If $\alpha_\mathfrak{p} \in U_\mathfrak{p}$ and if s is the greatest positive integer such that firstly*

$$4 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{2s}},$$

and in the second place

$$\exists\, \gamma_\mathfrak{p} \in U_\mathfrak{p} \quad \text{with} \quad \alpha_\mathfrak{p} \overset{v'}{\equiv} \gamma_\mathfrak{p}^2 \pmod{\mathfrak{p}^{2s}},$$

then

$$\delta_\mathfrak{p} = (2_\mathfrak{p}\pi^{-1})^2 \alpha_\mathfrak{p}, \quad \text{where} \quad \pi \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}^\times, \quad (\pi) = \mathfrak{p}^s.$$

(c) *Let $\mathfrak{p}$ be an infinite real prime divisor. Then* $\delta_\mathfrak{p} = \alpha_\mathfrak{p}$.

The corresponding results for the ideal $(\mathfrak{d}(\Omega/\mathsf{K}))$ are of course classical.

PROOF. If $\alpha \in \mathsf{K}_\mathfrak{p}^{\times 2}$ then $\mathfrak{d}(\Omega_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p}) = 1$. But having assumed that $\alpha_\mathfrak{p} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}$ we then also have $\alpha_\mathfrak{p} \in U_\mathfrak{p}^2$ and so $\delta_\mathfrak{p} = \alpha_\mathfrak{p}$. Henceforth we assume that $\alpha_\mathfrak{p} \notin \mathsf{K}_\mathfrak{p}^{\times 2}$.

(a) $1_\mathfrak{p}, \sqrt{\alpha_\mathfrak{p}}$ is a basis of $\mathfrak{L}_\mathfrak{p}$ with discriminant $4_\mathfrak{p}\alpha_\mathfrak{p}$; as $4_\mathfrak{p} \in U_\mathfrak{p}^2$ we have $\delta_\mathfrak{p} = \alpha_\mathfrak{p}$.

(b) If first $\alpha_\mathfrak{p} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ then we see as under (a) that $1_\mathfrak{p}, \sqrt{\alpha_\mathfrak{p}}$ is a basis of $\mathfrak{L}_\mathfrak{p}$ with discriminant $4_\mathfrak{p}\alpha_\mathfrak{p}$. Assume now that $\alpha_\mathfrak{p} \in U_\mathfrak{p}$. If $s, \gamma_\mathfrak{p}$ and π satisfy the conditions stated then $1_\mathfrak{p}, (\gamma_\mathfrak{p} + \sqrt{\alpha_\mathfrak{p}})\pi^{-1}$ is a basis of $\mathfrak{L}_\mathfrak{p}$ with discriminant $\delta_\mathfrak{p} = (2_\mathfrak{p}\pi^{-1})^2\alpha_\mathfrak{p}$.

(c) If $\alpha_\mathfrak{p} > 0$ we have already seen that $\delta_\mathfrak{p}$ may be taken as any positive number. If $\alpha_\mathfrak{p} < 0$ then $1_\mathfrak{p}, (1_\mathfrak{p} + \sqrt{\alpha_\mathfrak{p}})\, 2^{-1}$ is a basis of $\Omega_\mathfrak{p}$ with discriminant $\alpha_\mathfrak{p}$.

From 3.1 we see in particular that if $\mathfrak{p}$ is a prime divisor in K lying above 2, and if $\mathfrak{p}^r$ is the precise power of $\mathfrak{p}$ entering the prime decomposition of (2), then for each representative δ of $\mathfrak{d}(\Omega/\mathsf{K})$ in J_K there will exist an element $\beta_\mathfrak{p} \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}^\times$ such that $\delta_\mathfrak{p} - \beta_\mathfrak{p}^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{2r}}$. It follows that there exists an algebraic integer β in K such that $\delta - \beta^2 \equiv 0 \pmod 4$. This observation leads to an explicit construction of an integral basis whenever $\mathfrak{d}(\Omega/\mathsf{K})$ is principal, i.e. δ is taken as an element of $\mathfrak{o}^\times$. In fact with the previous connotation of β, we get the integral basis $1, (\beta + \sqrt{\delta})/2$.

Another related application of 3.1 gives

3.2. THEOREM. *If α is an algebraic integer in K such that*

(i) *the ideal (α) is square free,*

(ii) *α is prime to 2 and quadratic residue* mod 4,

then the algebraic integers in $\mathsf{K}(\sqrt{\alpha})$ have an integral basis over $\mathfrak{o}$.

In fact by (i) α_p satisfies the hypothesis $\alpha_p \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}$ simultaneously for all finite prime divisors $\mathfrak{p}$. We may then apply 3.1 and conclude that under hypothesis (ii) α is a representative of $\mathfrak{d}(\Omega|\mathsf{K})$. 3.2 now follows by 2.5.

Another corollary of 3.1 is

3.3. *Let S be a set of prime divisors in K, containing all but a finite number of these. If $\mathfrak{d} \in J_{\mathsf{K}}^2 P_{\mathsf{K}}/U_{\mathsf{K}}^2$ then there exists at most one quadratic field Ω with $\mathfrak{d}_\mathfrak{p} = \mathfrak{d}(\Omega_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p})$ for all $\mathfrak{p} \in S$.*

Proof. Assume $\mathfrak{d}(\Omega'_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p}) = \mathfrak{d}(\Omega_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p})$ for all $\mathfrak{p} \in S$. We shall only consider those prime divisors in S which are finite, and are non ramified in Ω and in Ω'. By 3.1 any such prime divisor $\mathfrak{p}$ will split in Ω if, and only if, $\mathfrak{d}(\Omega_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p}) = 1$. Apply the same criterion to Ω'. Thus with a possible finite number of exceptions the finite prime divisors in K which split in Ω will also split in Ω', and vice versa. This implies $\Omega = \Omega'$.

We now define the mapping

$$\psi\colon\ \mathsf{K}^\times/\mathsf{K}^{\times 2} \to J_{\mathsf{K}}^2 P_{\mathsf{K}}/U_{\mathsf{K}}^2$$

by

$$\psi(\alpha \mathsf{K}^{\times 2}) = \mathfrak{d}\left(\mathsf{K}\left(\sqrt{\alpha}\right)/\mathsf{K}\right).$$

$\operatorname{Im}\psi$ is thus the set of quadratic discriminants.

We furthermore define the epimorphism

$$\vartheta\colon\ J_{\mathsf{K}}^2 P_{\mathsf{K}}/U_{\mathsf{K}}^2 \to \mathsf{K}^\times/\mathsf{K}^{\times 2}$$

as the composition of the epimorphism $J_{\mathsf{K}}^2 P_{\mathsf{K}}/U_{\mathsf{K}}^2 \to J_{\mathsf{K}}^2 P_{\mathsf{K}}/J_{\mathsf{K}}^2$ with the isomorphism $J_{\mathsf{K}}^2 P_{\mathsf{K}}/J_{\mathsf{K}}^2 \cong P_{\mathsf{K}}/J_{\mathsf{K}}^2 \cap P_{\mathsf{K}} = \mathsf{K}^\times/\mathsf{K}^{\times 2}$. Let δ be a representative in J_{K} of $\mathfrak{d} \in J_{\mathsf{K}}^2 P_{\mathsf{K}}/U_{\mathsf{K}}^2$. If $\mathfrak{d} = \psi(\alpha \mathsf{K}^{\times 2})$ then by 3.1 $\delta_\mathfrak{p} \alpha_\mathfrak{p}^{-1} \in \mathsf{K}_\mathfrak{p}^{\times 2}$ for all $\mathfrak{p}$ and so $\delta \alpha^{-1} \in J_{\mathsf{K}}^2$. Thus

$$\vartheta \circ \psi = \text{identity mapping of } \mathsf{K}^\times/\mathsf{K}^{\times 2}. \tag{3.1}$$

If $\vartheta(\mathfrak{d}) = \alpha \mathsf{K}^{\times 2}$ then trivially $\alpha \delta^{-1} \in J_{\mathsf{K}}^2$. Hence in the first place δ will be an idèle square in the quadratic field Ω if, and only if, α is an idèle square, i.e. a square in $\Omega^\times$, and so if, and only if, $\Omega \supseteq \mathsf{K}\left(\sqrt{\alpha}\right)$. Moreover, denoting by ϑ_2 the restriction of ϑ to $\operatorname{Im}\psi$, we see by (3.1) that

$$\psi \circ \vartheta_2 = \text{identity mapping of } \operatorname{Im}\psi. \tag{3.2}$$

We shall say that the element $\mathfrak{d} \in J_{\mathsf{K}}^2 P_{\mathsf{K}}/U_{\mathsf{K}}^2$ is a square in Ω if some representative δ in J_{K} (and so each of its representatives) is an idèle square in Ω.

From the preceding discussion and from 3.3 we now have, allowing K to be counted as a quadratic field,

3.4. Theorem. *Distinct quadratic fields have distinct discriminants. In particular K is the only quadratic field with discriminant 1.*

If $\Omega \neq \mathsf{K}$ is a quadratic field then each of the following properties characterises $\mathfrak{d}(\Omega/\mathsf{K})$ uniquely in the set of all quadratic discriminants different from 1.

(i) *$\mathfrak{d}(\Omega/\mathsf{K})$ is a square in Ω.*

(ii) *$\mathfrak{d}(\Omega_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p}) = 1$ whenever $\mathfrak{p}$ splits in Ω.*

Moreover we get

3.5. (i) *For each element* $\mathfrak{d} \in J_K^2 P_K/U_K^2$, $\mathfrak{d} \notin J_K^2/U_K^2$ *there exists one and only one quadratic field* Ω *in which* $\mathfrak{d}$ *is a square.*

(ii) *For each element* $\mathfrak{d} \in J_K^2 P_K/U_K^2$ *there exists one and only one quadratic discriminant* $\mathfrak{d}_1$ *such that* $\mathfrak{d} J_K^2 = \mathfrak{d}_1 J_K^2$.

(iii) *If* $\mathfrak{d} \notin J_K^2/U_K^2$, *if* Ω *is the field determined in* (i) *and* $\mathfrak{d}_1$ *the discriminant obtained in* (ii) *then* $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}(\Omega/K)$.

The mapping $\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}^2 (\mathfrak{m} \in J_K)$ gives rise to an isomorphism

$$\tau\colon J_K/U_K \to J_K^2/U_K^2. \tag{3.3}$$

If $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ are quadratic discriminants then by 3.5 (ii) there exists a unique quadratic discriminant $(\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2)^\times$ and a unique ideal $\mathfrak{a}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)$ such that

$$\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2 = \tau\, \mathfrak{a}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2) \cdot (\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2)^\times.$$

The function $\mathfrak{a}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)$ is a factor set of $J_K^2 P_K/J_K^2$ in the ideal group J_K/U_K. From 3.1 we deduce

3.6. *If* $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ *are quadratic discriminants and if the ideals* $(\mathfrak{d}_1)$, $(\mathfrak{d}_2)$ *are coprime then* $\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2$ *is a quadratic discriminant. In particular the non ramified quadratic discriminants — characterised by* $(\mathfrak{d}) = (1)$ *— form a group.*

In conclusion we establish an ideal theoretic criterion for the existence of an integral basis in quadratic extensions due to H. B. MANN (cf. [7]).

3.7. *The algebraic integers in a quadratic extension* Ω *of* K *have an integral basis over* $\mathfrak{o}$ *if, and only if,* $(\mathfrak{d}(\Omega/K)) = (\beta)$ *where* $\Omega = K(\sqrt{\beta})$.

PROOF. We may assume $\Omega \neq K$. If first

$$\mathfrak{d}(\Omega/K) = \beta U_K^2, \qquad \beta \in K^\times, \tag{3.4}$$

then trivially

$$(\beta) = (\mathfrak{d}(\Omega/K)) \tag{3.5}$$

and by 3.4

$$\Omega = K(\sqrt{\beta}). \tag{3.6}$$

For the converse let δ be a representative of $\mathfrak{d}(\Omega/K)$. By (3.5) $\delta\beta^{-1} \in U_K$ and by (3.6) $\delta\beta^{-1} \in J_K^2$ whence $\delta\beta^{-1} \in U_K^2$, i.e. (3.4) is valid.

The question of the existence of quadratic extensions with relative integral basis will in a more general context be dealt with elsewehere.

§ 4. The Discriminant Field

By 3.5 there exists for every finite extension Λ of K a unique quadratic field Ω called the *discriminant field* of Λ such that

$$\mathfrak{d}(\Lambda/K)\, J_K^2 = \mathfrak{d}(\Omega/K)\, J_K^2. \tag{4.1}$$

There thus exists an ideal $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\Lambda$ such that

$$\mathfrak{d}(\Lambda/K) = \mathfrak{d}(\Omega/K) \cdot \tau\, \mathfrak{a}_\Lambda \tag{4.2}$$

where τ is the isomorphism defined in (3.3). For the corresponding ideals we get then

$$(4.3) \qquad \left(\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})\right) = \left(\mathfrak{d}(\Omega/\mathsf{K})\right)\mathfrak{a}_\Lambda^2.$$

For any finite prime divisor $\mathfrak{p}$ not lying above 2 we have $\left(\mathfrak{d}(\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p})\right)=\mathfrak{p}^r$ $(r\geqq 0)$ and $\left(\mathfrak{d}(\Omega_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p})\right)=\mathfrak{p}^s$, $s=0$, or $=1$. It follows that $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^t$ $(t\geqq 0)$. An analogous result can be established from 3.1 and from the generalisation of STICKELBERGER's theorem (cf. 2.6) when $\mathfrak{p}$ lies above 2. We thus have[4])

4.1. THEOREM. *$\mathfrak{a}_\Lambda$ is always an integral ideal.*

Let $\bar{\Lambda}$ be the least normal field (over K) containing Λ. If $\vartheta\left(\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})\right)=\alpha\mathsf{K}^{\times 2}$ then for each $\mathfrak{p}$, $\alpha_\mathfrak{p}$ is the discriminant of some basis of $\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ and so $\alpha_\mathfrak{p}\in\bar{\Lambda}_\mathfrak{p}^{\times 2}$. Hence $\alpha\in J_\Lambda^2$, and so $\mathsf{K}\left(\sqrt{\alpha}\right)\subseteqq\bar{\Lambda}$. We have shown that

4.2. *The discriminant field of Λ is contained in the least normal field over K containing Λ.*

Assume now Λ to be normal of odd degree over K. Then K is the discriminant field of Λ and so $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})\in J_\mathsf{K}^2/U_\mathsf{K}^2$. If moreover Λ/K is non ramified then $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})\in U_\mathsf{K}/U_\mathsf{K}^2$, and so $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})=1$. By 2.5 we conclude

4.3. THEOREM. *In every normal, non ramified extension Λ of odd degree over K, the integers have a free module basis ober the integers in K.*

Note that for quadratic fields Ω, $\mathfrak{d}(\Omega_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p})\in\mathsf{K}_\mathfrak{p}^{\times 2}/U_\mathfrak{p}^2$ implies $\mathfrak{d}(\Omega_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p})=1$. Thus

4.4. THEOREM. *$\mathfrak{d}(\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p})\in\mathsf{K}_\mathfrak{p}^{\times 2}/U_\mathfrak{p}^2$ if, and only if, $\mathfrak{p}$ splits in the discriminant field of Λ.*

Let $\mathfrak{p}$ be a real infinite prime. The value ± 1 of the functions $\operatorname{sgn}_\mathfrak{p}(\mathfrak{m})$ depends solely on the class of $\mathfrak{m}$ mod J_K^2. We may thus consider $\operatorname{sgn}_\mathfrak{p}$ as a class function mod J_K^2. The same is trivially true if $\mathfrak{p}$ is complex. The ordered set of numbers $\operatorname{sgn}_\mathfrak{p}(\mathfrak{d})$ as $\mathfrak{p}$ runs through the infinite primes is the *signature* of the discriminant $\mathfrak{d}$. From 3.1 we get

4.5. THEOREM. *Let $\mathfrak{p}$ be a real infinite prime. If $\Lambda_\mathfrak{p}$ is the sum of r_1 copies of the field of real numbers and of r_2 copies of the field of complex numbers then*

$$\operatorname{sgn}_\mathfrak{p}\left(\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})\right)=(-1)^{r_1}.$$

As an application of the notion of a signature we prove

4.6. THEOREM. *The ideal class of $\left(\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})\right)$ in the narrow sense, i.e. modulo the totally positive principal ideals is a square if the signature of $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$ coincides with the signature of some unit in $\mathsf{K}^\times$.*

PROOF. Let $\mathfrak{m}^2\alpha$ be a representative idèle of $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$, $\alpha\in P_\mathsf{K}$. The signature of $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$ is the signature of α; but (α) is a totally positive principal ideal if, and only if, the signature of α coincides with the signature of some unit in $\mathsf{K}^\times$.

HERBRAND (cf. [6]) proved the following theorem for metacyclic extensions and conjectured its validity in general.

[4]) For the rational case see [4], S. 371.

4.7. THEOREM. *The ideal* $(\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K}))$, $(\Lambda/\mathsf{K}$ *normal*$)$ *can be written in the form* $\mathfrak{a}^2(\alpha)$, $\alpha \in \mathsf{K}^\times$ *where*

(i) $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{b}}$, $\mathfrak{b}$ *the greatest divisor of* 4 *prime to* $(\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K}))$.

(ii) $\alpha_\mathfrak{p} > 0$ *for each real prime divisor* $\mathfrak{p}$, *except when* $\Lambda_\mathfrak{p}$ *is a direct sum of copies of the field of complex numbers and* $(\Lambda:\mathsf{K}) \equiv 2 \pmod 4$.

4.7 does in fact follow in complete generality by 2.6 and 4.5. (i) is also true when Λ/K is not normal, while in place of the congruence in (ii) we have $r_2 \equiv 1 \pmod 2$.

In conclusion we consider cubic fields over K. Such a field is either not normal or it is cyclic.

4.8. THEOREM. *A cubic field* Λ *is cyclic if, and only if,* $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K}) \in J_\mathsf{K}^2/U_\mathsf{K}^2$ (i.e. "$\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$ *is a square*").

PROOF. If Λ is cyclic then by 4.2 its discriminant field is K and so $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$ is a square.

Assume Λ not to be normal. Let $\bar{\Lambda}$ be the normal field of degree 6 containing Λ. All conjugacy classes in the Galois group of $\bar{\Lambda}/\mathsf{K}$ give values of the Frobenius symbols for some non ramified finite prime divisor $\mathfrak{p}$. We may thus choose $\mathfrak{p}$ so that $\Lambda_\mathfrak{p}$ is the direct sum of $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ and of a quadratic field $\Omega_\mathfrak{p}$. Hence $\mathfrak{d}(\Lambda_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p}) = \mathfrak{d}(\Omega_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p})$. But $\mathfrak{d}(\Omega_\mathfrak{p}/\mathsf{K}_\mathfrak{p})$ cannot be a square, and so $\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})$ is not a square.

References

[1] ARTIN, E.: Questions de la base minimale dans la théorie des nombres algébriques. Centre Nat. Rech. Sci. XXIV (Colloq. Int., Paris, 1949), 19–20. — [2] CHEVALLEY, C.: La theorie du corps de classes. Ann. Math. (2) **41**, 394–418 (1940). — [3] FRÖHLICH, A.: Ideals in an extension field as modules over the algebraic integers in a finite number field. Math. Z. **74**, 29–38 (1960). — [4] HASSE, H.: Zahlentheorie. Berlin 1949. — [5] HECKE, E.: Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig 1923 (New York 1948). — [6] HERBRAND, J.: Une propriété du discriminant des corps algébriques. Ann. École normale (3) **49**, 105–112 (1932). — [7] MANN, H.B.: On integral bases. Proc. Amer. Math. Soc. **9**, 167–172 (1958). — [8] SCHUR, I.: Elementarer Beweis eines Satzes von L. STICKELBERGER. Math. Z. **29**, 464–465 (1929). — [9] STICKELBERGER, L.: Über eine neue Eigenschaft der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper. Verh. I. Int. Math. Kongr. 1897, S. 182–193.

King's College, London W.C. 1 (England)

(Eingegangen am 15. September 1959)

FRÖHLICH, A.
Math. Zeitschr. 74, 29–38 (1960)

Ideals in an extension field as modules over the algebraic integers in a finite number field

By
ALBRECHT FRÖHLICH

In the preceding paper [4] the concept of an "absolute" discriminant of a finite algebraic extension Λ was extended from the rational field to an arbitrary finite number field K as base field. In the present [1]) note we shall discuss the structure of (fractional) ideals in Λ as modules over the ring $\mathfrak{o}$ of algebraic integers in K on the basis of the theory developed in [4].

With an ideal $\mathfrak{A}$ in the extension field Λ there will be associated three invariants. The *relative norm* $N_{\Lambda/\mathsf{K}}\mathfrak{A}$ is in the usual manner defined as an ideal in K. It is the "order" of the quotient module $\mathfrak{O}-\mathfrak{A}$ considered as an $\mathfrak{o}$-module whenever $\mathfrak{A}$ is integral; here $\mathfrak{O}$ is the ring of algebraic integers in Λ. This property and the multiplicative law $N_{\Lambda/\mathsf{K}}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})=N_{\Lambda/\mathsf{K}}(\mathfrak{A})\,N_{\Lambda/\mathsf{K}}(\mathfrak{B})$ characterise the relative norm uniquely.

A new invariant to be introduced here is the *discriminant* $\mathfrak{d}(\mathfrak{A})$ of $\mathfrak{A}$ in K, which is a generalisation of the discriminant of a basis of $\mathfrak{A}$ when K is the rational field. $\mathfrak{d}(\mathfrak{A})$ is a class of idèles modulo the unit idèle squares; if $\mathfrak{A}=\mathfrak{O}$, it is the discriminant of Λ/K defined in the earlier paper. We shall obtain the non-rational analogue to the rational formula $|N_{\Lambda/\mathsf{K}}\mathfrak{A}|=+\sqrt{(D(\mathfrak{A})/D)}$ for the absolute norm $|N_{\Lambda/\mathsf{K}}\mathfrak{A}|$, the absolute discriminant D and the discriminant $D(\mathfrak{A})$ of a basis of $\mathfrak{A}$. In particular it will follow that $\mathfrak{d}(\mathfrak{A})$ and $N_{\Lambda/\mathsf{K}}\mathfrak{A}$ determine each other uniquely (cf. 2.5).

The relative norm and the discriminant are arithmetical invariants depending on the properties of $\mathfrak{A}$ as an ideal in Λ. The structure of $\mathfrak{A}$ qua $\mathfrak{o}$-module is however, for given degree $(\Lambda:\mathsf{K})$, uniquely determined by a *module-invariant* $C(\mathfrak{A})$ which is an ideal class in K. Such an invariant can be defined for any finitely generated torsion free $\mathfrak{o}$-module, whether embedded as an ideal in some extension field Λ of K, or not; the definition of $C(\mathfrak{A})$ thus will not depend on the arithmetic in Λ. We shall however show that in the given situation the actual value of $C(\mathfrak{A})$ can be determined in terms of the relative norm and also in terms of the discriminant (cf. 2.3, 2.8). In particular we shall obtain a necessary and sufficient arithmetical criterion for $\mathfrak{A}$ to have a free $\mathfrak{o}$-basis (cf. 2.4); for $\mathfrak{A}=\mathfrak{O}$ this had been done already in [4]. The results obtained lead then to a formula for the number of ideal classes C in K which are module-invariants for ideals in a given field Λ (cf. 2.11). From this we shall deduce a new characterisation of the absolute class field (cf. 2.12).

[1]) As in [4] (see footnote 1) we restrict ourselves here to number fields, leaving the obvious generalisations to the reader.

The discussion of the invariants of ideals forms the contents of § 2. In § 1 the theory of finitely generated, torsion free modules over the ring $\mathfrak{o}$ of algebraic integers in K will be presented. The contents of § 1 is not essentially new; the subject has been dealt with in various forms by STEINITZ [8], SCHUR [7], KRULL [6], FRANZ [3], CHEVALLEY [2] and KAPLANSKY [5]. Our approach will differ in detail from that in the previous literature; it has been chosen with the application to the module theory of ideals in mind.

§ 1. Module Invariants

NOTATION. In any integral domain R, $R^\times$ is the semigroup of non zero elements. K is a finite algebraic number field, and $\mathfrak{o}$ is the domain of algebraic integers in K. $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ is the completion of K for a prime divisor $\mathfrak{p}$ in K; if $\mathfrak{p}$ is finite $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ is the ring of valuation integers in $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ and $U_\mathfrak{p}$ the group of units; if $\mathfrak{p}$ is infinite, $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}=\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ and $U_\mathfrak{p}=\mathsf{K}_\mathfrak{p}^\times$. J_K is the idèle group of K and U_K the group of unit idèles i.e. $U_\mathsf{K}=\prod U_\mathfrak{p}$; P_K is the group of principal idèles. Thus the ideal group can be identified with $J_\mathsf{K}/U_\mathsf{K}$ and the ideal class group with $J_\mathsf{K}/P_\mathsf{K}U_\mathsf{K}$.

We consider finitely generated, torsion free $\mathfrak{o}$-modules M, briefly referred to as "$\mathfrak{o}$-modules". For any such module the tensor product

$$V=M\otimes_\mathfrak{o}\mathsf{K} \tag{1.1}$$

is a K-space whose K-rank we denote by $(V:\mathsf{K})$. $(V:\mathsf{K})$ is finite. The $\mathfrak{o}$-rank $(M:\mathfrak{o})$ of M is then defined by

$$(M:\mathfrak{o})=(V:\mathsf{K}). \tag{1.2}$$

If M is a free $\mathfrak{o}$-module this definition agrees with that in terms of a free basis.

We shall identify $M=M\otimes_\mathfrak{o}\mathfrak{o}$ and consider M as embedded in V by means of the natural injection $\mathfrak{o}\to\mathsf{K}$. From the rank-properties of K-spaces we get formuli for the ranks of the direct sum $M_1\dotplus M_2$ and the tensor product $M_1\otimes_\mathfrak{o}M_2$ of two $\mathfrak{o}$-modules:

$$(M_1\dotplus M_2:\mathfrak{o})=(M_1:\mathfrak{o})+(M_2:\mathfrak{o}), \tag{1.3}$$

$$(M_1\otimes_\mathfrak{o}M_2:\mathfrak{o})=(M_1:\mathfrak{o})\,(M_2:\mathfrak{o}). \tag{1.4}$$

The rank is of course invariant under $\mathfrak{o}$-isomorphism. If $(M:\mathfrak{o})=0$ then M is the zero module; thus this rank equation determines M uniquely. If $(M:\mathfrak{o})=1$ we may assume $V=\mathsf{K}$. M is then an ideal in K in the sense of algebraic number theory. Two ideals $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}(\gamma)$, with $\gamma\in\mathsf{K}^\times$, are $\mathfrak{o}$-isomorphic under the mapping $\alpha\to\alpha\gamma$. Conversely an $\mathfrak{o}$-isomorphism $\mathfrak{a}\cong\mathfrak{b}$ of ideals can be extended uniquely to a K-endomorphism of K which is not null, and hence is of form $\varkappa\to\varkappa\gamma$, $\gamma\in\mathsf{K}^\times$. Thus $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}(\gamma)$. We have seen that

1.1. *Two ideals in* K *are* $\mathfrak{o}$*-isomorphic if, and only if, they lie in the same absolute ideal class.*

We shall now consider $\mathfrak{o}$-modules of fixed rank $n>0$ embedded in a K-space V of rank n. For every such module M and every prime divisor $\mathfrak{p}$ in K we put

$$M \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}. \tag{1.5}$$

Furthermore we write

$$V \otimes_{\mathsf{K}} \mathsf{K}_{\mathfrak{p}} = V_{\mathfrak{p}}. \tag{1.6}$$

The injection $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \to \mathsf{K}_{\mathfrak{p}}$ leads in view of the isomorphisms

$$V_{\mathfrak{p}} = (M \otimes_{\mathfrak{o}} \mathsf{K}) \otimes_{\mathsf{K}} \mathsf{K}_{\mathfrak{p}} \cong M \otimes_{\mathfrak{o}} (\mathsf{K} \otimes_{\mathsf{K}} \mathsf{K}_{\mathfrak{p}}) \cong M \otimes_{\mathfrak{o}} \mathsf{K}_{\mathfrak{p}}$$

to a natural embedding of $M_{\mathfrak{p}}$ in $V_{\mathfrak{p}}$. We have

$$(V_{\mathfrak{p}} : \mathsf{K}_{\mathfrak{p}}) = (V : \mathsf{K}) \tag{1.7}$$

and

$$(M_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}) = (M : \mathfrak{o}). \tag{1.8}$$

Let M, N be $\mathfrak{o}$-modules in V of rank n. Then $M_{\mathfrak{p}}$, $N_{\mathfrak{p}}$ are free $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$-modules of rank n and are thus $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$-isomorphic. Every $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$-isomorphism $\sigma_{\mathfrak{p}}: M_{\mathfrak{p}} \cong N_{\mathfrak{p}}$ can be extended in a unique manner to a $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}$-endomorphism $\bar{\sigma}_{\mathfrak{p}}: V_{\mathfrak{p}} \to V_{\mathfrak{p}}$; $\bar{\sigma}_{\mathfrak{p}}$ is a $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}$-automorphism. Hence its determinant $|\bar{\sigma}_{\mathfrak{p}}|$ is not zero. Moreover this determinant solely depends on M and N, apart from a unit factor. The class of $|\bar{\sigma}_{\mathfrak{p}}|$ in $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}/U_{\mathfrak{p}}$, i.e. the local ideal generated by $|\bar{\sigma}_{\mathfrak{p}}|$ is thus uniquely determined by the two modules, and will be denoted by $[M:N]_{\mathfrak{p}}$. From the definition we have

$$[M:M]_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}, \qquad [M:L]_{\mathfrak{p}} = [M:N]_{\mathfrak{p}} [N:L]_{\mathfrak{p}}. \tag{1.9}$$

Moreover if $M_{\mathfrak{p}} \supseteq N_{\mathfrak{p}}$ then $|\bar{\sigma}_{\mathfrak{p}}| \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{\times}$, and so

$$[M:N]_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \quad \text{if} \quad M_{\mathfrak{p}} \supseteq N_{\mathfrak{p}}. \tag{1.10}$$

M and N being finitely generated $\mathfrak{o}$-modules spanning the same K-space V there will exist non zero integers α, β in $\mathsf{K}^{\times}$ with $\alpha M \subseteq N$ and $\beta N \subseteq M$. By (1.10), (1.9),

$$(\alpha_{\mathfrak{p}}^{n})\ [N:M]_{\mathfrak{p}} = [N:M]_{\mathfrak{p}} [M:\alpha M]_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}},$$
$$(\beta_{\mathfrak{p}}^{n})\ [M:N]_{\mathfrak{p}} = [M:N]_{\mathfrak{p}} [N:\beta N]_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}.$$

By (1.9) it follows now from these relations that $[M:N]_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ whenever $\alpha_{\mathfrak{p}}$ and $\beta_{\mathfrak{p}}$ lie in $U_{\mathfrak{p}}$. This will be the case for almost all $\mathfrak{p}$. Hence the local ideals $[M:N]_{\mathfrak{p}}$ are the $\mathfrak{p}$-components of a unique ideal $[M:N]$ of K, i.e. of a unique element of $J_{\mathsf{K}}/U_{\mathsf{K}}$. (1.9) then leads to

$$[M:M] = \mathfrak{o}, \qquad [M:L] = [M:N] [N:L]. \tag{1.11}$$

If $M = \mathfrak{a}$, $N = \mathfrak{b}$ are two ideals in K then $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}$ are ideals in $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}$ and the $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}$-automorphism $\bar{\sigma}_{\mathfrak{p}}$ is of the form $x_{\mathfrak{p}} \to x_{\mathfrak{p}} \gamma_{\mathfrak{p}}$, $\gamma_{\mathfrak{p}} \in \mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$. Thus $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(\gamma_{\mathfrak{p}})$ and so $(\gamma_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-1}$. Therefore

$$[\mathfrak{a}:\mathfrak{b}] = \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{b}. \tag{1.12}$$

We now show, returning to the general case

1.2. *If M and N are $\mathfrak{o}$-isomorphic $\mathfrak{o}$-modules spanning the K-space V then $[M:N]$ is a principal ideal.*

In fact we can extend any $\mathfrak{o}$-isomorphism $\sigma: M \cong N$ in a unique manner to a K-endomorphism $\bar{\sigma}: V \to V$; $\bar{\sigma}$ is a K-automorphism. σ induces a unique $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-isomorphism $\sigma_\mathfrak{p}: M_\mathfrak{p} \cong N_\mathfrak{p}$ whose extension $\bar{\sigma}_\mathfrak{p}$ to $V_\mathfrak{p}$ is precisely the $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$-automorphism of $V_\mathfrak{p}$ induced by $\bar{\sigma}$. Hence $|\bar{\sigma}_\mathfrak{p}| = |\bar{\sigma}|_\mathfrak{p}$ and so $[M:N]_\mathfrak{p}$ is the $\mathfrak{p}$-component of the principal ideal $(|\bar{\sigma}|)$. Thus $[M:N] = (|\bar{\sigma}|)$.

By 1.2. and (1.11) we see that if M and N are $\mathfrak{o}$-isomorphic and if F and G are free $\mathfrak{o}$-modules spanning V then $[F:M]$ and $[G:N]$ lie in the same ideal class. Any K-basis of V will of course be a free set of $\mathfrak{o}$-generators of a free $\mathfrak{o}$-module F. The ideal-class of the ideals $[F:M]$ will then solely depend on M and will be denoted by $C(M)$. $C(M)$ is an invariant of the isomorphism class of M. In fact every $\mathfrak{o}$-isomorphism τ: $M \cong M'$ can be extended to a K-isomorphism $\bar{\tau}$: $M \otimes_\mathfrak{o} \mathsf{K} \cong M' \otimes_\mathfrak{o} \mathsf{K}$ and for every choice of the free $\mathfrak{o}$-module F in $M \otimes_\mathfrak{o} \mathsf{K}$, $\bar{\tau} F$ is a free $\mathfrak{o}$-module in $M' \otimes_\mathfrak{o} \mathsf{K}$, and $[F:M] = [\bar{\tau} F : M']$.

For $(M:\mathfrak{o}) = 0$ we define $C(M) = 1$.

1.3. THEOREM. (i) *If $\mathfrak{a}$ is an ideal in K then $C(\mathfrak{a})$ is the ideal class of $\mathfrak{a}$.*

(ii) $C(M_1 \dotplus M_2) = C(M_1)\, C(M_2)$.

(iii) $C(M_1 \otimes_\mathfrak{o} M_2) = C(M_1)^{(M_2:\mathfrak{o})}\, C(M_2)^{(M_1:\mathfrak{o})}$.

PROOF. (i) follows by (1.12), which gives $\mathfrak{a} = [\mathfrak{o}:\mathfrak{a}]$.

For (ii) we select free $\mathfrak{o}$-modules F_i of maximal rank in $M_i \otimes_\mathfrak{o} \mathsf{K}$. Identifying $(M_1 \dotplus M_2) \otimes_\mathfrak{o} \mathsf{K} = M_1 \otimes_\mathfrak{o} \mathsf{K} \dotplus M_2 \otimes_\mathfrak{o} \mathsf{K}$, we see that $F_1 \dotplus F_2$ is a free $\mathfrak{o}$-module of maximal rank in the direct sum of the K-spaces. The formula

$$[F_1 \dotplus F_2 : M_1 \dotplus M_2]_\mathfrak{p} = [F_1 : M_1]_\mathfrak{p} [F_2 : M_2]_\mathfrak{p}$$

leads to an analogous global formula and so to (ii). A similar argument will give (iii).

To derive another characterisation of $C(M)$ we show

1.4. *Every $\mathfrak{o}$-module M of rank $n > 0$ is $\mathfrak{o}$-isomorphic to a direct sum of $n-1$ copies of $\mathfrak{o}$ and of an ideal $\mathfrak{a}$.*

PROOF. We first prove by induction on n that M is $\mathfrak{o}$-isomorphic to a direct sum: $\mathfrak{a}_1 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{a}_n$ of ideals.

For $n = 1$ this, and in fact the whole of 1.4, is trivial. The step from $n-1$ to n is based on the observation that M contains a basis $v_1, \ldots, v_n$ of $M \otimes_\mathfrak{o} \mathsf{K}$. Hence every element $u \in M$ has a unique representation

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \qquad a_i \in \mathsf{K}.$$

The mapping ϑ: $u \to a_n$ is an $\mathfrak{o}$-homomorphism $M \to \mathsf{K}$, and $\operatorname{Im} \vartheta$ must be a finitely generated $\mathfrak{o}$-module in K. As $1 \in \operatorname{Im} \vartheta$, it cannot be of rank 0. Hence

Im $\vartheta = \mathfrak{a}_n$ is an ideal in K. $\mathfrak{a}_n$ is $\mathfrak{o}$-projective whence $M \cong \operatorname{Ker}\vartheta \dotplus \mathfrak{a}_n$. By (1.3) the $\mathfrak{o}$-rank of $\operatorname{Ker}\vartheta$ is $n-1$.

Consider now a direct sum $\mathfrak{a}_1 \dotplus \mathfrak{a}_2$ of two ideals. By 1.1 we may assume these to be integral and coprime. We can then find algebraic integers α_i, β_i, γ_i $(i=1, 2)$ such that $\mathfrak{a}_1 = (\alpha_1, \beta_1)$, $\mathfrak{a}_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ and $\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 = 1$. The mapping ψ: $[\delta_1, \delta_2] \to \gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2$ is an $\mathfrak{o}$-epimorphism $\mathfrak{a}_1 \dotplus \mathfrak{a}_2 \to \mathfrak{o}$. As $\mathfrak{o}$ is $\mathfrak{o}$-projective we get $\mathfrak{a}_1 \dotplus \mathfrak{a}_2 \cong \operatorname{Ker}\psi \dotplus \mathfrak{o}$. Here $\operatorname{Ker}\psi$ must be of $\mathfrak{o}$-rank 1, i.e. is an ideal. 1.4 now follows for $n>2$ trivially by induction and by the results already established.

For the ideal $\mathfrak{a}$ occurring in 1.4 we get by 1.3 (ii)

$$C(\mathfrak{a}) = C(M). \tag{1.13}$$

Thus the ideal class of $\mathfrak{a}$ is uniquely determined by M. Assume now that $(M:\mathfrak{o}) = (M':\mathfrak{o}) = n$ and that $C(M) = C(M')$. Then by 1.4 $M \cong F \dotplus \mathfrak{a}$, $M' \cong F' \dotplus \mathfrak{a}'$ where F, F' are free $\mathfrak{o}$-modules of rank $n-1$ and $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ are ideals. By (1.13) and 1.1 $\mathfrak{a} \cong \mathfrak{a}'$. Trivially $F \cong F'$. Hence $M \cong M'$.

We recapitulate the contents of the preceding discussion.

1.5. THEOREM. *The invariant $C(M)$ i.e. the ideal class of the ideals $[F:M]$ is also the unique ideal class of ideals $\mathfrak{a}$ occurring in a decomposition* 1.4 $(M \neq 0)$.

1.6. THEOREM. *Two finitely generated, torsion free $\mathfrak{o}$-modules M and N are $\mathfrak{o}$-isomorphic if, and only if,*

$$(M:\mathfrak{o}) = (N:\mathfrak{o}),$$

$$C(M) = C(N).$$

In conclusion recall that if $M = \mathfrak{o} \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{o} \dotplus \mathfrak{a}$, then $C(M) = C(\mathfrak{a})$. Thus

1.7. THEOREM. *For given $n>0$ and for a given ideal class C in K there exists an $\mathfrak{o}$-module M with*

$$(M:\mathfrak{o}) = n,$$

$$C(M) = C.$$

Both for the direct sum and for the tensor product we have found formuli expressing the $\mathfrak{o}$-rank and the invariant C in terms of the component modules [cf. (1.3), (1.4) and theorem 1.3]. For completeness sake similar expressions will be derived for the $\mathfrak{o}$-module $HOM_{\mathfrak{o}}(M, N)$ which is certainly torsion free, whenever N is torsion free.

Consider first of all ideals $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$. Every $\mathfrak{o}$-homomorphism ϑ: $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ can be extended in a unique manner to a K-endomorphism of K and is thus of the form $\alpha \to \alpha\gamma$, where $\gamma = \gamma_\vartheta$ is a number in K determined by ϑ. As $\alpha\gamma \in \mathfrak{b}$ for all $\alpha \in \mathfrak{a}$ we must have $\gamma \in \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$. The mapping $\vartheta \to \gamma_\vartheta$ is clearly a homomorphism, its kernel is the null mapping. Moreover $\alpha \to \alpha\gamma$ is a homomorphism $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ whenever $\gamma \in \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$. Thus the mapping $\vartheta \to \gamma_\vartheta$ is an isomorphism

$$HOM_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cong \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}. \tag{1.14}$$

If now M is the direct sum of ideals $\mathfrak{a}_i$, and N is the direct sum of ideals $\mathfrak{b}_j$ then $HOM_{\mathfrak{o}}(M, N)$ is isomorphic to the direct sum of the $\mathfrak{o}$-modules $HOM_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_j)$. By (1.14), it is finitely generated; more precisely we get

$$(1.15) \qquad \big(HOM_{\mathfrak{o}}(M, N):\mathfrak{o}\big) = (M:\mathfrak{o})\,(N:\mathfrak{o}).$$

Taking M, N in a decomposition 1.4 we obtain by (1.14)

1.8. THEOREM.

$$C\big(HOM_{\mathfrak{o}}(M, N)\big) = C(M)^{-(N:\mathfrak{o})}\, C(N)^{(M:\mathfrak{o})}.$$

§ 2. Ideals

In the present section we consider a finite algebraic extension Λ of K, whose domain of algebraic integers we denote by $\mathfrak{O}$. With every ideal $\mathfrak{A}$ in Λ there is associated as an "arithmetical" invariant the relative norm $N_{\Lambda/\mathsf{K}}\mathfrak{A}$, which is an ideal in K, i.e. an element of $J_{\mathsf{K}}/U_{\mathsf{K}}$. Moreover $\mathfrak{A}$ has in K the *module invariant* $C(\mathfrak{A})$, i.e. the absolute ideal class in K associated by § 1 with the $\mathfrak{o}$-module $\mathfrak{A}$. $C(\mathfrak{A})$ is thus an element of $J_{\mathsf{K}}/P_{\mathsf{K}}U_{\mathsf{K}}$. For the $\mathfrak{o}$-rank of $\mathfrak{A}$ we always have

$$(\mathfrak{A}:\mathfrak{o}) = (\Lambda:\mathsf{K}).$$

Hence $C(\mathfrak{A})$ determines $\mathfrak{A}$ uniquely to within $\mathfrak{o}$-isomorphism. For the ideals $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in Λ we have $C(\mathfrak{A}) = C(\mathfrak{B})$ if, and only if, there exists a K-automorphism of Λ considered as a K-space, which maps $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{B}$.

We shall now define a third invariant $\mathfrak{d}(\mathfrak{A})$ of $\mathfrak{A}$ in K, the *discriminant of* $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{d}(\mathfrak{A})$ is an element of $J_{\mathsf{K}}/U_{\mathsf{K}}^2$. We first note that for every prime divisor $\mathfrak{p}$ in K, $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ is a free $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$-module of $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$-rank $(\Lambda:\mathsf{K})$. The discriminant of a free $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$-basis of $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ is a non zero element of $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}$, uniquely determined mod $U_{\mathfrak{p}}^2$ by $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$. Denote by $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A})$ the class of such discriminants mod $U_{\mathfrak{p}}^2$. $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A})$ is thus an element of $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}/U_{\mathfrak{p}}^2$. For all but a finite number of finite prime divisors $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ and so $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{O})$. Here $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{O})$ coincides with the local discriminant $\mathfrak{d}(\Lambda_{\mathfrak{p}}/\mathsf{K}_{\mathfrak{p}})$ defined in [4]. Thus if $\mathfrak{p}$ is not a divisor of the ideal $\big(\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})\big)$, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{O})$ will lie in $U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^2$. We conclude that for all but a finite number of prime divisors $\mathfrak{p}$, we have $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A}) \in U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^2$. Hence there exists a unique element $\mathfrak{d}(\mathfrak{A})$ of $J_{\mathsf{K}}/U_{\mathsf{K}}^2$ whose $\mathfrak{p}$-components are the $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A})$. The ideal $\big(\mathfrak{d}(\mathfrak{A})\big)$ coincides with the discriminant of $\mathfrak{A}$ defined by ARTIN (cf. [1]). Here we have — as in [4] — considered $J_{\mathsf{K}}/U_{\mathsf{K}}^2$ as the subgroup of the cartesian product $\prod_{\mathfrak{p}} \mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}/U_{\mathfrak{p}}^2$ whose elements have their $\mathfrak{p}$-components in $U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^2$ almost everywhere.

We first note

2.1. $\mathfrak{d}(\mathfrak{A}) \in J_{\mathsf{K}}^2 P_{\mathsf{K}}/U_{\mathsf{K}}^2$ *and* $\mathfrak{d}(\mathfrak{A})\,\mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K})^{-1} \in J_{\mathsf{K}}^2/U_{\mathsf{K}}^2$.

PROOF. By [4] (cf. 2.2) it will suffice to establish the second relation in 2.1. For each $\mathfrak{p}$, an $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$-basis of $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ is at the same time a $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}$-basis of $\Lambda_{\mathfrak{p}}$. The discriminant of such a basis is determined by $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ modulo $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{\times 2}$. Hence if $\mathfrak{B}$ is another ideal in K, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A})\,\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{B})^{-1} \in \mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{\times 2}/U_{\mathfrak{p}}^2$, and so $\mathfrak{d}(\mathfrak{A})\,\mathfrak{d}(\mathfrak{B})^{-1} \in J_{\mathsf{K}}^2/U_{\mathsf{K}}^2$. This is in particular the case for $\mathfrak{B} = \mathfrak{O}$.

The endomorphism $\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}^2$ of the idèle group gives rise to homomorphisms

$$\tau: J_K/U_K \to J_K^2/U_K^2 \tag{2.1}$$

and

$$\sigma: J_K/P_K U_K \to J_K^2/P_K^2 U_K^2. \tag{2.2}$$

It is easily seen that σ and τ are isomorphisms.

As $J_K^2 \cap P_K U_K^2 = P_K^2 U_K^2$ we obtain a direct product representation

$$J_K^2 P_K/U_K^2 P_K^2 \cong J_K^2/U_K^2 P_K^2 \times U_K^2 P_K/U_K^2 P_K^2 \tag{2.3}$$

with associated epimorphisms

$$J_K^2 P_K/U_K^2 P_K^2 \to J_K^2/U_K^2 P_K^2,$$
$$J_K^2 P_K/U_K^2 P_K^2 \to U_K^2 P_K/U_K^2 P_K^2.$$

Composing each of these mappings with the epimorphism

$$J_K^2 P_K/U_K^2 \to J_K^2 P_K/U_K^2 P_K^2$$

we obtain epimorphisms

$$\lambda: J_K^2 P_K/U_K^2 \to J_K^2/U_K^2 P_K^2, \tag{2.4}$$

$$\mu: J_K^2 P_K/U_K^2 \to U_K^2 P_K/U_K^2 P_K^2. \tag{2.5}$$

By 2.1 $\mathfrak{d}(\mathfrak{A})\,\mathfrak{d}(\Lambda/K)^{-1}$ will fall into the first component of the decomposition (2.3) and so

2.2. $\mu(\mathfrak{d}(\mathfrak{A})) = \mu(\mathfrak{d}(\Lambda/K))$ *solely depends on* Λ.

To evaluate $\mu(\mathfrak{d}(\Lambda/K))$ we have only to choose some element $\delta \in K^\times$ which is the discriminant of a K-basis of Λ. As shown in [4] (cf. 2.2) the representatives of $\mathfrak{d}(\Lambda/K)$ in J_K are then of form $\delta\mathfrak{m}^2$. Thus $\mu(\mathfrak{d}(\Lambda/K))$ is the class of δ mod $U_K^2 P_K^2$. At the same time we see that

$$\lambda(\mathfrak{d}(\mathfrak{A})) = [\delta^{-1} U_K^2 \cdot \mathfrak{d}(\mathfrak{A})] \cdot P_K^2. \tag{2.6}$$

We can now determine the module invariant $C(\mathfrak{A})$ in terms of $\mathfrak{d}(\mathfrak{A})$.

2.3. THEOREM. $C(\mathfrak{A}) = \sigma^{-1}\lambda(\mathfrak{d}(\mathfrak{A}))$.

Theorem 2.5 in [4], which gave a necessary and sufficient criterion for the existence of a free $\mathfrak{o}$-basis of $\mathfrak{O}$, is a special case of 2.3. We have in fact by 2.3.

2.4. $\mathfrak{A}$ *has a free* $\mathfrak{o}$*-basis if, and only if* $\mathfrak{d}(\mathfrak{A}) \in U_K^2 P_K/U_K^2$.

The determination of $C(\mathfrak{A})$ by means of $\mathfrak{d}(\mathfrak{A})$ can of course also be expressed in purely ideal theoretic form. We consider the ideal $(\mathfrak{d}(\mathfrak{A}))$, i.e. the class of $\mathfrak{d}(\mathfrak{A})$ mod U_K; if $\mathfrak{A} = \mathfrak{O}$ this is the classical relative discriminant. By 2.1 the absloute ideal class of $(\mathfrak{d}(\mathfrak{A}))$ is the square of a class C_1. This of course will not yet determine C_1 uniquely; each such class contains ideals $\mathfrak{b}$ such that $\mathfrak{b}^2(\alpha) = (\mathfrak{d}(\mathfrak{A}))$ for some $\alpha \in K^\times$. We obtain $C(\mathfrak{A})$ by taking α as the

discriminant of some K-basis of Λ. $(\mathfrak{d}(\mathfrak{A}))\,(\alpha)^{-1}$ will then be the square of an ideal $\mathfrak{b}$, whose class is $C(\mathfrak{A})$. In this ideal theoretic form ARTIN derived his criterion for the existence of a free $\mathfrak{o}$-basis of $\mathfrak{D}$ (cf. [1]).

PROOF OF 2.3. Let $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ be a K-basis of Λ with discriminant α and let $\mathfrak{B}$ be the free $\mathfrak{o}$-module generated by this basis. Then

$$C(\mathfrak{A}) = [\mathfrak{B}:\mathfrak{A}] \cdot U_{\mathsf{K}} P_{\mathsf{K}},$$

and so

$$\sigma\big(C(\mathfrak{A})\big) = \tau([\mathfrak{B}:\mathfrak{A}]) \cdot U_{\mathsf{K}}^2 P_{\mathsf{K}}^2. \tag{2.7}$$

Let $\mathfrak{m}$ be a representative of $\mathfrak{d}(\mathfrak{A})$ in J_{K}. For each prime divisor $\mathfrak{p}$ there exists an $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$-basis $\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(n)}$ of $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ with discriminant $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$. Moreover there will exist a non singular matrix $A_{\mathfrak{p}} = (a_{ij})$ with elements in $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}$ such that

$$\beta^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_{\mathfrak{p}}^{(j)} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Hence

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} = |A_{\mathfrak{p}}|^2 \alpha_{\mathfrak{p}}. \tag{2.8}$$

The idèle $\mathfrak{n}$ with $\mathfrak{p}$-components $|A_{\mathfrak{p}}|$ is then a representative in J_{K} of $[\mathfrak{B}:\mathfrak{A}]$. Hence $\mathfrak{n}^2$ is a representative of $\tau([\mathfrak{B}:\mathfrak{A}])$, and so

$$\tau([\mathfrak{B}:\mathfrak{A}]) = \mathfrak{n}^2 U_{\mathsf{K}}^2. \tag{2.9}$$

But we have by (2.8) $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^2 \alpha$ and so $\mathfrak{d}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{n}^2 U_{\mathsf{K}}^2 \cdot \alpha\, U_{\mathsf{K}}^2$. Therefore

$$\lambda\big(\mathfrak{d}(\mathfrak{A})\big) = \mathfrak{n}^2 U_{\mathsf{K}}^2 P_{\mathsf{K}}^2. \tag{2.10}$$

By (2.7), (2.9) and (2.10) the theorem now follows

2.5. THEOREM.

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{d}(\Lambda/\mathsf{K}) \cdot \tau(N_{\Lambda/\mathsf{K}}\mathfrak{A}).$$

This theorem is seen to determine $\mathfrak{d}(\mathfrak{A})$ in terms of the ideal $N_{\Lambda/\mathsf{K}}\mathfrak{A}$. As τ is an isomorphism it also determines $N_{\Lambda/\mathsf{K}}\mathfrak{A}$ in terms of $\mathfrak{d}(\mathfrak{A})$ in analogy to the classical formula for absolute norms. 2.5 — in ideal theoretic form — is due to ARTIN (cf. [1]).

PROOF OF 2.5. Let $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ be representatives in J_{K} of $\mathfrak{d}(\mathfrak{A})$ and of $\mathfrak{d}(\mathfrak{O})$ respectively. For each prime divisor $\mathfrak{p}$ there exists a basis $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ of $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ with discriminant $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ and a basis $\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(n)}$ of $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ with discriminant $\mathfrak{n}_{\mathfrak{p}}$. Moreover we obtain a non singular matrix $A_{\mathfrak{p}} = (a_{ij})$ with elements in $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}$ such that

$$\alpha^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \beta^{(j)} \qquad (i = 1 \ldots, n),$$

so that we get

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} = |A_{\mathfrak{p}}|^2 \mathfrak{n}_{\mathfrak{p}}.$$

Let $\mathfrak{r}$ be the idèle with $\mathfrak{p}$-components $|A_\mathfrak{p}|$. Then

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{r}^2 \mathfrak{n}. \tag{2.11}$$

On the other hand $\mathfrak{r}_\mathfrak{p}$ generates the local ideal $N_{\Lambda_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}} \mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ and so $\mathfrak{r} U_K = N_{\Lambda/K} \mathfrak{A}$. Hence

$$\mathfrak{r}^2 U_K^2 = \tau(N_{\Lambda/K} \mathfrak{A}).$$

Comparison with (2.11) gives the theorem.

As the norm is multiplicative we get by 2.5.

2.6. $\mathfrak{d}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{d}(\Lambda/K) = \mathfrak{d}(\mathfrak{A})\,\mathfrak{d}(\mathfrak{B})$.

From this equation and from 2.3 we have

2.7. THEOREM.

$$C(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,C(\mathfrak{D}) = C(\mathfrak{A})\,C(\mathfrak{B}).$$

Next we derive a relation between the module invariant $C(\mathfrak{A})$ and the relative norm $N_{\Lambda/K}\mathfrak{A}$. Recall that $C(N_{\Lambda/K}\mathfrak{A})$ is the absolute ideal class of $N_{\Lambda/K}\mathfrak{A}$.

2.8. THEOREM [2]).

$$C(\mathfrak{A}) = C(\mathfrak{D})\,C(N_{\Lambda/K}\mathfrak{A}).$$

PROOF. By 2.3, 2.5,

$$\sigma\big(C(\mathfrak{A})\big) = \sigma\big(C(\mathfrak{D})\big)\,\lambda\,\tau(N_{\Lambda/K}\mathfrak{A}).$$

As $\tau(N_{\Lambda/K}\mathfrak{A})$ lies in J_K^2/U_K^2 we see that $\lambda\tau(N_{\Lambda/K}\mathfrak{A})$ is simply the class of $\tau(N_{\Lambda/K}\mathfrak{A})$ modulo $U_K^2 P_K^2$, and so coincides with $\sigma\big(C(N_{\Lambda/K}\mathfrak{A})\big)$.

We note a number of Corollaries of 2.8.

2.9. *If $\mathfrak{D}$ has a free $\mathfrak{o}$-basis then*

$$C(\mathfrak{A}) = C(N_{\Lambda/K}\mathfrak{A}).$$

2.10. *A necessary and sufficient condition for the existence of an ideal $\mathfrak{A}$ in Λ which has a free $\mathfrak{o}$-basis is that the ideal class $C(\mathfrak{D})$ should contain an ideal norm of Λ.*

Finally we note that the classes $C(\mathfrak{A})$ will by 2.8 lie in a fixed coset of the absolute class group modulo the subgroup of classes containing ideal norms. We thus obtain an interesting relation between the $\mathfrak{o}$-module types possible in Λ and the intersection of Λ with the absolute class field of K.

2.11. THEOREM. *Let $\overline{K}$ be the absolute class field of K and h_K the absolute class number. The number of non $\mathfrak{o}$-isomorphic ideals in a finite extension Λ of K is then $h_K/(\Lambda\cap\overline{K}:K)$. In particular all $\mathfrak{o}$-isomorphism classes of $\mathfrak{o}$-modules of rank $(\Lambda:K)$ are represented by ideals in Λ, if and only if $\Lambda\cap\overline{K}=K$. All ideals in Λ are $\mathfrak{o}$-isomorphic if and only if $\Lambda \supseteq \overline{K}$.*

[2]) This theorem is closely related to Theorem 10 in [2].

2.11 leads to a module theoretic characterisation of $\overline{K}$:

2.12. *The absolute class field* $\overline{K}$ *of* K *is the unique minimal extension of* K *with the property that all ideals are* o*-isomorphic.*

References

[1] ARTIN, E.: Questions de la base minimale dans la théorie des nombres algébriques. Centre Nat. Rech. Sci. XXIV (Colloq. Int., Paris, 1949), 19–20. — [2] CHEVALLEY, C.: L'Arithmétique dans les Algèbres de Matrices. Actualités scient. et. industr. 323 (1936). — [3] FRANZ, W.: Elementarteilertheorie in algebraischen Zahlkörpern. J. reine angew. Math. **171**, 149–161 (1934). — [4] FRÖHLICH, A.: Discriminants of algebraic number fields. Math. Z. **74**, 18–28 (1960). — [5] KAPLANSKY, I.: Modules over Dedekind Rings and Valuation Rings. Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 327–340 (1952). — [6] KRULL, W.: Matrizen, Moduln und verallgemeinerte Abelsche Gruppen im Bereich der ganzen algebraischen Zahlen. Sitzungsber. Heidelberg. Akad. Wiss., Math.-nat. Kl. **1932**, 13–38. — [7] SCHUR, I.: Über Gruppen linearer Substitutionen mit Koeffizienten aus einem algebraischen Zahlenkörper. Math. Ann. **71**, 354–367 (1911). — [8] STEINITZ, E.: Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern. I, II. Math. Ann. **71**, 328–353; **72**, 297–345 (1911).

King's College, London W.C. 2 (England)

(Eingegangen am 15. September 1959)

MENZEL, W.
Math. Zeitschr. 74, 39–51 (1960)

Über den Untergruppenverband einer Abelschen Operatorgruppe Teil I: m-Verbände

Von

WOLFRAM MENZEL

Einleitung

Die endlichen distributiven Verbände lassen sich bekanntlich kennzeichnen als die Teilverbände der Potenzmengen geeigneter endlicher Mengen (vgl. HERMES [7], § 20). RANEY [8], BALACHANDRAN [2], BRUNS [5] gaben verbandstheoretische Charakterisierungen solcher Verbände, welche verbandsisomorph einem vollständigen Teilverbande der Potenzmenge einer (beliebigen) Menge sind. So lautet der Darstellungssatz von RANEY und BALACHANDRAN: *Genau dann ist der vollständige Verband L einem vollständigen Teilverbande einer Potenzmenge isomorph, wenn jedes Element von L Verbindung perfekter Elemente ist.* (Wie in 1.3 heiße ein Element $p \in L$ *perfekt*, wenn für jede Teilmenge X von L aus $p < \bigvee_{x \in X} x$ folgt $p < x$ für ein $x \in X$.) Auch die vorliegende Arbeit behandelt Verbände mit dieser Eigenschaft; wir nennen sie m-Verbände.

Bekanntlich läßt sich aus der Gültigkeit – auch beliebig allgemeiner – Distributivitätsgesetze allein noch nicht die m-Eigenschaft folgern (vgl. RANEY [8], S. 680). Um diese zu erhalten, hat man vielmehr auch die Endlichkeit des Verbandes in geeigneter Weise zu verallgemeinern: Nennt man ein Element eines Verbandes *voll $\smile$-irreduzibel*, wenn es nicht als Verbindung echt früherer dargestellt werden kann, so sei jedes Verbandselement Verbindung von voll $\smile$-irreduziblen Elementen. Verbände mit dieser Eigenschaft bezeichnen wir als *glatt*. Es ergibt sich nun (als Verallgemeinerung des eingangs erwähnten Satzes über endliche distributive Verbände): Ein vollständiger Verband ist genau dann m-Verband, wenn er glatt ist und dem einen unendlich-distributiven Gesetz $(D^* 1)$ (s. 1.1) genügt (Satz 1, 3.6). Bis auf Verbandsisomorphie ist er dann völlig charakterisiert durch die Halbordnung seiner voll $\smile$-irreduziblen Elemente. Umgekehrt gibt es zu beliebig vorgegebener Halbordnung H stets einen und (bis auf Verbandsisomorphie) nur einen m-Verband, dessen voll $\smile$-irreduzible Elemente eine Halbordnung isomorph zu H bilden. Es besteht so eine eineindeutige reziproke Beziehung zwischen den Klassen verbandsisomorpher m-Verbände und halbordnungsisomorpher Halbordnungen (Satz 2, 3.7). Diese bewirkt, daß sich Kettenbedingungen für die Halbordnung in solchen für den Verband spiegeln (Satz 3, 5.2).

2.11 leads to a module theoretic characterisation of $\overline{K}$:

2.12. *The absolute class field* $\overline{K}$ *of* K *is the unique minimal extension of* K *with the property that all ideals are* $\mathfrak{o}$*-isomorphic.*

References

[1] ARTIN, E.: Questions de la base minimale dans la théorie des nombres algébriques. Centre Nat. Rech. Sci. XXIV (Colloq. Int., Paris, 1949), 19–20. — [2] CHEVALLEY, C.: L'Arithmétique dans les Algèbres de Matrices. Actualités scient. et. industr. 323 (1936). — [3] FRANZ, W.: Elementarteilertheorie in algebraischen Zahlkörpern. J. reine angew. Math. **171**, 149–161 (1934). — [4] FRÖHLICH, A.: Discriminants of algebraic number fields. Math. Z. **74**, 18–28 (1960). — [5] KAPLANSKY, I.: Modules over Dedekind Rings and Valuation Rings. Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 327–340 (1952). — [6] KRULL, W.: Matrizen, Moduln und verallgemeinerte Abelsche Gruppen im Bereich der ganzen algebraischen Zahlen. Sitzungsber. Heidelberg. Akad. Wiss., Math.-nat. Kl. **1932**, 13–38. — [7] SCHUR, I.: Über Gruppen linearer Substitutionen mit Koeffizienten aus einem algebraischen Zahlenkörper. Math. Ann. **71**, 354–367 (1911). — [8] STEINITZ, E.: Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern. I, II. Math. Ann. **71**, 328–353; **72**, 297–345 (1911).

King's College, London W.C. 2 (England)

(Eingegangen am 15. September 1959)

MENZEL, W.
Math. Zeitschr. 74, 39–51 (1960)

Über den Untergruppenverband einer Abelschen Operatorgruppe Teil I: m-Verbände

Von

WOLFRAM MENZEL

Einleitung

Die endlichen distributiven Verbände lassen sich bekanntlich kennzeichnen als die Teilverbände der Potenzmengen geeigneter endlicher Mengen (vgl. HERMES [7], § 20). RANEY [8], BALACHANDRAN [2], BRUNS [5] gaben verbandstheoretische Charakterisierungen solcher Verbände, welche verbandsisomorph einem vollständigen Teilverbande der Potenzmenge einer (beliebigen) Menge sind. So lautet der Darstellungssatz von RANEY und BALACHANDRAN: *Genau dann ist der vollständige Verband L einem vollständigen Teilverbande einer Potenzmenge isomorph, wenn jedes Element von L Verbindung perfekter Elemente ist.* (Wie in 1.3 heiße ein Element $p \in L$ *perfekt*, wenn für jede Teilmenge X von L aus $p < \bigvee_{x \in X} x$ folgt $p < x$ für ein $x \in X$.) Auch die vorliegende Arbeit behandelt Verbände mit dieser Eigenschaft; wir nennen sie m-Verbände.

Bekanntlich läßt sich aus der Gültigkeit — auch beliebig allgemeiner — Distributivitätsgesetze allein noch nicht die m-Eigenschaft folgern (vgl. RANEY [8], S. 680). Um diese zu erhalten, hat man vielmehr auch die Endlichkeit des Verbandes in geeigneter Weise zu verallgemeinern: Nennt man ein Element eines Verbandes *voll $\smile$-irreduzibel*, wenn es nicht als Verbindung echt früherer dargestellt werden kann, so sei jedes Verbandselement Verbindung von voll $\smile$-irreduziblen Elementen. Verbände mit dieser Eigenschaft bezeichnen wir als *glatt*. Es ergibt sich nun (als Verallgemeinerung des eingangs erwähnten Satzes über endliche distributive Verbände): Ein vollständiger Verband ist genau dann m-Verband, wenn er glatt ist und dem einen unendlich-distributiven Gesetz $(D^* 1)$ (s. 1.1) genügt (Satz 1, 3.6). Bis auf Verbandsisomorphie ist er dann völlig charakterisiert durch die Halbordnung seiner voll $\smile$-irreduziblen Elemente. Umgekehrt gibt es zu beliebig vorgegebener Halbordnung H stets einen und (bis auf Verbandsisomorphie) nur einen m-Verband, dessen voll $\smile$-irreduzible Elemente eine Halbordnung isomorph zu H bilden. Es besteht so eine eineindeutige reziproke Beziehung zwischen den Klassen verbandsisomorpher m-Verbände und halbordnungsisomorpher Halbordnungen (Satz 2, 3.7). Diese bewirkt, daß sich Kettenbedingungen für die Halbordnung in solchen für den Verband spiegeln (Satz 3, 5.2).

§ 1. Voll $\cup$-irreduzible und perfekte Elemente eines Verbandes

1.1. In einer Halbordnung H mit Elementen $x, y, \ldots$ bezeichnen wir in der üblichen Weise die Halbordnungsrelation mit „$\subset$" („früher"). Für $y \subset x$, $y \neq x$ schreiben wir $y \subset' x$. Ist ferner y „unterer Nachbar" von x ($y \subset' x$, und $y \subset' z \subset x$ impliziert $z = x$), so werde dies durch „$y \prec x$" kenntlich gemacht.

Zur Unterscheidung von der „allgemeinen" Halbordnungsrelation „$\subset$" drücken wir das (mengentheoretische) Enthaltensein einer Menge Y in einer anderen X durch $Y \subset_m X$ aus. Echtes Enthaltensein ist durch $\subset'_m$ gekennzeichnet.

Sei A ein Verband. Wie üblich bezeichnen wir die Verbandsoperationen mit $\cap$ und $\cup$. Jeder vollständige Verband besitzt ein „Nullelement" 0 und ein „Eins- (All-) Element", das wir mit 1 bezeichnen wollen.

Wir gebrauchen zur Abkürzung die folgende Komplexschreibweise für Schnitte und Verbindungen in einem vollständigen Verbande A: Ist X eine Teilmenge von A, y ein Element von A so sei,

$$\wedge X = \bigwedge_{x \in X} x, \qquad X \cap y = \{x \cap y;\ x \in X\}$$

und entsprechend für Verbindungen; ist ferner $\mathfrak{X}$ eine Menge von Teilmengen von A, so sei

$$\wedge\wedge \mathfrak{X} = \bigwedge_{X \in \mathfrak{X}} (\wedge X), \quad \text{analog } \wedge\vee \mathfrak{X},\ \vee\wedge \mathfrak{X},\ \vee\vee \mathfrak{X}.$$

Bezeichnet man zu einer Menge $\mathfrak{X}$ von Mengen mit $\Phi(\mathfrak{X})$ die Menge aller Funktionen auf $\mathfrak{X}$, die jedem $X \in \mathfrak{X}$ ein Element $x \in X$ zuordnen, bezeichnet man ferner durch $\breve{\varphi}$ den Wertevorrat einer Funktion $\varphi \in \Phi(\mathfrak{X})$, so sei $\breve{\mathfrak{X}} = \{\breve{\varphi};\ \varphi \in \Phi(\mathfrak{X})\}$.

Entsprechend der Bezeichnung $\subset_m$ für mengentheoretisches Enthaltensein drücken wir mengentheoretische Durchschnitts- bzw. Vereinigungsbildung durch $\cap_m$, $\cup_m$ aus. Das Zeichen für die mengentheoretische Differenz sei $\div$. Ist m eine Menge, so wollen wir die „Potenzmenge" von m — die Menge aller Teilmengen der Menge m — stets $\mathfrak{P}(m)$ nennen.

Die Halbordnungsrelation in einem Verbande induziert eine Halbordnungsrelation in jeder seiner Teilmengen. Eine Teilmenge eines Verbandes A heißt *Unterverband von* A, wenn sie bezüglich der in ihr induzierten Halbordnungsrelation einen Verband bildet. Der Unterverband B des vollständigen Verbandes A heißt *vollständiger Teilverband* von A, wenn B ein vollständiger Verband ist, und der in B gebildete Schnitt bzw. die in B gebildete Verbindung einer Menge von Elementen aus B gleich ihrem in A gebildeten Schnitt bzw. ihrer in A gebildeten Verbindung ist. Der Unterverband B von A ist genau dann vollständiger Teilverband von A, wenn für beliebiges $X \subset_m B$ der in A gebildete Schnitt $\wedge X$ und die in A gebildete Verbindung $\vee X$ in B liegen (vgl. HERMES [7], § 6). Bekanntlich nennt man einen Verband A *distributiv*, wenn er das Gesetz

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$$

für beliebige $x, y, z \in A$ erfüllt. Darüber hinaus gibt es die Gesetze „beliebiger" Distributivität:

Der vollständige Verband A heiße (D^* 1)- bzw. (D^* 2)-*Verband*, wenn für Elemente $a \in A$ und Teilmengen B von A stets gilt

$$(D^*\,1) \quad a \cap \bigvee B = \bigvee (a \cap B)$$

bzw.

$$(D^*\,2) \quad a \cup \bigwedge B = \bigwedge (a \cup B).$$

Erfüllt A für beliebige Mengen $\mathfrak{A} \subset_m \mathfrak{P}(A)$ von Teilmengen X von A uneingeschränkt die Gesetze

$$\bigwedge \bigvee \mathfrak{A} = \bigvee \bigwedge \breve{\mathfrak{A}}$$

$$\bigvee \bigwedge \mathfrak{A} = \bigwedge \bigvee \breve{\mathfrak{A}},$$

so heißt A *voll distributiv*.

Der Verband $\mathfrak{P}(m)$ aller Teilmengen einer Menge m ist voll distributiv, und ebenso ist es jeder vollständige Teilverband von $\mathfrak{P}(m)$ (s. HERMES [7], S. 132, 133).

Ein endlicher distributiver Verband ist durch die Halbordnung der in ihm „irreduziblen" Elemente bestimmt (BIRKHOFF [3], IX, § 4). Wir definieren demgemäß für Verbände ohne Endlichkeitsbedingungen:

1.2. DEFINITION. Ein Element i des Verbandes A heißt *voll $\cup$-irreduzibel* (v. i.) *in* A, wenn für jede Menge $X \subset_m A$ gilt: Aus $i = \bigvee X$ folgt $i \in X$.

Die voll $\cup$-irreduziblen Elemente von A bilden eine Halbordnung $H \subset_m A$.

(Bekanntlich heißt ein Element j $\cup$-irreduzibel, wenn aus $j = x \cup y$ folgt $j = x$ oder $j = y$).

Daß nicht jedes $\cup$-irreduzible Element auch v. i. ist, zeigt folgendes Beispiel:

A sei die Menge der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... mit der Definition: Es sei dann und nur dann $b < a$, wenn es ein $q \in A$ mit $a = bq$ gibt. Dann ist 0 das Allelement in A und $0 = \bigvee_{k=1}^{\infty} k$ nicht v. i. 0 ist irreduzibel, denn aus

$$0 = x \cup y = \text{k.g.V.}[x, y] \quad \text{folgt} \quad 0 = x \quad \text{oder} \quad 0 = y.$$

Ist A distributiv und i ein irreduzibles Element in A, so folgt für jede *endliche* Teilmenge X von A:

Wenn $i < \bigvee X$, so $i < x$ für ein $x \in X$. Dies legt die folgende Definition nahe, welche in engem Zusammenhange mit der Einbettbarkeit eines Verbandes in eine Potenzmenge steht:

1.3. DEFINITION. Ein Element $p \in A$ heißt *perfekt*, wenn für alle $X \subset_m A$ aus $p < \bigvee X$ folgt, daß $p < x$ für ein $x \in X$ gilt.

Es ist klar, daß jedes perfekte Element v. i. ist.

1.4. *In einem (D^* 1)-Verbande bedeuten Perfektheit und volle Irreduzibilität dasselbe.*

BEWEIS. Sei i ein Element der Halbordnung H aller v. i. Elemente von A; sei ferner $i < \bigvee X$ für ein $X \subset_m A$. Dann gilt: Aus $i < \bigvee X$ folgt $i = i \cap \bigvee X$,

und weiter $i = \bigvee(i \cap X)$ nach $(D^* 1)$, $i \in i \cap X$ wegen $i \in H$, also $i < x$ für ein $x \in X$.

Insbesondere bedeuten in einem vollständigen Teilverbande einer Potenzmenge Perfektheit und volle Irreduzibilität dasselbe.

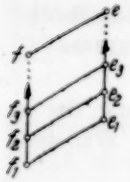
Wir sagen entsprechend dem von WIELANDT in [9] für Gruppen eingeführten Ausdruck

1.5. DEFINITION. Ein Element eines Verbandes A heißt *einköpfig*, wenn es genau einen unteren Nachbar besitzt.

Aus der Definition der vollen Irreduzibilität folgt dann sofort

1.6. *Jedes $i \in H$ ist einköpfig mit dem unteren Nachbarn i', der Verbindung aller $x \in A$ mit $x <' i$.*

Im allgemeinen braucht nicht jedes einköpfige Element voll irreduzibel zu sein, was etwa an einem Verbande der folgenden Gestalt deutlich wird:



(Die e_i, $i = 1, 2, \ldots$ bilden eine unendliche aufsteigende Kette mit der Verbindung e; f ist einziger unterer Nachbar von e.)

Jedoch gilt:

1.7. *In einem $\downarrow$-atomaren Verbande ist jedes einköpfige Element v. i.*

Dabei heißt nach BIRKHOFF [1], S. 38, ein Verband A $\uparrow$- bzw. $\downarrow$-atomar, wenn sich je zwei Elemente $a, b \in A$ mit $b <' a$ durch eine maximale, aufsteigend bzw. absteigend wohlgeordnete Kette verbinden lassen. Es ist klar, daß $\downarrow$-Atomarität äquivalent der Eigenschaft ist: „Zu $a, b \in A$ mit $b <' a$ gibt es stets untere Nachbarn von a über b", und eine entsprechende Aussage gilt für $\uparrow$-Atomarität. Für die genannten Eigenschaften eines Verbandes sind auch die Bezeichnungen „schwache Minimalbedingung" bzw. „schwache Maximalbedingung" üblich.

BEWEIS zu 1.7. Sei e einköpfig mit dem einzigen unteren Nachbarn $f < e$. Wäre $e \notin H$, so müßte es ein $u \in A$ geben mit $u <' e$, $u \not\subset f$. Aus der $\downarrow$-Atomarität folgt die Existenz eines $v \in A$ mit $u < v < e$. Man hätte $v \not\subset f$, also einen zweiten unteren Nachbarn von e.

§ 2. Bänder in einer Halbordnung

Sei jetzt H eine beliebige Halbordnung.

2.1. DEFINITION. Eine Teilmenge B von H ist ein *Band in H*, wenn für beliebige $x \in B$ und $y \in H$ gilt: Aus $y < x$ folgt $y \in B$.

2.2. *Die Menge $\mathfrak{B}(H)$ der Bänder einer Halbordnung H ist ein vollständiger Verband bei mengentheoretischer Schnitt- und Verbindungsbildung, somit vollständiger Teilverband der Potenzmenge $\mathfrak{P}(H)$.*

2.3. *Die in $\mathfrak{B}(H)$ voll irreduziblen Elemente sind die „Hauptbänder" $\tilde{i} = \{k;\ k \in H,\ k < i$ für (festes) $i \in H\}$. Sie bilden eine Halbordnung isomorph zu H.*

BEWEIS zu 2.2. Zu zeigen ist, daß für jede Menge $\mathfrak{C} \subset_m \mathfrak{B}$ von Bändern die Mengen $\bigwedge_{C \in \mathfrak{C}}^m C$, $\bigvee_{C \in \mathfrak{C}}^m C$ Bänder sind. In der Tat gilt für beliebiges $y \in H$:

Aus $x \in \bigwedge_{C \in \mathfrak{C}}^{m} C$ und $y < x$ folgt $x \in C$ für alle $C \in \mathfrak{C}$ und $y < x$, also $y \in C$ für alle $C \in \mathfrak{C}$ (da $\mathfrak{C} <_m \mathfrak{B}$); also $y \in \bigwedge_{C \in \mathfrak{C}}^{m} C$.

Aus $x \in \bigvee_{C \in \mathfrak{C}}^{m} C$ und $y < x$ folgt die Existenz eines $C_0 \in \mathfrak{C}$ mit $x \in C_0$, also $y < C_0$ (da $C_0 \in \mathfrak{B}$), also $y \in \bigvee_{C \in \mathfrak{C}} C$.

Beweis zu 2.3. Jedes „Hauptband" ist voll irreduzibel, denn ist $\tilde{i}$ eine Vereinigung von Bändern, $\tilde{i} = \bigvee_m X$, $(X \in \mathfrak{X} <_m \mathfrak{B})$, so $i \in X$ für ein $X \in \mathfrak{X}$, also $\tilde{i} <_m X$, da X Band, mithin $\tilde{i} = X$. Ist umgekehrt B nicht Hauptband, so gilt $\tilde{i} <'_m B$ für alle $i \in B$. Da aber andererseits $B = \bigvee_{i \in B}^{m} i$ ist, folgt: B ist nicht v. i. in $\mathfrak{B}$.

Die Äquivalenz von $k < i$ und $\tilde{k} <_m \tilde{i}$ ist klar: Die Hauptbänder bilden eine Halbordnung isomorph zu H.

§ 3. Glatte Verbände, m-Verbände

3.1. Sei A ein Verband, H die Halbordnung der v. i. Elemente in A. Jedem $a \in A$ läßt sich in eindeutiger Weise die Menge

$$\tilde{a} = \{i;\ i \in H,\ i < a\}$$

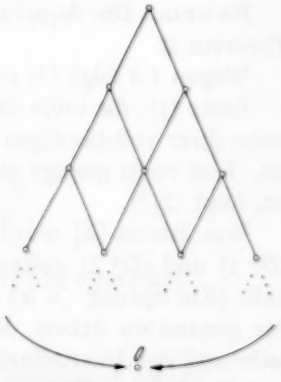
zuordnen.

Man sieht sofort, daß $\tilde{a}$ ein Band in H ist.

3.2. Definition. Der Verband A heißt *glatt*, wenn er vollständig ist und jedes seiner Elemente Verbindung voll irreduzibler ist.

Es ist klar, daß A genau dann glatt ist, wenn für alle $a \in A$ gilt $\bigvee \tilde{a} = a$.

Beispiel für einen nicht leeren vollständigen Verband ohne v. i. Elemente — einen Verband also, der sicherlich nicht glatt ist — ist etwa der in nebenstehendem Schema dargestellte Verband.



(Es ist klar, wie der Verband, vom Allelement ausgehend, zu konstruieren ist. Er werde in der durch Punkte angedeuteten Weise nach „unten" unendlich weit fortgesetzt und schließlich 0 als Schnitt aller Verbandselemente dazu erklärt.) Der Verband ist sogar distributiv.

3.3. *Jeder vollständige Verband A mit Minimalbedingung ist glatt.*

Beweis. A sei nicht glatt, die Menge $N <_m A$ der nicht als Verbindung von v. i. Elementen darstellbaren Elemente aus A also nicht leer. Gäbe es ein minimales Element n in N, so wäre dieses jedenfalls nicht v. i. Also gälte (für eine Teilmenge X von A)

$$n = \bigvee X, \quad x <' n \quad \text{für alle} \quad x \in X.$$

Aus der Minimalität von n aber folgte dann

$$x = \vee Y_x, \quad Y_x \subset_m H \quad \text{für alle} \quad x \in X,$$

und hieraus die Darstellbarkeit von $n = \vee X$.

Wir hätten somit $n \notin N$ entgegen der Annahme.

N kann also kein minimales Element enthalten, und dies widerspricht wegen $N \neq \emptyset$ der Minimalbedingung.

In den weiteren Untersuchungen werden vornehmlich Verbände eine Rolle spielen, die verbandsisomorph einem vollständigen Teilverband einer Potenzmenge $\mathfrak{P}(m)$ sind. Da die (für solch einen Verband naheliegende) Bezeichnung „Mengenverband" in anderem Sinne verwandt wird (HERMES [7], S. 54), ein an „Menge" erinnernder Name aber zu wünschen ist, sagen wir:

3.4. DEFINITION. Ein Verband heißt m-*Verband*, wenn er verbandsisomorph einem vollständigen Teilverband einer Potenzmenge $\mathfrak{P}(m)$ ist.

3.5. *Mit A ist auch jeder vollständige Teilverband B von A ein* m-*Verband.* (Das folgt sofort aus 3.4 und der Definition eines vollständigen Teilverbandes B von A: B ist einem vollständigen Teilverbande derselben Potenzmenge wie A verbandsisomorph.) Insbesondere wird jedes „Intervall" $[b, a] = \{x;\ x \in A,\ b < x < a\}$, wo a, b beliebige Elemente von A sind, ein m-Verband.

Es gilt nun

3.6. SATZ 1. *Für einen vollständigen Verband A sind äquivalent*

(1) *A ist* m-*Verband.*

(2) *A ist glatter $(D^*\ 1)$-Verband.*

(3) *Jedes Element von A ist Verbindung perfekter Elemente.*

BEWEIS. Die Äquivalenz von (1) und (3) ist der Inhalt von RANEY [8], Theorem 2.

Wegen 1.4 folgt (3) aus (2).

Gelte (1); die volle Distributivität einer Potenzmenge impliziert, daß auch jeder ihrer vollständigen Teilverbände, somit jeder m-Verband volldistributiv ist. Erst recht genügt ein solcher $(D^*\ 1)$, und da jedes perfekte Element v. i. ist, folgt (2) [1].

Von BRUNS [5] wurde noch gezeigt: A ist genau dann m-Verband wenn $(D^*\ 1)$ und $(D^*\ 2)$ gelten und zudem jedes Intervall in A einen Sprung enthält. (Ein Sprung $\langle b, a\rangle$ ist ein Intervall $[b, a]$ mit $b < a$.) BRUNS selbst hat in der genannten Arbeit die Verbindung zwischen diesen Eigenschaften einerseits und der Darstellung der Verbandselemente durch v. i. andererseits hergestellt (S. 111). Die von ihm beim Beweis des genannten Satzes verwendete Zuordnung φ

$$a \xrightarrow{\varphi} \{\langle x, y\rangle;\ x \cup a > y\}$$

[1]) Es mag wünschenswert scheinen, die Äquivalenz von (1) und (2) unabhängig von RANEY's Ergebnis zu beweisen. Jedoch führt dies (wie durch 1.4 auch nahegelegt ist) doch wiederum auf den Beweis, den bereits RANEY verwendet hat. Zudem wird die Implikation „Aus (2) folgt (1)" nochmals im Beweis von Satz 2 [Teil (α)] mitbewiesen.

von Mengen von Sprüngen zu Verbandselementen entspricht der Zuordnung $a \to \tilde{a}$ in folgendem Sinne: In einem m-Verbande gibt es zu jedem Sprung $\langle x, y\rangle$ genau ein $i \in H$ mit $x \cup i = y$ (s. 5.5). Es ist dann $y \subset x \cup a$ äquivalent mit $i \subset a$.

3.7. Satz 2. *Ein* m-*Verband A ist vollständig charakterisiert durch die Halbordnung H der in ihm v. i. Elemente: nämlich isomorph dem Verbande der Bänder in H.*

Umgekehrt gibt es zu jeder vorgegebenen Halbordnung H einen und bis auf Isomorphie nur einen m-*Verband, dessen v. i. Elemente eine Halbordnung isomorph zu H bilden.*

Es besteht so eine reziproke Beziehung zwischen den Klassen halbordnungsisomorpher Halbordnungen und verbandsisomorpher m-*Verbände.*

Beweis. (α) H sei die Halbordnung der v. i. Elemente des m-Verbandes A. Wir betrachten die Abbildung $a \overset{\beta}{\to} \beta(a) = \tilde{a}$ von A in den Bänderverband $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(H)$ und zeigen, daß β ein Verbandsisomorphismus ist.

$\tilde{a} \in \mathfrak{B}$ und die Eindeutigkeit der Abbildung wurde bereits festgestellt. β ist Abbildung *auf* $\mathfrak{B}$. Denn für $i \in H$ gilt, wenn B ein Band in H ist, $i \subset \vee B$ genau dann, wenn $i \subset k$ für ein $k \in B$ ist (da i perfekt), also wenn $i \in B$ ist. Es folgt $\beta(\vee B) = \widetilde{\vee B} = B$.

Wegen der Glätte von A ist für $a \in A$ stets $\vee \tilde{a} = a$, und es folgt, daß die Abbildung β und die durch $\mathfrak{B} \ni B \to \vee B \in A$ definierte Abbildung β^* eine reziproke (also eineindeutige) Beziehung zwischen A und $\mathfrak{B}$ bewirken: $\beta^* = \beta^{-1}$.

Weiter gilt für β, wenn X eine beliebige Teilmenge von A ist,

$$\beta(\wedge X) = \wedge_m \tilde{x} \quad (x \in X)$$

$$\beta(\vee X) = \vee_m \tilde{x} \quad (x \in X).$$

Denn für $i \in H$ ist

$i \in \beta(\wedge X)$ äquivalent $i \subset \wedge X$

äquivalent $i \subset x$ für alle $x \in X$

äquivalent $i \in \wedge_m \{k;\ k \in H,\ k \subset x\} = \underset{x \in X}{\wedge_m} \tilde{x}$.

$i \in \beta(\vee X)$ äquivalent $i \subset \vee X$

äquivalent Es gibt ein $x_0 \in X$ mit $i \subset x_0$ (da i perfekt)

äquivalent $i \in \underset{x \in X}{\vee_m} \tilde{x}$.

Es folgt, daß β Verbandsisomorphismus ist, wie behauptet wurde.

(β) Ist umgekehrt H beliebig vorgegeben, so ist $\mathfrak{B}(H)$ nach 2.2 m-Verband. Satz 2 folgt nun unmittelbar aus 2.3.

Aus Satz 1 hat man die

3.8. Folgerung. *Für einen glatten Verband A sind äquivalent*

(1) *A ist* m-*Verband.*

(2) *A genügt (D^* 1).*

(3) *A ist voll distributiv.*
(4) *Jedes v. i. Element in A ist perfekt.*

Dies gilt also etwa in jedem Verbande mit Minimalbedingung.

3.9. Es ist klar, daß sich die behandelten Begriffsbildungen und Ergebnisse dualisieren lassen. In einem Verbande A, der die zur Glätte duale Eigenschaft (d.h. also Darstellbarkeit jedes Elements als Schnitt voll $\cap$-irreduzibler) besitzt — z.B. in einem Verbande mit Maximalbedingung — sind somit äquivalente Eigenschaften

(1) A ist m-Verband,
(2) A genügt (D^* 2),
(3) A ist voll distributiv

und natürlich ließe sich als (4) noch die zu 3.8, (4), duale Aussage als Eigenschaft der voll $\cap$-irreduziblen Elemente formulieren.

Es läßt sich leicht zeigen, daß eine gegebene „Einbettung" eines m-Verbandes in ein $\mathfrak{P}(m)$ durch Klassenbildung innerhalb der Trägermenge m stets in der Weise „normiert" werden kann, daß sie bis auf Verbandsisomorphie mit der Banddarstellung, der Einbettung $A \to \mathfrak{B}(H) \subset_m \mathfrak{P}(H)$ also, übereinstimmt. Jedoch sei hierauf nicht mehr eingegangen.

§ 4. Der Spezialfall einer vollen Potenzmenge

4.1. Spezialfall eines m-Verbandes A ist der, daß A isomorph dem vollen Verbande $\mathfrak{P}(m)$ wird. Es sei an folgendes Ergebnis aus HERMES [7] erinnert (Satz 24.3): *Die folgenden Eigenschaften eines Verbandes A sind äquivalent:*

(1) *A ist isomorph einer Potenzmenge* $\mathfrak{P}(m)$.
(2) *A ist Boolesch und atomar.*
(3) *A ist Boolesch und genügt dem Gesetze* $\bigwedge \bigvee \mathfrak{A} = \bigvee \bigwedge \breve{\mathfrak{A}}$ (vgl. 1.1).
(4) *A ist Boolesch und genügt dem Gesetze* $\bigvee \bigwedge \mathfrak{A} = \bigwedge \bigvee \breve{\mathfrak{A}}$

(wo $\mathfrak{A}$ *eine beliebige Menge von Teilmengen von A ist).*

Als Menge m mit $A \cong \mathfrak{P}(m)$ kann für solch einen Verband A stets die Menge P_A seiner Atome dienen: $A \cong \mathfrak{P}(P_A)$. Die Tatsache, daß A die genannten Eigenschaften hat, wollen wir im folgenden in der Bezeichnungsweise $A \cong \mathfrak{P}(m)$ oder auch $A \cong \mathfrak{P}(P_A)$ zusammenfassen.

Der Verbandsisomorphismus zwischen A und $\mathfrak{P}(P_A)$ wird vermittelt durch die reziproken Abbildungen

$$A \ni a \to \langle a \rangle = \{p;\ p \in P_A,\ p \overset{\cdot}{<} a\}$$

$$A \ni \bigvee Q \leftarrow Q \in \mathfrak{P}(P_A)$$

($\bigvee \langle a \rangle = a$, $\langle \bigvee Q \rangle = Q$). Man sieht leicht, daß $A \cong \mathfrak{P}(m)$ äquivalent ist zu
(5) *A ist* m*-Verband und jedes* $i \in H$ *Atom.*

Wir sagen ferner

4.2. DEFINITION. Sei A ein vollständiger Verband, a beliebig in A und X eine Teilmenge von A. a heißt *direkte Verbindung* der Menge $X \subset_m A$, $a = \bigvee' X$, wenn

(1) $a = \vee X$,
(2) $\vee Y \cap \vee(X \dot{-} Y) = 0$ für alle $Y \subset_m X$
erfüllt ist.

4.3. *Sei $A = \mathfrak{P}(P_A)$, es bestehe also der Verbandsisomorphismus*

$$a \rightleftarrows \langle a \rangle = \{p;\ p \in P_A,\ p < a\} \subset_m P_A$$

($a \in A$, $\langle a \rangle \in \mathfrak{P}(P_A)$. Dann ist jedes $a \in A$ die direkte Verbindung $a = \vee' \langle a \rangle$; wegen der Eindeutigkeit der Beziehung zwischen A und $\mathfrak{P}(P_A)$ besteht A also aus den sämtlichen direkten Verbindungen $\vee' Q$, $Q \subset_m P_A$. Insbesondere gilt $1 = \vee' P_A$.

Beweis. Sei $a \in A$. Wir haben $a = \vee \langle a \rangle$. Ist ferner $Y \subset_m \langle a \rangle$, so gilt wegen der vollen Distributivität $\vee Y \cap \vee(\langle a \rangle \dot{-} Y) = \vee(p \cap q)$ (wo $p \in Y$, $q \in \langle a \rangle \dot{-} Y$ ist). Da Y und $\langle a \rangle \dot{-} Y$ leeren Durschschnitt haben, ist stets $p \neq q$, also $p \cap q = 0$. Es folgt $\vee Y \cap \vee(\langle a \rangle \dot{-} Y) = 0$.

4.4. Aus (5) in 4.1 ergibt sich mühelos das Theorem B aus Balachandran [2], welches die Äquivalenz von $A \cong \mathfrak{P}(m)$ zu
(6) *A ist $\mathfrak{m}$-Verband, und zu jedem $a \in A$, $a \neq 1$, gibt es in A ein Element $b \neq 0$ mit $a \cap b = 0$*
besagt.

Beweis. Ist (5) erfüllt und $a \neq 1$, so gibt es ein Atom i mit $i \not\leqq a$. Es ist $i \cap a = 0$.

Angenommen, (6) gälte, (5) jedoch nicht. Sei i v. i., aber kein Atom. Sei i^* die Verbindung aller $k \in H$ mit $k \not\geqq i$. Es genügt zu zeigen, daß für jedes $j \in H$ gilt $j \cap i^* \neq 0$. Ist $j \not\geqq i$, so folgt $j < i^*$, $j \cap i^* = j \neq 0$. Sei $j > i$. Da i nicht Atom ist, gibt es ein $k \in H$ mit $k <' i$. Wir haben $j \cap i^* > i \cap k = k \neq 0$.

§ 5. Kettenbedingungen

Der Zusammenhang zwischen einem $\mathfrak{m}$-Verbande A und der Halbordnung H seiner v. i. Elemente bewirkt eine Spiegelung zwischen Kettenbedingungen in A und H.

5.1. Sei A ein vollständiger Verband. Für jedes $a \in A$ setzen wir

$$n(a) = \vee\{x;\ x \in A,\ x > a\}, \text{ wenn } a \text{ obere Nachbarn hat,}$$
$$n(a) = a \text{ andernfalls.}$$

Man[2]) definiert dann die *untere Loewy-Reihe* $u_0 < u_1 < \cdots$ in A:

Definition.

$$u_0 = 0$$
$$u_{\nu+1} = n(u_\nu)$$
$$u_\lambda = \bigvee_{\nu<\lambda} u_\nu \quad \text{für Limesindizes } \lambda$$

(wo die Indizes einer wohlgeordneten Indexmenge I entnommen sind).

[2]) Siehe etwa Zassenhaus [10], S. 215, oder auch Baer [1], S. 38.

Es gibt einen ersten Index σ mit $u_{\sigma+1}=u_\sigma$.
Das Ziel dieses Paragraphen ist nun der folgende

5.2. SATZ 3. *Die folgenden Eigenschaften eines* m*-Verbandes A sind äquivalent:*

(1) *Die Halbordnung H der v. i. Elemente von A erfüllt die Minimalbedingung.*
(2) *A ist $\uparrow$-atomar.*
(3) *Jedes $a\in A$, $a\neq 1$ hat obere Nachbarn in A.*
(4) *A besitzt eine bis zum Allelement aufsteigende untere Loewy-Reihe.*
(5) *In A gibt es eine maximale wohlgeordnete Kette von 0 nach 1.*

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus einer Reihe von Hilfssätzen, die auch für sich von Interesse sein dürften.

5.3. Lemma 1. *Der Verband A sei glatt und modular. Dann gilt für Elemente $a, b\in A$:*

Aus $b<a$ folgt, daß die (nicht leere) Menge $\tilde{a}\div\tilde{b}$ aus lauter unvergleichbaren Elementen besteht. Für jedes $i\in a\div b$ ist $b\cup i=a$. Ist umgekehrt $a=b\cup i$ für ein $i\in\tilde{a}\div\tilde{b}$, das in $\tilde{a}\div\tilde{b}$ minimal ist, so gilt $b\prec a$.

BEWEIS. In einem glatten Verbande ist die Zuordnung $a\to\tilde{a}$ ($\vee\tilde{a}=a$) eineindeutig.

(α) Sei $b<a$.

Aus $b<'a$ folgt $\tilde{b}<'_{\mathfrak{m}}\tilde{a}$, also die Existenz eines $i\in\tilde{a}\div\tilde{b}$. Man hat $\tilde{b}<_{\mathfrak{m}}b\tilde{\cup}i$, $b<'b\cup i<a$, also $a=b\cup i$.

Für jedes $k\in\tilde{a}\div\tilde{b}$ ist in dieser Weise $a=b\cup k$. Gäbe es ein $k\in\tilde{a}\div\tilde{b}$ mit $k<'i$, also $k<i'$ (s. 1.6), so hätte man $a=b\cup k<b\cup i'<b\cup i=a$ also $b\cup i'=a$. Wegen $i\not\subset b$ gilt $b\cap i<'i$, also $b\cap i<i'$. Hiermit folgt $i=i\cap a=i\cap(b\cup i')=(i\cap b)\cup i'$ (nach dem modularen Gesetz) $=i'$, q.e.a.

Es folgt, daß die $i\in\tilde{a}\div\tilde{b}$ sämtlich maximal in $\tilde{a}$ und minimal in $H\div\tilde{b}$ sind.

(β) Sei $a=b\cup i$ für ein $i\in\tilde{a}\div\tilde{b}$, das in dieser Menge minimal ist.

Es folgt $b<'a$ und $i'<b$, also (wegen $b\cap i<'i$) $i'=b\cap i$. Für ein c mit $b<'c<a$ sei $c\cup i=a$. Wäre $i\not\subset c$, so $i\cap c<'i$, also (da $i'=i\cap b<i\cap c$ gilt) $i\cap c=i'$. Hiermit hätte man $b=b\cup(i\cap b)=b\cup i'=b\cup(i\cap c)=(b\cup i)\cap c$ nach dem modularen Gesetz; also $b=a\cap c=c$ entgegen der Annahme. Also ist $i<c$, $c=a$, und man hat $b<a$.

5.4. Folgerung 1. *In einem glatten modularen Verband ist für Elemente a, b dann und nur dann $b<a$, wenn $a=b\cup i$ gilt für ein $i\in H$, das minimal in der Menge $H\div\tilde{b}$ ist.*

5.5. Folgerung 2. *Für Elemente a, b eines* m*-Verbandes A ist $b<a$ äquivalent mit $a=b\cup i$ für genau ein $i\in H$.*

BEWEIS. Daß die Bedingung hinreicht, ist nach 5.3. klar. Ist umgekehrt $b<a$ und $a=b\cup i=b\cup k$ für Elemente $i, k\in H\div\tilde{b}$ so ergibt sich aus der Perfektheit von i, k, daß aus $i\not\subset b$ folgt $k<i$ und aus $k\not\subset b$ folgt $i<k$, also $i=k$ gilt.

Es ist klar, daß in einem ↑-atomaren[3]) Verbande jedes vom Allelement verschiedene Element obere Nachbarn besitzt. Für bestimmte Verbände läßt sich nun leicht die Umkehrung beweisen:

5.6. Lemma 2. *Der Verband A sei modular und habe zudem die Eigenschaft, daß für jede Kette $K \subset_m A$ und jedes Element $a \in A$ gilt $a \cap \vee K = \vee(a \cap K)$. Dann sind die Aussagen „A ist ↑-atomar" und „jedes $a \in A$, $a \neq 1$, hat obere Nachbarn" gleichwertig.*

(Zum Beispiel erfüllt der Verband aller Normalteiler einer Gruppe die Voraussetzungen dieses Lemmas.)

Beweis. Seien $a, b \in A$ mit $b \subset' a$. b hat einen oberen Nachbarn n_1, n_1 einen oberen Nachbarn n_2 und so fort; es läßt sich eine maximale wohlgeordnete Kette von b nach 1 bilden:

$$n_\nu < n_{\nu+1}$$

$$n_\lambda = \bigvee_{\nu<\lambda} n_\nu \quad \text{für Limesindizes } \lambda.$$

Aus $b < n_1$ folgt (wegen $b \subset a$, $b \subset n_1$, also $b \subset a \cap n_1$), daß $a \cap n_1 = n_1$ oder $a \cap n_1 = b$ gilt. Im ersten Falle ist $n_1 \subset a$ und nichts mehr zu beweisen.

Sei also $a \cap n_1 = b$. Da es einen Index σ mit $n_\sigma = 1$, $a \cap n_\sigma = a \neq b$ gibt, kann nicht $a \cap n_\nu = b$ für alle Indizes ν sein. Es gibt einen ersten Index μ mit $a \cap n_\mu >' b$. μ kann nicht Limesindex sein, denn für Limesindizes λ mit der Eigenschaft „aus $\nu < \lambda$ folgt $n_\nu \cap a = b$" folgt

$$a \cap n_\lambda = a \cap \bigvee_{\nu<\lambda} n_\nu = \bigvee_{\nu<\lambda} (a \cap n_\nu) = \vee b = b.$$

Sei $c = a \cap n_\mu$. Es ist $b \subset c \cap n_{\mu-1} \subset a \cap n_{\mu-1} = b$, also $c \cap n_{\mu-1} = b$. Hieraus folgt weiter $c \not\subset n_{\mu-1}$ (da sonst $c \cap n_{\mu-1} = c \neq b$ wäre), also (wegen $c \cup n_{\mu-1} \subset n_\mu$ und $n_{\mu-1} < n_\mu$) die Beziehung $c \cup n_{\mu-1} = n_\mu$. Da für beliebige Elemente x, y eines modularen Verbandes $x \cap y < x$ gleichwertig ist mit $y < x \cup y$ (Hermes [7], § 13, S. 70), folgt aus $n_\mu = n_{\mu-1} \cup c > n_{\mu-1}$, daß $b = n_{\mu-1} \cap c < c$ gilt.

Also ist $c = a \cap n_\mu \subset a$ oberer Nachbar von b unter a.

Zusammen mit 5.4 hat man sofort

5.7. *In einem glatten modularen Verband hat genau dann jedes Element $a \neq 1$ obere Nachbarn, wenn jede der Teilmengen $H \doteq \tilde{a}$, $1 \neq a \in A$, minimale Elemente enthält.*

Genau dann ist A ↑-atomar, wenn jede der Teilmengen $\tilde{a} \doteq \tilde{b}$, $a, b \in A$ mit $b \subset' a \neq 1$, minimale Elemente enthält.

Gilt zudem in A für beliebige Ketten K und Elemente a die Gleichung $a \cap \vee K = \vee(a \cap K)$, so sind die genannten vier Eigenschaften gleichwertig.

Aus 5.7 ergibt sich insbesondere die Äquivalenz der Eigenschaften (2) und (3) sowie die Implikation „aus (1) folgt (2)" in Satz 3.

5.8. *Ein vollständiger modularer Verband A besitzt genau dann eine untere Loewy-Reihe vom Null- zum Allelement, wenn jedes von 1 verschiedene $a \in A$ obere Nachbarn hat.*

[3]) Siehe 1.7.

BEWEIS. Daß die Bedingung hinreicht, ist klar. Sei umgekehrt die Existenz einer bis zum Allelement aufsteigenden Loewy-Reihe $0=u_0<u_1<\cdots$; $u_\sigma=1$ vorausgesetzt und a ein beliebiges von 1 verschiedenes Element von a.

Aus $a>u_0=0$, $a\not\supset u_\sigma=1$ folgt: Es gibt einen ersten Index μ mit $a\not\supset u_\mu$. Für Limesindizes folgt aus $u_\nu<a$ für alle $\nu<\lambda$, auch noch $u_\lambda<a$. Also kann μ nicht Limesindex sein.

u_μ ist die Verbindung der oberen Nachbarn von $u_{\mu-1}$ und es ist $u_{\mu+1}<a$. Aus $u_\mu\not< a$ folgt die Existenz eines oberen Nachbarn y von $u_{\mu-1}$ mit $y\not< a$, also $y\cap a<' y$. Man hat dann $u_{\mu-1}<y\cap a<' y$, also $y\cap a=u_{\mu-1}$. Da A modular ist, folgt aus $y\cap a=u_{\mu-1}\prec y$, daß $y\cup a$ oberer Nachbar von a ist.

5.9. *Ein modularer Verband ist genau dann $\uparrow$-atomar, wenn er eine maximale wohlgeordnete Kette vom Null- zum Allelement besitzt.*

BEWEIS. Die $\uparrow$-Atomarität eines Verbandes bedeutet, daß zwischen je zwei Elementen a, b mit $a>b$ eine maximale wohlgeordnete Kette existiert. In modularen Verbänden aber ist letzteres mit der Existenz einer maximalen wohlgeordneten Kette von 0 nach 1 äquivalent; denn bei Existenz einer solchen Kette läßt sich bekanntlich für jedes Element a die Kette $0<a<1$ zu einer der ersten Ketten isomorphen verfeinern. (s. etwa A. KUROSCH [6]; G. BIRKHOFF [3]).

BEWEIS von Satz 3. Aus 5.7, 5.8, 5.9 ergibt sich für m-Verbände die Gleichwertigkeit der Eigenschaften (2), (3), (4), (5) in Satz 3 und die Tatsache, daß jede von ihnen aus (1) folgt. Zu zeigen bleibt etwa die Implikation „aus (5) folgt (1)".

Sei hierzu $0=a_0\prec a_1\prec a_2\ldots a_\nu\prec a_{\nu+1}\ldots a_\sigma=1$ eine maximale wohlgeordnete Kette vom Null- zum Allelement in A.

Für alle $\nu\leqq\sigma$ gilt nach 5.5. $a_{\nu+1}=a_\nu\cup i$ für genau ein $i\in H$, das mit $i_{\nu+1}$ indiziert werden möge. Jedes $i\in H$ tritt genau einmal als ein solches Ergänzungsglied auf:

Aus $a_\sigma=1=\bigvee H$ nämlich folgt, daß für ein $i\in H$ gilt $i<a_\sigma$. Es gibt einen ersten Index μ mit $i<a_\mu$. μ kann nicht Limesindex sein, denn aus $i<\bigvee_{\nu<\lambda} a_\nu=a_\lambda$ folgt (da i perfekt ist) $i<a_\nu$ für ein $\nu<\lambda$.

Aus $i\not< a_{\mu-1}$, $i<a_\mu$, $a_{\mu-1}\prec a_\mu$ hat man wegen 5.5 $i=i_\mu$. Der Index μ ist zu i eindeutig bestimmt.

Ist X eine beliebige nicht leere Teilmenge von H, so gibt es einen ersten Index ξ mit $x<a_\xi$ für ein $x\in X$.

Nach demselben Schluß wie oben folgt, daß ξ nicht Limesindex sein kann; es ist $x=i_\xi$. Für ein $y\in H$ mit $y<' x$ folgt $y<a_{\xi-1}$ (da sich aus $y\not< a_{\xi-1}$ ergeben würde $a_{\xi-1}<' a_{\xi-1}\cup y<a_{\xi-1}\cup x=a_\xi$, also $a_{\xi-1}\cup y=a_{\xi-1}\cup x$ entgegen der Eindeutigkeit von $x=i_\xi$). y kann also nach der Auswahl des Index ξ nicht in X liegen; x ist minimal in X.

Hiermit ist Satz 3 bewiesen.

Wir zeigen noch:

5.10. *Die Eigenschaft eines Verbandes A, $\uparrow$-atomarer* m-*Verband zu sein, vererbt sich auf alle vollständigen Teilverbände von A.*

BEWEIS. Sei B vollständiger Teilverband von A, b ein beliebiges Element aus B und u das Allelement in B. B ist m-Verband (3.5). Nach Voraussetzung gibt es maximale wohlgeordnete Ketten in A zwischen b und u; durch jedes x mit $b<'x<u$ läßt sich so eine Kette legen. Sei $\mathfrak{K}$ die Gesamtheit dieser Ketten. Wegen $u\in B$ gibt es in jeder Kette $K\in\mathfrak{K}$ ein Element $b_{\mu(K)}$, welches das erste (in der zu K gehörigen Wohlordnung) von b verschiedene Element aus K ist, das gleichzeitig in B liegt. Sei μ minimal unter den Indizes $\mu(K)$, $K\in\mathfrak{K}$. b_μ liegt in B, und nach Konstruktion kann es kein $x\in B$ mit $b<'x<'b_\mu$ geben. b_μ also ist in B oberer Nachbar von b.

Insbesondere folgt aus 5.10, daß mit A jedes Intervall $[b,a]$ $(a,b\in A$ beliebig mit $b<'a)$ $\uparrow$-atomarer m-Verband ist.

5.11. Auf Grund der engen Verbindung, die zwischen A und H bei einem m-Verbande besteht, könnte man auf den Gedanken kommen, die Minimalbedingung in H impliziere vielleicht sogar die Minimalbedingung in A. (Bekanntlich folgt aus der Endlichkeit der Halbordnung der irreduziblen Elemente eines distributiven Verbandes die Endlichkeit des Verbandes selbst.) Daß dies nicht der Fall ist, zeigt folgendes sehr einfache Beispiel, in dem A sogar voller Potenzmengenverband — Boolesch und atomar — ist: H bestehe aus (etwa abzählbar) unendlich vielen unvergleichbaren Elementen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots$, die also alle Atome in A werden. Sicher erfüllt H die Minimalbedingung. Die Bänder $(H \div \mathfrak{p}_1)$, $(H \div (\mathfrak{p}_1 \cup_m \mathfrak{p}_2))$, $(H \div (\mathfrak{p}_1 \cup_m \mathfrak{p}_2 \cup_m \mathfrak{p}_3)), \ldots$ bilden eine unendliche absteigende Kette im Bänderverbande von A.

Es ist klar, daß sich die Begriffsbildungen und Ergebnisse des letzten Paragraphen dualisieren lassen; doch sei hierauf nicht mehr eingegangen.

Literatur

[1] BAER, R.: The double Chain Condition in Cyclic Operator Groups. Amer. J. Math. **69**, 1, 37–45 (1947). — [2] BALACHANDRAN, V. K.: A Characterization of $\Sigma\Delta$-Rings of Subsets. Fundamenta Math. **41**, 38–41 (1954). — [3] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory. A.M.S., Coll. Publ. **25**, 2nd ed. (1948). — [4] BIRKHOFF, G.: Transfinite Subgroup Series. Bull. A.M.S. **40**, 847–850 (1934). — [5] BRUNS, G.: Verbandstheoretische Kennzeichnung vollständiger Mengenringe. Archiv d. Math. **10**, 109–112 (1959). — [6] KUROSCH, A.: Eine Verallgemeinerung des Jordan-Hölderschen Satzes. Math. Annalen **111**, 13–18 (1935). — [7] HERMES, H.: Einführung in die Verbandstheorie. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1955. — [8] RANEY, G. N.: Completely Distributive Complete Lattices. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 677–680 (1952). — [9] WIELANDT, H.: Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Z. **45**, 209–244 (1939). — [10] ZASSENHAUS, H.: The Theory of Groups. Chelsea, New York 1958.

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 23. Juni 1959)

MENZEL, W.
Math. Zeitschr. 74, 52–65 (1960)

Über den Untergruppenverband einer Abelschen Operatorgruppe Teil II: Distributive und m-Verbände von Untergruppen einer Abelschen Operatorgruppe

Von
WOLFRAM MENZEL

Einleitung

In Fortsetzung der verbandstheoretischen Untersuchungen in MENZEL [12] behandelt diese Arbeit Beziehungen zwischen Eigenschaften einer abelschen Operatorgruppe (g, Ω) und Eigenschaften des Verbandes ihrer zulässigen Untergruppen. Das Thema ist bestimmt durch zwei Eigenschaften dieses Verbandes, nämlich 1. Distributivität, 2. daß der genannte Verband einem vollständigen Teilverbande der Potenzmenge einer Menge verbandsisomorph sei. Operatorgruppen mit endlichem distributiven Ω-Untergruppenverband sind in BEHRENS [7] näher untersucht worden.

Verbände mit der zweiten Eigenschaft sind näher behandelt in MENZEL [12] und werden dort als „m-Verbände" bezeichnet. Nennt man ein Verbandselement „voll $\smile$-irreduzibel", wenn es nicht als Verbindung echt früherer dargestellt werden kann, so ist ein m-Verband A vollständig charakterisiert durch die Halbordnung der in ihm voll $\smile$-irreduziblen Elemente. Ein vollständiger Verband ist genau dann m-Verband, wenn er „glatt" ist (d.h. jedes Verbandselement Verbindung voll irreduzibler ist) und dem einen der beiden unendlich-distributiven Gesetze genügt (s. MENZEL [12], Satz 1). Dies bedeutet nunmehr: Ein Verband von Untergruppen einer Gruppe ist genau dann m-Verband, wenn er glatt und distributiv ist (1.7).

In § 1 dieser Arbeit werden die voll-irreduziblen Untergruppen von (g, Ω) charakterisiert als diejenigen, welche zyklisch und „einköpfig" im Sinne von WIELANDT [15] sind (d.h. genau eine maximale Ω-Untergruppe besitzen), (Satz 1, 2.3). Weiter ergibt sich (Satz 2, 3.5), daß die Distributivität des Untergruppenverbandes jeder der beiden folgenden Eigenschaften äquivalent ist:

(I) Zu einem beliebigen Paare a, b von Untergruppen gibt es keinen nicht trivialen Homomorphismus zwischen den Faktorgruppen $a-(a\cap b)$ und $b-(a\cap b)$.

(II) Für jedes Untergruppenpaar a, b und jedes Element $\gamma\in a\smile b$ gilt $(a:\gamma)\smile(b:\gamma)=\Omega$ im Verband der Rechtsideale von Ω.

[Hierbei ist $(a:\gamma)$ der „Quotient" $\{\omega;\omega\in\Omega,\ \gamma\omega\in a\}$.] Ist der Untergruppenverband sogar glatt und $\uparrow$-atomar im Sinne von BIRKHOFF [8] (letzteres bedeutet: Zu je zwei Verbandselementen x, y mit $y<' x$ gibt es obere

Nachbarn von y unter x), so läßt sich (I) durch eine schärfere Aussage ersetzen (Satz 4, 4.5). Distributivität impliziert nunmehr, daß für jede Untergruppe a der Gruppe g und jeden Homomorphismus η von a in g gilt $a^\eta \subset a$. Für einen glatten, $\uparrow$-atomaren Untergruppenverband von (g, Ω) gilt ferner: Bezeichnet man zu einer voll $\smile$-irreduziblen Untergruppe i von (g, Ω) mit i' die (einzige) maximale Untergruppe von i, so wird der Verband genau dann ein m-Verband, wenn für beliebige voll $\smile$-irreduzible Untergruppen i, k aus der Isomorphie der Faktorgruppen $i - i'$ und $k - k'$ folgt, daß $i \subset k$ oder $k \subset i$ gilt, (Satz 3, 4.4). Als Spezialisierung wird in § 4 eine Verallgemeinerung des Satzes (s. etwa ZASSENHAUS [*16*], S. 214) bewiesen, nach welchem im Untergruppenverbande einer von ihren minimalen Untergruppen erzeugten Gruppe aus der Distributivität des Verbandes folgt, daß keine verschiedenen Untergruppen einander isomorph sind (Satz 5, 5.2).

Die Betrachtung der Beziehungen zwischen Distributivität des Untergruppenverbandes und Invarianzeigenschaften der Untergruppen bei Homomorphismen geht zum größten Teil auf Anregung von R. BAER zurück. Ferner gehört der folgende von E.-A. BEHRENS in einer Vorlesung über Ringtheorie gezeigte Satz in diesen Problemkreis: Sei T ein halb-primärer Ring mit Einselement, $\mathfrak{m}$ ein T-Modul; für je vier T-Untermoduln a, b, c, d, von $\mathfrak{m}$ mit $a \prec b \subset c \prec d$ gelte $b - a \cong\cong d - c$. Dann ist der Verband der T-Untermoduln von $\mathfrak{m}$ distributiv. Daß die Distributivität des Untergruppenverbandes mit der oben genannten Eigenschaft (II) gleichbedeutend ist, beruht auf einer Verallgemeinerung (Lemma 3.2) des „Theorem 1" in SUZUKI [*14*], welches ein Kriterium dafür darstellt, daß ein Untergruppenpaar „distributives Paar" (vgl. Def. 3.1) ist: "A pair of subgroups A and B forms a distributive pair if and only if for every element $c \in A \smile B$, not in A nor in B, its relative orders with respect to A and B are finite and relatively prime to each other". Der Spezialfall schließlich, daß die Gruppe von ihren minimalen Untergruppen erzeugt wird, ist teilweise bereits in ZASSENHAUS [*16*] (Appendix B, 3., 4) behandelt – dort allerdings für beliebige (nicht notwendig abelsche) Gruppen, jedoch ohne genaueres Eingehen auf einen Operatorenbereich.

§ 1. Bezeichnungen und Vorbemerkungen

1.1. Gegeben sei eine abelsche Gruppe g mit einem Ring Ω von Rechtsoperatoren. Da keine nicht abelsche Gruppen betrachtet werden, wollen wir nur noch von der „Gruppe g" sprechen. Die Elemente von g werden mit kleinen griechischen, die Untergruppen dieser Gruppe mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Große lateinische Buchstaben sollen in der Regel für Mengen von Untergruppen verwendet werden.

Der Ring Ω besitze ein Einselement und dieses operiere identisch in g. Ω braucht nicht treu zu sein.

Zu g darf ein (Links-)Operatorenbereich Λ hinzugegeben sein; ist dies der Fall, so sei stets die Λ-Zulässigkeit der Operatoren aus Ω vorausgesetzt.

Zu Untergruppen a, b von g mit $b \subset a$ bezeichne $a - b$ die Faktorgruppe von a nach b.

Wie in MENZEL [12] wird zwischen den verbandstheoretischen Zeichen $\subset, \cap, \cup$ und den Symbolen $\subset_m, \cap_m, \cup_m$ unterschieden, welche mengentheoretisches Enthaltensein, mengentheoretischen Durchschnitt und mengentheoretische Vereinigung bezeichnen.

Für Elemente a, b eines Verbandes bedeute ferner $b \subset' a$, daß $b \subset a$ und $b \neq a$ gilt; ist b „unterer Nachbar" von a, so schreiben wir $b \prec a$. Wir bedienen uns für Schnitte und Verbindungen in einem vollständigen Verbande der abkürzenden Komplexschreibweise $\wedge X$ statt $\bigwedge_{x \in X} x$, usw.

1.2. Es sei Γ der Ring aller Endomorphismen der Gruppe g (ohne Operatoren), G der Verband aller Untergruppen dieser Gruppe. Ist Ξ eine beliebige Teilmenge von Γ, X eine beliebige Teilmenge von G, so sei ferner

$$V\Xi = \{u; u \in G,\ u\xi \subset u \quad \text{für alle} \quad \xi \in \Xi\}$$

und

$$\Phi X = \{\eta; \eta \in \Gamma,\ x\eta \subset x \quad \text{für alle} \quad x \in X\}$$

gesetzt.

Man verifiziert leicht, daß für die Operatoren V und Φ die Operatorgleichungen

$$\Phi V \Phi = \Phi$$

und

$$V \Phi V = V$$

erfüllt sind.

Ist der Operatorenring Ω treu, so kann er stets mit einem Unterring von Γ identifiziert werden. Auch, wenn dies nicht der Fall ist, wollen wir den Verband der Ω-Untergruppen von g mit $V\Omega$ bezeichnen.

1.3. Wie bei MENZEL [12] heiße eine Teilmenge B eines Verbandes A ein *Unterverband* von A, wenn sie bezüglich der durch die Halbordnungsrelation von A in B induzierten Halbordnungsrelation einen Verband bildet; ist der Verband B zudem vollständig, und gilt, daß beliebige Schnitte und Verbindungen in B mit den in A gebildeten Schnitten und Verbindungen übereinstimmen, so nennen wir B einen *vollständigen Teilverband von* A (vgl. HERMES [9], S. 21). Man sieht sofort:

Der Unterverband $V\Omega$ des Verbandes G aller Untergruppen von g ist vollständiger Teilverband von G.

1.4. Zu einer beliebigen Menge Ξ von Rechtsoperatoren der Gruppe g sei $\mathsf{Z}\Xi$ der Zentralisator dieser Menge in Γ:

$$\mathsf{Z}\Xi = \{\zeta; \zeta \in \Gamma,\ \zeta\xi = \xi\zeta \quad \text{für alle } \xi \in \Xi\}.$$

(Für die leere Menge sei $\mathsf{Z}\Xi = \Gamma$ gesetzt.) $\mathsf{Z}\Xi$ ist ein Ring, der den identischen Endomorphismus 1 enthält.

Ferner beweist man leicht

1.5. *Ist G der Verband aller Untergruppen der Gruppe g, A vollständiger Teilverband von G und A distributiv, so gilt in A das unendlich-distributive*

Gesetz

$(D^*\,1)$ $$a \cap \bigvee_{b \in B} b = \bigvee_{b \in B} (a \cap b),$$

(wo a eine beliebige in A gelegene Untergruppe von g, B eine beliebige Menge in A gelegener Untergruppen von g ist.)

1.6. Wie bei MENZEL [12] heiße ein Element i eines Verbandes A *voll $\cup$-irreduzibel* (v. i.), wenn es nicht als Verbindung echt früherer Elemente dargestellt werden kann; der Verband A heiße *glatt*, wenn jedes seiner Elemente Verbindung von v. i. Verbandselementen ist. Der Verband A werde ein m-*Verband* genannt, wenn er verbandsisomorph einem vollständigen Teilverbande des Potenzmengenverbandes $\mathfrak{P}(m)$ einer Menge m ist. Aus MENZEL [12], Satz 1, zusammen mit 1.3 und 1.5 folgt sofort

1.7. *Der Verband $A = V\Omega$ aller Ω-Untergruppen der Gruppe g ist genau dann* m-*Verband, wenn er glatt und distributiv ist.*

§ 2. Voll irreduzible Untergruppen in $V\Omega$

Gegeben seien g und Ω im Sinne von §1.

Wir bezeichnen zum Verband $A = V\Omega$ mit H die Halbordnung der voll irreduziblen Untergruppen in A.

2.1. (a) Nach MENZEL [12], 1.6 ist jedes $i \in H$ einköpfig: i enthält genau eine maximale Ω-Untergruppe von g, den „Rumpf" $i' = \bigvee_{k < i} k$. Demgemäß ist $i - i'$ einfache Ω-Gruppe.

(b) Jedes $i \in H$ ist *Ω-zyklisch*: Es gibt ein Element $\iota \in i$ mit $\iota\Omega = i$. Denn wäre $\iota\Omega <' i$ für alle $\iota \in i$, so hätte man mit $i = \bigvee_{\iota \in i} \iota\Omega$ eine Darstellung von i als Verbindung echter Ω-Untergruppen.

Wir zeigen, daß die Eigenschaften (a) und (b) auch hinreichen, um die $i \in H$ zu charakterisieren; es gilt sogar die schärfere Aussage:

2.2. *$i \in A$ sei endlich erzeugt und einköpfig. Dann ist i voll irreduzibel in A.*

BEWEIS. Das einköpfige i habe den „Rumpf" i'. Wir zeigen, daß für alle $u < a$ gilt $u <' i$ *impliziert* $u < i'$; hieraus folgt die volle Irreduzibilität von i.

Sei also $i = (\iota_1, \ldots, \iota_n)\Omega$. Aus $u <' i$ folgt: Es gibt eine natürliche Zahl k, $1 \leqq k \leqq n$, mit $\iota_k \notin u$. Die Halbordnung X all derjenigen $x \in A$ mit $u < x < i$, welche mindestens eines der ι_l, $1 \leqq l \leqq n$, nicht enthalten, ist also nicht leer. Für eine Kette $Y \subset_m X$ gilt $w = \vee Y \in X$. (Denn jedes $\xi \in w$ liegt in einem $y \in Y$; lägen also alle ι_l, $l = 1, \ldots, n$, in w, so läge jedes ι_l in einem $y_l \in Y$, mithin — da Y Kette ist — alle ι_l, $l = 1, \ldots, n$, in einem $y \in Y$ entgegen $y \in X$).

Nach dem Zornschen Lemma gibt es in X eine dort maximale Ω-Untergruppe m von g. m ist unterer Nachbar von i, denn aus der Maximalität von m in X folgt, daß für m^* mit $m <' m^* < i$ gilt $\iota_l \in m^*$ für $l = 1, \ldots, n$ also $m^* = i$.

Wegen der Einköpfigkeit von i ist somit $m = i$, und man hat $u < i'$.

Wir haben die Folgerung

2.3. SATZ 1. *Eine Untergruppe $i \in V\Omega$ ist genau dann voll irreduzibel, wenn sie zyklisch und einköpfig ist.*

§ 3. Distributivität in $V\Omega$

3.1. DEFINITION. Das Paar a, b von Elementen eines Verbandes A heiße ein *distributives Paar in* A, wenn für alle $c \in A$ gilt

$$c \cap (a \cup b) = (c \cap a) \cup (c \cap b).$$

3.2. LEMMA. *Die Untergruppen* $a, b \in A = V\Omega$ *bilden genau dann ein distributives Paar in* A *wenn es zu jedem Element* $\gamma \in a \cup b$ *ein Element* $\mu \in \Omega$ *gibt mit*

$$\gamma\mu \in a$$
$$\gamma(1-\mu) \in b.$$

BEWEIS. 1. a, b sei distributives Paar und $\gamma \in a \cup b$. Speziell für $c = \gamma\Omega$ gilt dann $\gamma\Omega = \gamma\Omega \cap (a \cup b) = (\gamma\Omega \cap a) \cup (\gamma\Omega \cap b)$. Also hat γ die Darstellung $\gamma = \gamma\mu + \gamma\mu^*$ mit $\gamma\mu \in \gamma\Omega \cap a, \gamma\mu^* \in \gamma\Omega \cap b$. Es folgt $\gamma\mu \in a, \gamma(1-\mu) = \gamma - \gamma\mu = \gamma\mu^* \in b$.

2. Die angegebene Bedingung sei für a, b aus A erfüllt. Für jedes $x \in A$, $x \subset a \cup b$, gilt dann $x = (x \cap a) \cup (x \cap b)$. Denn jedes $\xi \in x$ hat die Form $\xi = \xi\mu + \xi(1-\mu)$ mit $\xi\mu \in x \cap a$, $\xi(1-\mu) \in x \cap b$. Ist $c \in A$ beliebig, so hat man also für $x = c \cap (a \cup b)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} c \cap (a \cup b) = x &= (x \cap a) \cup (x \cap b) \\ &= [c \cap (a \cup b) \cap a] \cup [c \cap (a \cup b) \cap b] = (c \cap a) \cup (c \cap b). \end{aligned}$$

3.3. Sind s, t Teilmengen der Gruppe g, so bezeichnen wir durch $(t:s)$ den „Quotienten" $(t:s) = \{\omega; \omega \in \Omega, \sigma\omega \in t$ für alle $\sigma \in s\}$. Ist $t \in V\Omega$, so ist $(t:s)$ Rechtsideal in Ω. Die angegebene Bedingung für die Distributivität eines Untergruppenpaares läßt sich dann in der Form ausdrücken:

Zu jedem $\gamma \in a \cup b$ *ist (im Verband der Rechtsideale von* Ω*)* $(a:\gamma) \cup (b:\gamma) = \Omega$.

(Das folgt sofort aus der Tatsache, daß Ω ein Einselement enthält.)

3.4. Ist im folgenden von einem Homomorphismus einer Gruppe $a \in A = V\Omega$ die Rede, so sei hierunter stets ein Ω-Homomorphismus verstanden. Ist x, y ein Paar von Gruppen, so heiße die Abbildung η ein *Homomorphismus zwischen* x *und* y, wenn η ein Homomorphismus von x in y oder von y in x ist.

Ziel dieses Paragraphen ist nun der folgende

3.5. SATZ 2. *Die folgenden Eigenschaften der* Ω*-Gruppe* g *sind äquivalent*

(1) $A = V\Omega$ *ist distributiv.*
(2) *Für beliebige* $a, b \in A$ *und* $\gamma \in a \cup b$ *gilt* $(a:\gamma) \cup (b:\gamma) = \Omega$.
(3) (2) *gilt für jedes Paar zyklischer* Ω*-Untergruppen* a, b *von* g.
(4) *Zu beliebigen Paaren* $a, b \in A$ *existieren keine nicht trivialen Homomorphismen zwischen* $a - (a \cap b)$ *und* $b - (a \cap b)$.
(5) *Für beliebige* $a, b \in A$ *gilt:*
Aus $a - (a \cap b) \cong b - (a \cap b)$ *folgt* $a = b$.

BEWEIS. (α) Distributivität des Verbandes A meint, daß jedes Paar $a, b \in A$ distributives Paar ist. Die Äquivalenz von (1) und (2) ergibt sich somit unmittelbar aus 3.3.

(β) (2) ist äquivalent (3). Denn ist jedes Paar zyklischer Ω-Untergruppen von g distributives Paar in A, so ist dies für ein beliebiges Paar $a, b \in A$ der Fall: Ein $\gamma \in a \cup b$ nämlich hat die Form $\gamma = \alpha + \beta \in \alpha\Omega \cup \beta\Omega$. Es folgt die Existenz eines $\mu \in \Omega$ mit $\gamma\mu \in \alpha\Omega < a$, $\gamma(1-\mu) \in \beta\Omega < b$, und aus 3.2 somit die Behauptung.

(γ) Daß aus der ersten die vierte (erst recht also die fünfte) Eigenschaft folgt, ergibt sich sofort aus folgendem

3.6. LEMMA. *a, b sei ein distributives Paar von Untergruppen in $V\Omega$. Dann ist der Nullhomomorphismus der einzige Homomorphismus zwischen $\bar{a} = a - (a \cap b)$ und $\bar{b} = b - (a \cap b)$.*

BEWEIS. $a, b \in A$ sei distributives Paar.

1. Man sieht leicht, daß das Distributivitätskriterium 3.2 auch in der Form ausgesprochen werden kann.

„Zu jedem Paar von Elementen $\alpha \in a$, $\beta \in b$ gibt es ein $\nu \in \Omega$ mit $\alpha\nu \in a \cap b$, $\beta(1-\nu) \in a \cap b$."

(Denn die Elemente $\gamma \in a \cup b$ sind ja genau die Elemente der Form $\alpha + \beta$, $\alpha \in a$, $\beta \in b$.)

2. Sei $\bar{\alpha} = \alpha + (a \cap b)$ eine Restklasse aus der Faktorgruppe $\bar{a} = a - (a \cap b)$, η ein Homomorphismus von $\bar{a}$ in $\bar{b}$; wir setzen $\bar{\beta} \doteq \bar{\alpha}^\eta = \beta + (a \cap b)$ (wo $\beta \in b$ ein Repräsentant der Restklasse $\bar{\beta}$ ist). Das in der unter 1. abgeleiteten Form des Distributivitätskriteriums genannte Element $\nu \in \Omega$ mit $\alpha\nu \in a \cap b$, $\beta(1-\nu) \in a \cap b$ bildet jedes Element der Restklasse $\bar{\alpha} = \alpha + (a \cap b)$ in $a \cap b$ ab, und dasselbe tut $1 - \nu$ mit jedem Element der Restklasse $\bar{\beta}$. Es folgt also

$$\bar{\alpha}\nu = \bar{0},$$

$$\bar{\beta}(1-\nu) = \bar{0}$$

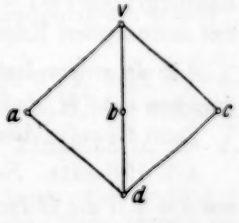
und wir haben

$$\bar{\alpha}^\eta = \bar{\beta} = \bar{\beta}(1-\nu) + \bar{\beta}\nu = \bar{0} + \bar{\alpha}^\eta \nu = \bar{\alpha}^\eta \nu = (\bar{\alpha}\nu)^\eta = \bar{0}^\eta = \bar{0}.$$

(δ) Es bleibt zu zeigen, daß in einem nicht distributiven Verbande $A = V\Omega$ die in 3.5 an letzter Stelle genannte Eigenschaft nicht erfüllt ist. Bekanntlich (HERMES [9], Satz 9.3) enthält ein modularer, nicht distributiver Verband A einen Teilverband der Form

$$a \cup b = b \cup c = c \cup a = v$$

$$a \cap b = b \cap c = c \cap a = d.$$



(Wegen $c \cap (a \cup b) = c \neq d = (c \cap a) \cup (c \cap b)$ ist a, b nicht distributives Paar.) Es ist nach dem zweiten Isomorphiesatz

$$a - (a \cap b) = a - (a \cap c) \cong (a \cup c) - c = (b \cup c) - c \cong b - (b \cap c) = b - (a \cap b).$$

Hiermit ist Satz 2 bewiesen.

Aus Satz 2 folgt insbesondere, daß in distributivem A keine von Null verschiedenen $a, b \in A$ mit $a \cap b = 0$ zueinander isomorph sein können; speziell sind keine verschiedenen Atome $p, q \in A$ isomorph.

Dies Ergebnis steht — formuliert noch unter der Voraussetzung, daß Ω ein „halbprimärer" Ring sei — bereits in BEHRENS [3], § 1, Satz 1.

3.7. Folgerung 1. *Der Verband $A = V\Omega$ sei glatt. A ist genau dann ein* m*-Verband, wenn eine der Eigenschaften* (1) *bis* (5) *aus Satz 2 erfüllt ist* (s. 1.6).

3.8. Folgerung 2. *Jede der Eigenschaften* (1) *bis* (5) *aus Satz 2 ist (notwendig und) hinreichend dafür, daß jedes homomorphe Bild von g distributiven Ω-Untergruppenverband besitzt.*

(Denn der Ω-Untergruppenverband eines homomorphen Bildes von g ist einem vollständigen Teilverband von A verbandsisomorph; auf einen solchen aber vererbt sich die Distributivität von A.)

In einem (abstrakten) Ringe Ω mit Einselement ist die additive Gruppe Ω^+ zyklische Ω-Gruppe mit den Rechtsidealen als zulässigen Untergruppen. Die Gesamtheit der Ω-homomorphen Bilder von Ω^+ ist die Gesamtheit der zyklischen Ω-Gruppen.

Wir haben als

3.9. Folgerung 3. *Für einen Ring Ω mit Einselement sind äquivalente Eigenschaften*

(1) *Jede zyklische Ω-Gruppe hat distributiven Ω-Untergruppenverband.*

(2) *Der Verband der Rechtsideale von Ω ist distributiv.*

(3) *Für jedes Paar von Rechtsidealen [oder jedes Paar von Rechts-Hauptidealen] P, Σ in Ω und jedes $\omega \in \mathsf{P} \cup \Sigma$ gilt*

$$(\mathsf{P} : \omega) \cup (\Sigma : \omega) = \Omega$$

im Verbande der Rechtsideale von Ω.

(4) *Für ein beliebiges Paar P, Σ von Rechtsidealen in Ω gibt es keinen nicht trivialen Ω-Homomorphismus [keinen Ω-Isomorphismus, außer wenn $\mathsf{P} = \Sigma$ ist] zwischen $\mathsf{P} - (\mathsf{P} \cap \Sigma)$ und $\Sigma - (\mathsf{P} \cap \Sigma)$.*

§ 4. m-Verbände $V\Omega$

4.1. Zu den v. i. (einköpfigen) Gruppen $i \in H$ nennen wir die einfache Faktorgruppe $\bar{i} = i - i'$ den *Kopf* von i. Die $i \in H$ lassen sich in Klassen solcher mit isomorphen Köpfen einteilen. Wir zeigen

4.2. *In einem distributiven Verbande $A = V\Omega$ gilt für voll irreduzible Untergruppen $i, k \in H$, daß aus $\bar{i} \cong \bar{k}$ folgt $i < k$ oder $k < i$.*

Zum Beweise dient der

4.3. Hilfssatz. *Sei $A = V\Omega$, $b \in A$ und $i \in H$ mit $i \not\subset b$, $i' < b$. Dann besteht mit $a = b \cup i$ die Ω-Isomorphie $a - b \cong \bar{i}$.*

BEWEIS. Aus den Voraussetzungen folgt $i' < i \cap b$; andererseits $i \cap b < i$, also $i \cap b < i'$. Man hat $i \cap b = i'$ und damit $a - b = (b \cup i) - b \cong i - (b \cap i) = \bar{i}$.

BEWEIS von 4.2. Angenommen, es gäbe $i, k \in H$ mit $\bar{i} \cong \bar{k}$, $i \not\subset k$, $k \not\subset i$. Dann folgt

$$i \cap k \subset' i, \qquad i \cap k \subset' k,$$

also

$$i \cap k \subset i', \qquad i \cap k \subset k'.$$

Sei $d = i' \cup k'$, $a = d \cup i$, $b = d \cup k$. Man hat $i \not\subset d$, $k \not\subset d$, und weiter $a \cap b = (d \cup i) \cap (d \cup k) = d \cup (i \cap k) = d$.

Aus 4.3 folgt dann (mit d statt dem dortigen b):
$a - (a \cap b) = a - d \cong \bar{i} \cong \bar{k} \cong b - d = b - (a \cap b)$, also nach Satz 2 die Nichtdistributivität von A.

4.2. bedeutet (in unserem Falle abelscher Operatorgruppen) eine Verallgemeinerung des Satzes von ZASSENHAUS [16], S. 214, nach welchem in einer von ihren minimalen Untergruppen erzeugten Gruppe mit distributivem Untergruppenverband keine zwei minimalen Untergruppen isomorph sind.

Unter Zusatzvoraussetzungen läßt sich nun auch die Umkehrung von 4.2 beweisen:

Wie in § 1 bereits erwähnt wurde, nennen wir einen vollständigen Verband *glatt*, wenn jedes seiner Elemente Verbindung voll irreduzibler ist; ein Verband heißt ein m-Verband, wenn er in den Potenzmengenverband $\mathfrak{P}(m)$ einer Menge m vollständig eingebettet werden kann (vgl. 1.6). Weiter nennen wir nach BIRKHOFF [8] einen Verband *↑-atomar*, wenn es zu je zwei Elementen $a, b \in A$ mit $b \subset' a$ obere Nachbarn von b unter a gibt.

Hiermit nun gilt:

A sei glatt und ↑-atomar. Für $i, k \in H$ gelte stets, daß $\bar{i} \cong \bar{k}$ impliziert $i \subset k$ oder $k \subset i$. Dann ist A distributiv.

BEWEIS. Wir wollen wie in MENZEL [12] die folgenden verbandstheoretischen Bezeichnungen gebrauchen:

Zu $x \in A$ sei $\tilde{x} = \{i;\ i \in H,\ i \subset x\}$; zu zwei Verbandselementen $x, y \in A$ mit $y \subset x$ sei $[y, x]$ das „Intervall" $\{z;\ z \in A,\ y \subset z \subset x\}$.

Angenommen, A wäre nicht distributiv, enthielte also nach Satz 2 Elemente a, b, $a \neq b$, mit $a - b \cong b - d$ (wo $a \cap b = d$ gesetzt ist). σ sei der verbindende Isomorphismus. σ bewirkt einen Verbandsisomorphismus σ_0 der Intervalle $[d, a]$ und $[d, b]$.

Wegen der ↑-Atomarität von A gibt es obere Nachbarn von d unter a bzw. unter b, und zu jedem m mit $d \prec m \subset a$ gehört eineindeutig ein $n = m^{\sigma_0}$, $d \prec n \subset b$, mit $(m - d)^{\sigma} = n - d$.

Da $d = a \cap b$ maximal ist mit der Eigenschaft $d \subset a$ und $d \subset b$, folgt $m \neq n$. Nach MENZEL [12], 5.3 gilt dann[1]: Es ist $m = d \cup i$ für ein $i \in H$, das minimal in $H \div \tilde{d}$ ist, und in gleicher Weise $n = d \cup k$ für ein $k \in H$, k minimal in $H - \tilde{d}$,

[1]) Der hier interessierende Teil des dort bewiesenen Lemmas lautet: Der Verband A sei glatt und modular, es seien $a, b \in A$ Elemente aus A mit $b < a$. Dann besteht die nicht leere Menge $\tilde{a} \div \tilde{b} = \{i;\ i \in H,\ i \subset a,\ i \not\subset b\}$ aus lauter unvergleichbaren Elementen, und für jedes $i \in \tilde{a} \div \tilde{b}$ ist $a = b \cup i$.

und weiter $i \not\subset k$, $k \not\subset i$. Wegen der Minimalität von i gilt $i' \subset d$, also $i' = i' \cap d \subset i \cap d$; andererseits ist $i \not\subset d$, $i \cap d \subset' i$, also $i \cap d \subset i'$, mithin $i \cap d = i'$. Analog hat man $k \cap d = k'$.

Es folgt:

$$i - i' = i - (i \cap d) \cong (d \cup i) - d = m - d \cong n - d$$
$$= (d \cup k) - d \cong k - (k \cap d) = k - k',$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Aus 4.3 und dem eben Bewiesenen ergibt sich also zusammen mit 1.7:

4.4. SATZ 3. *Der Verband $A = V\Omega$ sei glatt und $\uparrow$-atomar. A ist genau dann* m-*Verband, wenn für beliebige in A v. i. Untergruppen $i, k \in A$ aus $i \bar{\cong} k$ folgt $i \subset k$ oder $k \subset i$.*

(Man vgl. hierzu MENZEL [12], § 5, Satz 3.)

In einem m-Verband A ist nach MENZEL [12], § 5, Satz 3 die $\uparrow$-Atomarität von A mit der Minimalbedingung für H gleichwertig. Untergruppen a in einem $\uparrow$-atomaren m-Verband $A = V\Omega$ haben nun noch eine Invarianzeigenschaft bei Homomorphismen, die unter der Voraussetzung der Distributivität allein nicht bewiesen werden konnte:

4.5. SATZ 4. *A sei $\uparrow$-atomarer* m-*Verband. Sei ferner a aus A und η ein Homomorphismus von a in g. Dann ist $a^\eta \subset a$.*

BEWEIS. Man sieht zunächst, daß man sich beim Beweis auf voll irreduzible $a = i \in H$ beschränken kann. Denn ist die Behauptung für solche gezeigt, so folgt für beliebiges $a \in A$

$$a^\eta = \Big(\bigvee_{i \in \tilde{a}} i\Big)^\eta = \bigvee_{i \in \tilde{a}} i^\eta \subset \bigvee_{i \in \tilde{a}} i = a.$$

Wäre die Menge der $i \in H$, für welche der Satz falsch ist, nicht leer, so gäbe es ein $f \in H$, das minimal ist mit der Eigenschaft: Es gibt einen Homomorphismus η von f in g mit $f^\eta \not\subset f$. Aus der Minimalität von f folgt für alle $k \in H$ mit $k \subset' f$, daß $k^\eta \subset k$ gilt, – somit $f'^\eta \subset f'$.

η induziert einen Homomorphismus η_0 von $f - f'$ auf $f^\eta - f'^\eta$; dieser kann wegen $f^\eta \not\subset f'^\eta$ nicht der Nullhomomorphismus sein – aus der Einfachheit von $f - f'$ folgt also, daß er Isomorphismus ist: $f^\eta - f'^\eta \cong f - f'$.

Im Verbande der Untergruppen von $g - f'^\eta$, welcher gleichzeitig mit A den Voraussetzungen des Satzes genügt, ist (wegen $f \in H$) $f - f'^\eta$ voll irreduzibel und es ist $f^\eta - f'^\eta \not\subset f - f'^\eta$ (da $f^\eta \not\subset f$); $f^\eta - f'^\eta$ ist wegen der eben abgeleiteten Isomorphie Atom in diesem Verbande: Es folgt $f - f'^\eta \not\subset f^\eta - f'^\eta$ und $f^\eta - f'^\eta \cong f - f' \cong (f - f'^\eta) - (f' - f'^\eta)$ entgegen der Aussage von Satz 3.

Aus Satz 4 hat man sofort als

4.6. Folgerung 1. *In einem $\uparrow$-atomaren* m-*Verbande $A = V\Omega$ sind keine zwei verschiedenen Gruppen Ω-isomorph.*

4.7. Folgerung 2. *$A = V\Omega$ sei $\uparrow$-atomarer* m-*Verband. Dann ist jedes $a \in A$ „Ω-vollinvariant", d. h. $Z\Omega$-Gruppe.*

(Hierbei ist $Z\Omega$, wie in § 1 definiert, der Zentralisator von Ω im Ringe Γ aller Endomorphismen der Gruppe g ohne Operatoren.)

Die Aussage 4.7 läßt sich auch (in der in 1.2 eingeführten Terminologie) in der Form $V\Omega \subset_m VZ\Omega$ schreiben. Wegen $V\Phi V\Omega = V\Omega$ (1.2) ist nun auch $\Omega^* = \Phi V\Omega = \Phi A$ ein A „definierender" Ring: $V\Omega^* = A$. Nach Definition von ΦA folgt also unter den Voraussetzungen von Satz 4: $Z\Omega^* \subset_m \Phi A = \Omega^*$; $Z\Omega^*$ liegt also im Zentrum des Ringes Ω^*, und wir haben aus Satz 4 die

4.8. Folgerung 3. *$A = V\Omega$ sei $\uparrow$-atomarer* m-*Verband. Dann ist der Zentralisator des Ringes ΦA ein kommutativer Ring.*

Noch eine letzte Folgerung aus Satz 4 sei genannt:

Sei g die additive Gruppe Ω^+ eines („abstrakten") Ringes Ω, (A also der Verband der Rechtsideale von Ω). Linksmultiplikation der $\omega \in \Omega^+$ mit einem $\lambda \in \Omega$ bedeutet einen Endomorphismus

$$\omega \to \lambda\omega \qquad (\omega \in \Omega^+)$$

von Ω^+, und dieser ist wegen $\lambda(\omega\varrho) = (\lambda\omega)\varrho$ ($\varrho \in \Omega$) ein Ω-Endomorphismus. Somit ergibt sich

4.9. Folgerung 4. *Ω sei ein Ring mit Einselement. Der Verband der Rechtsideale von Ω sei $\uparrow$-atomarer* m-*Verband. Dann ist jedes Rechtsideal in Ω zweiseitig.*

4.10. Daß es in Satz 4 nicht genügt, die Distributivität von A vorauszusetzen, zeigt das folgende Beispiel:

g sei die additive Gruppe der rationalen Zahlen, A der Verband aller ihrer Untergruppen (also etwa $\Omega =$ Ring der ganzen Zahlen). Man rechnet leicht nach, daß A distributiv ist. Wir zeigen, daß g keine v. i. Untergruppen enthält; also sicher nicht glatt ist.

Nach Satz 1 müßte eine v. i. Untergruppe zyklisch sein, etwa $= \{\varrho\}$. Seien π, π' zwei verschiedene Primzahlen. Die Gruppen $\{\varrho\,\pi\}$, $\{\varrho\,\pi'\}$ sind echt in $\{\varrho\}$ enthalten. Es ist $(\pi, \pi') = 1$, also $1 = \pi\xi + \pi'\xi'$ (ξ, ξ' ganze Zahlen), und

$$\varrho = \varrho \cdot 1 = \varrho\,\pi\,\xi + \varrho\,\pi'\,\xi' \in \{\varrho\,\pi\} \cup \{\varrho\,\pi'\}.$$

Also ist $\{\varrho\}$ Verbindung zweier echter Untergruppen.

Ordnet man jeder rationalen Zahl ϱ die Zahl $\varrho^\eta = \varrho/2$ zu, so ergibt sich ein Endomorphismus η von g. Er bildet die Untergruppe der ganzen Zahlen nicht in sich ab.

Es ist dem Verfasser nicht bekannt, ob man beim Beweise von Satz 4 ohne die $\uparrow$-Atomarität von A auskommen kann.

§ 5. Spezialisierung auf Gruppen, die ihr eigener Sockel sind

Wir spezialisieren auf den Fall, daß die Gruppe g ihr eigener Ω-Sockel ist, d.h. von ihren einfachen Ω-Untergruppen erzeugt wird.

5.1. Sei zunächst daran erinnert, daß in diesem Falle die Distributivität von A jeder der folgenden Eigenschaften äquivalent ist:

(1) A ist Boolesch und atomar[2]).

(2) A ist verbandsisomorph einer vollen Potenzmenge $\mathfrak{P}(m)$. (Wir schreiben $A \cong \mathfrak{P}(m)$. Als m kann stets die Menge P_A der Atome in A genommen werden.) A besteht dann genau aus den sämtlichen „direkten Verbindungen" — nunmehr direkten Summen im gruppentheoretischen Sinne — $\forall' Q$, $Q \subset_m P$.

(3) A ist m-Verband und jedes $i \in H$ Atom. (Insbesondere erfüllt H die Minimalbedingung, ist A also nach MENZEL [12], Satz 3, ↑-atomar.)

Wir zeigen

5.2. SATZ 5. *Die Gruppe g sei von ihren minimalen Ω-Untergruppen erzeugt. Dann sind äquivalent*

(1) *A ist distributiv.*

(1′) *$A \cong \mathfrak{P}(P_A)$, und A besteht aus den sämtlichen direkten Summen $\sum' Q$ mit $Q \subset_m P_A$.*

(2) *Keine zwei Atome in A sind als Ω-Gruppen isomorph.*

(2′) *Für jedes $a \in A$ und jeden Homomorphismus η von a in g gilt $a^\eta \subset a$.*

(3) *$g = \sum' P_A$*[3]).

(3′) *Jedes $a \in A$ ist eindeutig als direkte Summe einer Menge von Atomen in A dargestellt.*

(Die Bezeichnung ist so gewählt, daß die Implikation „aus (n') folgt (n)" trivial ist.)

BEWEIS. (α) Die Äquivalenz von (1), (1′), (2), (2′) ist klar nach 5.1 und Satz 4.

(β) Aus (1′) folgt (3′). Sei also A Boolesch, $a \in A$, $a = \forall X$ mit $X \subset_m P_A$. Für jedes $x_0 \in X$ gilt dann $x_0 \cap a = x_0 \cap \forall X = \bigvee_{x \in X} (x_0 \cap x) = x_0$. Es folgt $x_0 \subset a$. Für ein $p \in P_A$ mit $p \subset a = \forall X$ gilt andererseits nach MENZEL [12], 1.4, $p \in X$. Also muß X die zu a eindeutig bestimmte Menge $\tilde{a} = \{p;\ p \in P_A,\ p \subset a\}$ sein.

(γ) (3′) impliziert (3) ist trivial.

(δ) Aus (3) folgt (1):

Ist A nicht distributiv, so besitzt es zwei isomorphe Atome p, q; sei $q = p^\sigma$.

Sei $r = \{\alpha + \alpha^\sigma;\ \alpha \in p\}$. Es ist $r \neq 0$ und (wegen der Ω-Zulässigkeit von σ) $r \in A$. Ferner gilt $p \cup r = q \cup r = p \cup q$. Für ein $\delta \in p \cap r$ folgt $\delta = \alpha + \alpha^\sigma \in p$, also $\alpha^\sigma \in p$, $\alpha^\sigma \in p \cap q = 0$, $\alpha = 0$, $\delta = 0$. Wir haben $p \cap r = 0$ und analog $q \cap r = 0$. Mit $v = p \dotplus q$ ergibt sich also, daß v die verschiedenen Darstellungen

$$v = p \dotplus q = p \dotplus r = q \dotplus r$$

als direkte Summe von Atomen hat. Also kann die Verbindung $g = \forall P_A$ nicht direkte Summe sein. (Teil (δ) des Beweises ist analog dem von BEHRENS in [7] beim Beweis des dortigen Satzes 1 angewandten Schlußverfahren).

---

[2]) Ein Verband A heißt „atomar", wenn es zu jedem $a \in A$, $a \neq 0$, ein Atom (d.h. ein minimales Verbandselement) p mit $p \subset a$ gibt.

[3]) Wir gebrauchen für die direkte Summe die abkürzende Schreibweise $\sum' P_A$ statt $\sum'_{p \in P_A} p$

Die folgenden Aussagen stellen eine Art Umkehrung von Satz 5 dar:

5.3. SATZ 6.

(I) *Sei* $g=\sum' P$ *eine beliebige direkte Zerlegung der Gruppe* g *(ohne Operatoren) in Untergruppen* $p\in P$. *Dann gilt*

(a) *Die sämtlichen direkten Teilsummen* $\sum' Q$, $Q\subset_m P$ *bilden einen Booleschen atomaren Verband* $A\cong\mathfrak{P}(P)$, *und dieser ist vollständiger Teilverband des Verbandes* G *aller Untergruppen von* g.

(b) *Es gibt einen Ring* $\mathsf{T}\subset_m\Gamma$, *so daß* $A=V\mathsf{T}$ *wird.*

(II) *Sei* A *vollständiger Teilverband des Untergruppenverbandes* G *der Gruppe* g *(ohne Operatoren) und* $A\cong\mathfrak{P}(m)$. *Dann ist* $g=\sum' P$, *wo* P *die Menge der Atome von* A *ist.* A *besteht aus den sämtlichen direkten Teilsummen* $\sum' Q$, $Q\subset_m P$, *und es gibt einen Ring* $\mathsf{T}\subset_m\Gamma$ *mit* $A=V\mathsf{T}$.

(III) *Als Ring* T *in* (I) *und* (II) *kann man den Zentralisator der Menge* E, *welche aus den zur genannten direkten Zerlegung von* g *gehörigen Zerlegungsendomorphismen besteht, wählen.*

BEWEIS. *Zu* (I):

(a) Ist ohne weiteres klar: Jedem $a\in A$ ordne man die Menge $\langle a\rangle=\{p;\ p\in P,\ p<a\}$ zu.

(b) Zu jedem $p\in P$ gehört der Zerlegungsendomorphismus $\varepsilon_p\in\Gamma$, welcher jedes $\gamma\in g$, $\gamma=\gamma_{p_1}+\cdots+\gamma_{p_n}$ ($\gamma_{p_i}\in p_i\in P$) auf seine p-Komponente γ_p abbildet. Sei $\mathsf{E}=\{\varepsilon_p;\ p\in P\}$. E ist eine Menge orthogonaler Idempotente in Γ. Wir zeigen $V\mathsf{E}=A$. Die $p\in P$ sind E-zulässig, und damit ist es auch jede Summe $\sum' Q$, $Q\subset_m P$; es folgt $V\mathsf{E}\subset_m A$. Ist andererseits $x\in G$, $x\notin A$, so gibt es ein $\xi\in x$ und ein $p\in P$ mit $\xi_p\notin x$; man hat $x\varepsilon_p\notin x$, $x\notin V\mathsf{E}$, also $V\mathsf{E}\subset_m A$.

Sei $\mathsf{T}=\mathsf{ZE}$ der Zentralisator der Menge E in Γ. Aus der Orthogonalität der $\varepsilon\in\mathsf{E}$ folgt sofort $\mathsf{E}\subset_m\mathsf{T}$, also $V\mathsf{T}\subset_m V\mathsf{E}=A$. Für ein $\alpha\in a$, $\alpha=\alpha\varepsilon_1+\cdots+\alpha\varepsilon_n$, und ein $\tau\in\mathsf{T}$ gilt andererseits $\alpha\tau=\alpha\tau\varepsilon_1+\cdots+\alpha\tau\varepsilon_n$ (wegen $\tau\in\mathsf{ZE}$) mit $\alpha\tau\varepsilon_i\in p_i<a$, also $\alpha\tau\in a$. Es folgt $A\subset_m V\mathsf{T}$, und damit $A=V\mathsf{E}=V\mathsf{T}$.

Zu (II) *und* (III). Nach Definition eines vollständigen Teilverbandes von G enthält ein solcher das Allelement g von G (s. HERMES [9], S. 29). Es folgt die direkte Zerlegung $g=\sum' P$, und die übrigen Behauptungen ergeben sich nun aus (I).

Über den Ring T nun läßt sich noch etwas mehr sagen:

5.4. *Sei* $g=\sum' P$ *eine direkte Zerlegung der Gruppe* g, $\mathsf{T}=\mathsf{ZE}$ *der Zentralisator der zu ihr gehörigen Menge von Zerlegungsendomorphismen,* $A=V\mathsf{T}$.

Dann gilt $\mathsf{T}=\Phi A=\Phi P$ (s. 1.2).

BEWEIS. Wegen $P\subset_m A$ ist trivialerweise $\mathsf{T}\subset_m\Phi V\mathsf{T}=\Phi A\subset_m\Phi P$. Sei andererseits $\varphi\in\Phi P$, also $p\varphi<p$ für alle $p\in P$. Für beliebiges $\gamma\in g$, $\gamma=\gamma\varepsilon_{p_1}+\cdots+\gamma\varepsilon_{p_n}$, und beliebiges $p\in P$ folgt dann

$$\begin{aligned}\gamma\varphi\varepsilon_p&=\gamma\varepsilon_{p_1}\varphi\varepsilon_p+\cdots+\gamma\varepsilon_{p_n}\varphi\varepsilon_p\\&=\gamma\varepsilon_p\varphi\varepsilon_p\\&=\gamma\varepsilon_p\varphi\quad(\text{da }\gamma\varepsilon_p\varphi\in\varphi<p).\end{aligned}$$

φ ist also mit jedem $\varepsilon_p \in \mathsf{E}$ vertauschbar, $\varphi \in \mathsf{ZE} = \mathsf{T}$. Hieraus folgt die Behauptung.

Bei gegebener Zerlegung $g = \sum' P$, gegebener Untergruppenmenge P also, läßt sich A auch noch etwas anders charakterisieren:

Ist allgemein C ein vollständiger Verband, M eine Teilmenge von C, so gibt es stets einen eindeutig bestimmten kleinsten vollständigen Teilverband von C, der M enthält. Wir bezeichnen diesen *„von M in C erzeugten" vollständigen Teilverband* mit $[M]_C$.

Man sieht dann sofort, daß $A = [P]_G$ wird. Denn $[P]_G$ muß einerseits alle Verbindungen $\mathsf{V}Q$, $Q \subset_m P$, also A enthalten; andererseits ist A vollständiger Teilverband von G und enthält P.

Insgesamt haben wir das folgende Ergebnis erhalten:

5.5. SATZ 7. *Unter den Voraussetzungen zu Satz* 6, (I) *oder* (II), *gilt für den Verband* A:

$$A = V\, \Phi A\,,$$

für den Ring $\mathsf{T} = \mathsf{ZE}$:

$$\mathsf{T} = \Phi\, V\, \mathsf{T}.$$

Es bestehen nämlich eineindeutige reziproke Beziehungen zwischen

1. *den vollständigen Teilverbänden A von G mit $A \cong \mathfrak{P}(m)$;*
2. *den direkten Zerlegungen $g = \sum' P$ der Gruppe g, und*
3. *denjenigen Unterringen T von Γ, welche Zentralisatoren eines Orthogonalsystems $\mathsf{E} \subset_m \Gamma$ von Idempotenten mit $g = \bigvee_{\varepsilon \in E} g\,\varepsilon$ sind.*

Hierbei ist zu gegebenem A

$$P = P_A \quad \textit{(Menge der Atome in } A\textit{)}$$

$$\mathsf{T} = \Phi A$$

zu gegebener Zerlegung $g = \Sigma' P$, also gegebenem P bzw. gegebenem Orthogonalsystem E

$$\mathsf{T} = \mathsf{ZE} = \Phi\, V\, P$$

$$A = V\,\mathsf{E} = [P]_G = \{\textstyle\sum' Q;\ Q \subset_m P\}$$

zu gegebenem Ringe T

$$A = V\,\mathsf{T}$$

$$P = \textit{Menge der } \mathsf{T}\textit{-einfachen Untergruppen von } g.$$

Wir haben noch die triviale Folgerung:

5.6. *Hat der Verband $A = V\Omega$ die Eigenschaft $A \cong \mathfrak{P}(m)$, so ist Ω im Zentralisator $\mathsf{T} = \mathsf{ZE}$ enthalten.*

BEWEIS. Es ist $\Omega \subset_m \Phi V \Omega = \Phi A = \mathsf{T}$.

Literatur

[1] Baer, R.: Linear Algebra and Projective Geometry. New York: Ac. Press Inc. 1952. — [2] Baer, R.: Automorphism Rings of Abelian Operator Groups. Annals of Math. **44**, 192–226 (1943). — [3] Baer, R.: Endomorphism Rings of Operator Loops. Trans. A.M.S. **61**, 517–529 (1947.) — [4] Baer, R.: A Unified Theory of Projective Spaces and Finite Abelian Groups. Trans. A.M.S. **52**, 283–345 (1942). — [5] Behrens, E. A.: Zweiseitige Ideale in Algebren endlichen Ranges. Math. Annalen **132**, 95–105 (1956). — [6] Behrens, E. A.: Algebren mit vorgeschriebenem endlichem distributivem Idealverband. Math. Annalen **133**, 79–90 (1957). — [7] Behrens, E. A.: Eine Charakterisierung der T-Moduln mit distributivem Untermodulverband bei halbprimärem T. Archiv d. Math. **8**, 258–273 (1957). — [8] Birkhoff, G.: Lattice Theory. A.M.S. Coll. Publ. **25**, 2nd ed. (1948). — [9] Hermes, H.: Einführung in die Verbandstheorie. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1955. — [10] Jacobson, N.: Structure of Rings. A.M.S. Coll. Publ. **37**, (1956). — [11] Kaplansky, I.: Infinite Abelian Groups. Univ. Mich. Press 1956. — [12] Menzel, W.: Über den Untergruppenverband einer Abelschen Operatorgruppe. Teil I: $\mathfrak{m}$-Verbände. Math. Z. **74**, 39–51 (1960). — [13] Specht, W.: Gruppentheorie. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1957. — [14] Suzuki, M.: Structure of a Group and its Lattice of Subgroups. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1956. — [15] Wielandt, H.: Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Z. **45**, 209–244 (1939). — [16] Zassenhaus, H.: The Theory of Groups. Chelsea, New York 1958.

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 23. Juni 1959)

COHEN, E.
Math. Zeitschr. 74, 66–80 (1960)

Arithmetical functions associated with the unitary divisors of an integer

By
ECKFORD COHEN

1. INTRODUCTION. A divisor $d>0$ of the positive integer n will be called *unitary* if $d\delta=n$, $(d,\delta)=1$, while the divisors d,δ together will be called *complementary* divisors of n. In this paper we consider the *unitary convolution*,

$$f(n)=\sum_{\substack{d\delta=n\\(d,\delta)=1}} g(d)\,h(\delta), \tag{1.1}$$

of arithmetical functions $g(n)$, $h(n)$, it being understood that the summation in (1.1) is extended over the totality of ordered pairs of complementary unitary divisors of n.

The following terminology and notation will be needed. For integers $a, b, b>0$, let us denote by $(a,b)_*$ the greatest divisor of a which is a unitary divisor of b; in case $(a,b)_*=1$, a will be said to be *semiprime* to b. If a and b are positive, $a\neq b$, then the pair $\{a,b\}$ will be termed *co-semiprime*, provided that the smaller of the pair is semiprime to the other. The pair $\{b,b\}$ will be considered a co-semiprime pair only in case $b=1$.

The principal aim of this paper is to illustrate a method in asymptotic number theory whose basic feature is the unitary convolution. This method will be applied to the following questions: (A) the density δ_2 of the set S_2 of the ordered pairs of co-semiprime integers, (B) the average order of the *core* $\gamma(n)$ of n (the maximal square-free divisor of n), (C) the distribution of the *exponentially odd* integers, that is, integers in whose canonical prime-power factorization (3.5) all occurring exponents are odd. We present now a brief survey of the paper.

In § 2 we introduce and evaluate "unitary" analogues of some of the basic arithmetical functions. Corresponding to the Euler φ-function, the *unitary totient* $\varphi^*(n)$ is defined to be the number of integers contained in a residue system (mod n) and semiprime to n. We obtain in (2.8) a simple representation of $\varphi^*(n)$ as a unitary convolution. This result is analogous to the familiar Dedekind-Liouville evaluation of $\varphi(n)$,

$$\varphi(n)=\sum_{d\delta=n}\mu(d)\,\delta, \tag{1.2}$$

where $\mu(n)$ denotes the Möbius function. In our discussion of $\varphi^*(n)$ in § 2, the above definition is replaced by an equivalent definition which makes

possible a simultaneous treatment of $\varphi^*(n)$ and the unitary analogue $\mu^*(n)$ of $\mu(n)$. This is accomplished by introducing a trigonometric sum $c^*(m, n)$ for the case of unitary divisors, corresponding to RAMANUJAN'S sum $c(m, n)$ in the ordinary case. A unitary analogue of the Möbius inversion formula is also proved (Theorem 2.3).

Section 3 is concerned with preliminaries to the asymptotic considerations of the remaining sections. In § 4 we obtain an estimate (Theorem 4.1) for the average order of $f(n)$ as defined by (1.1), with $h(n)=n$ and $g(n)$ bounded. The cases $g(n)=1$ and $g(n)=\mu^*(n)$, respectively, yield results for the sum $\sigma^*(n)$ of the unitary divisors of n (Corollary 4.1) and for $\varphi^*(n)$, (Corollary 4.2). Application is made in Theorem 4.2 to the distribution of the set S_2 defined above. In particular, S_2 is shown to have density α (Corollary 4.2.1), where α is defined by (3.11). Since the subset T_2 of *relatively* prime (co-prime) pairs has density $6/\pi^2$ [*6*, Theorem 332], it must follow that $6/\pi^2 \leqq \delta_2 \leqq 1$. Actually, on the basis of Lemma 3.6, we have $6/\pi^2 < \delta_2 < 1$, which shows that the set S_2 is substantially larger than T_2.

In § 5 we consider the average order of $f(n)$ with $h(n)=\mu^2(n)n$ and $g(n)$ bounded (Theorem 5.1). In the case $g(n)=1$, this theorem reduces to a result for the sum $\sigma'(n)$ of the unitary, square-free divisors of n (Corollary 5.1.1), while in case $g(n)=\mu(n)$, it yields a result for the function $\mu^2(n)\varphi(n)$, (Corollary 5.1.2). The latter result leads to an estimate for the average of the function $\gamma(n)$, (Theorem 5.2). This estimate is an improvement on an earlier approximation proved by WIGERT using analytical methods [*9*].

In § 6 we consider the set Q^* of the exponentially odd numbers defined above. The principal result concerning the distribution of Q^* is contained in Theorem 6.1. We point out the occurrence of the constant α in this result as in the results obtained previously for S_2 and $\gamma(n)$.

While the unitary convolution method appears limited in scope, it is noteworthy that the techniques involved in its application in this paper are elementary in the strictest possible sense. In particular, it is nowhere necessary to introduce generating functions for those arithmetical functions which enter into the discussion.

HISTORICAL REMARK. The function $\varphi^*(n)$ occurs as a particular case of a more general function discussed briefly by DIRICHLET [*4*, § 11], [*3*, p. 122] and later by LERCH [*7*], [*3*, p. 136]. In addition, the function $\sigma^*(n)$ was touched upon by FEKETE [*5*], [*3*, p. 321]. However, the intrinsic interest of these functions seems not to have been recognized by earlier writers. For a discussion of the formal properties of the unitary convolution (1.1), we refer to VAIDYANATHASWAMY [*8*, § II, 6].

2. UNITARY ANALOGUES OF THE ELEMENTARY FUNCTIONS. The set T of integers semiprime to n and contained in a residue system $S \pmod n$ will be designated the *semi-reduced residue system* $\pmod n$ *contained in* S. If S consists of the integers $1, \ldots, n$, then T will be called a *least positive*,

semireduced residue system (mod n). It will be noted that any positive integer $a \leqq n$ can be represented *uniquely* in the form $a = dx$, where d is a unitary divisor of n and x is contained in a least positive, semi-reduced residue system (mod n/d); in fact, $d = (a, n)_*$. This observation can be restated as the enumerative principle:

LEMMA 2.1. *The integers dx, where d ranges over the unitary divisors of n, and for each d, x ranges over a semi-reduced residue system* (mod n/d), *constitute a residue system* (mod n).

With $e(m, n) = \exp(2\pi i m/n)$, we define for arbitrary integers m,

$$c^*(m, n) = \sum_{(x,n)_*=1} e(mx, n), \tag{2.1}$$

the summation extending over the integers x of a semi-reduced residue system (mod n). Obviously, $c^*(m, n)$ is independent of the residue system in the summation.

It is evident that if x ranges over a semi-reduced residue system (mod n) and $(a, n) = 1$, *then ax also ranges over a semi-reduced residue system* (mod n). Hence

LEMMA 2.2. *If $(a, n) = 1$, then $c^*(am, n) = c^*(m, n)$.*

We prove first

THEOREM 2.1.

$$\sum_{\substack{d\delta = n \\ (d,\delta)=1}} c^*(m, d) = \varepsilon(m, n) \equiv \begin{cases} n & (n \mid m) \\ 0 & (n \nmid m). \end{cases} \tag{2.2}$$

PROOF. It is a familiar fact that

$$\eta(m, n) \equiv \sum_{a \,(\mathrm{mod}\, n)} e(ma, n) = \varepsilon(m, n).$$

But by Lemma 2.1, we have

$$\eta(m, n) = \sum_{\substack{d\delta = n \\ (d,\delta)=1}} \sum_{(x,\delta)_*=1} e(mdx, n) = \sum_{\substack{d\delta = n \\ (d,\delta)=1}} c^*(m, \delta).$$

Combining these two relations, (2.2) results.

Define now

$$\varphi^*(n) = c^*(0, n), \qquad \mu^*(n) = c^*(1, n); \tag{2.3}$$

the definition of $\varphi^*(n)$ in (2.3) is evidently equivalen to that given in the Introduction. We thus have the corollaries,

Corollary 2.1.1 ($m = 0$).

$$\sum_{\substack{d\delta = n \\ (d,\delta)=1}} \varphi^*(d) = n; \tag{2.4}$$

Corollary 2.1.2 ($m=1$).

$$\sum_{\substack{d\delta=n\\(d,\delta)=1}} \mu^*(d) = \varepsilon(n) \equiv \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 0 & (n>1). \end{cases} \tag{2.5}$$

Next we prove

THEOREM 2.2. *The function $c^*(m,n)$ is multiplicative as a function of n; that is, $c^*(m,1)=1$, and if $n=n_1n_2$, $(n_1,n_2)=1$, then $c^*(m,n)=c^*(m,n_1)\,c^*(m,n_2)$.*

PROOF. If x_1 and x_2 range over residue systems (mod n_1) and (mod n_2) respectively, then $x_2n_1+x_1n_2$ ranges over a residue system (mod n_1n_2). If $(x_2n_1+x_1n_2,\, n)_*=1$, then since $(n_1,n_2)=1$, it must follow that $(x_1,n_1)_*=(x_2,n_2)_*=1$. Conversely, if either $(x_1,n_1)_*$ or $(x_2,n_2)_*$ is $\neq 1$, then $(x_2n_1+x_1n_2,\, n)_*\neq 1$. Hence the set $\{x_2n_1+x_1n_2\}$ yields a semi-reduced residue system (mod n) if x_1 and x_2 range over semi-reduced residue systems (mod n_1) and (mod n_2), respectively.

Therefore, by (2.1) one obtains, on placing $x=x_2n_1+x_1n_2$, and using the additivity of $e(m,n)$,

$$c^*(m,n) = \sum_{\substack{(x_1,n_1)_*=1\\(x_2,n_2)_*=1}} e\big(m(x_2n_1+x_1n_2),\, n\big)_* = c^*(m\,n_1,\, n_2)\,c^*(m\,n_2,\, n_1),$$

and the Theorem follows by Lemma 2.2.

COROLLARY 2.2.1 ($m=0$). *The function $\varphi^*(n)$ is multiplicative.*

COROLLARY 2.2.2 ($m=1$). *The function $\mu^*(n)$ is multiplicative.*

An important and simple consequence of the property (2.5) of $\mu^*(n)$ is the following analogue of the Möbius inversion formula.

THEOREM 2.3. *For arithmetical functions $f_1(n)$, $f_2(n)$,*

$$f_1(n) = \sum_{\substack{d\delta=n\\(d,\delta)=1}} f_2(d) \rightleftharpoons f_2(n) = \sum_{\substack{d\delta=n\\(d,\delta)=1}} \mu^*(d)\, f_1(\delta); \tag{2.6}$$

in particular, every arithmetical function $f_1(n)$ has a unique representation of the form $\Sigma_d f_2(d)$, where the summation is over the unitary divisors d of n.

PROOF. Suppose $f_2(n)$ to be defined as on the right of (2.6). Then

$$S \equiv \sum_{\substack{d\delta=n\\(d,\delta)=1}} f_2(d) = \sum_{\substack{d\delta=n\\(d,\delta)=1}} \sum_{\substack{DE=d\\(D,E)=1}} \mu^*(D)\, f_1(E) = \sum_{E\mid n} f_1(E) \sum_{\substack{D\delta=\frac{n}{E}\\(D\,E,\,\delta)=1\\(D,E)=1}} \mu^*(D)$$

$$= \sum_{\substack{E\mid n\\(E,\frac{n}{E})=1}} f_1(E) \sum_{\substack{D\delta=\frac{n}{E}\\(D,\delta)=1}} \mu^*(D),$$

so that $S=f_1(n)$, by Corollary 2.1.2. The converse can be similarly proved.

As a consequence of Theorem 2.3 and (2.2), the following evaluation of $c^*(m,n)$ results.

THEOREM 2.4.

$$c^*(m, n) = \sum_{\substack{d\,\delta = n \\ (d,\,\delta)=1,\ \delta \mid m}} \mu^*(d)\,\delta. \tag{2.7}$$

COROLLARY 2.4.1 $(m=0)$.

$$\varphi^*(n) = \sum_{\substack{d\,\delta = n \\ (d,\,\delta)=1}} \mu^*(d)\,\delta. \tag{2.8}$$

Finally, we deduce an explicit evaluation of $\mu^*(n)$. For this purpose, let $\omega(n)$ denote the number of distinct prime divisors of n, $\omega(1)=0$.

THEOREM 2.5.

$$\mu^*(n) = (-1)^{\omega(n)}; \tag{2.9}$$

that is, $\mu^*(n)$ is $+1$ or -1 according as n has an even or an odd number of distinct prime divisors.

PROOF. If suffices, by virtue of the multiplicative property of $\mu^*(n)$ proved in Corollary 2.2.2, to verify (2.9) in the case $n=p^k$, p prime. But by (2.5), $\mu^*(1)=1$, and if $k>0$, $\mu^*(p^k)=-1$. This proves the theorem.

REMARK 2.1. In particular, $\mu^*(n)$ is bounded.

3. BACKGROUND. This section consists of a number of lemmas which will be referred to repeatedly in the later sections. In the remainder of the paper x will denote a real variable, usually $\geqq 1$. Let $\tau(n)$ denote the number of divisors of n. The following estimates are well known [6, §§ 18, 18.2].

LEMMA 3.1. *For all $\varepsilon>0$, $x\geqq 2$,*

$$\tau(n) = O(n^{\varepsilon}); \tag{3.1}$$

$$T(x) \equiv \sum_{n \leqq x} \tau(n) = O(x \log x). \tag{3.2}$$

Define now $q(n)$ to be 1 or 0 according as n is or is not square-free, and place $\mu_2(n)=\mu(m)$ if $n=m^2$ is a square, $=0$ otherwise.

LEMMA 3.2.

$$q(n) = \sum_{d \mid n} \mu_2(d); \tag{3.3}$$

$$Q(x) \equiv \sum_{n \leqq x} q(n) = \frac{6x}{\pi^2} + O(\sqrt{x}). \tag{3.4}$$

These are the classical elementary results concerned with the distribution of the square-free numbers [6, § 18.6].

Suppose now that n possesses k distinct prime factors, $p_1, \ldots, p_k$, and place

$$n = p_1^{t_1} \ldots p_k^{t_k}. \tag{3.5}$$

Further, let $J(n)$ denote the Jordan totient of second order [3, p. 147].

LEMMA 3.3. *If n is defined by* (3.5), *then*

$$\varphi(n) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad J(n) = n^2 \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right); \tag{3.6}$$

moreover, for every $\varepsilon > 0$,

$$\frac{J(n)}{n^{2-\varepsilon}} \to \infty \quad as \quad n \to \infty. \tag{3.7}$$

The result in (3.7) is the case $s=2$ of [2, Lemma 12]; it can be proved in the same way as the corresponding result for $\varphi(n)$, [6, Theorem 327]. The other statements of Lemma 3.3 are well known. Generalizing (1.2), the Legendre totient $\varphi(x, n)$, defined to be the number of integers $\leqq x$ which are prime to n, has the evaluation [3, p. 115],

$$\varphi(x, n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \left[\frac{x}{d}\right]. \tag{3.8}$$

We use this fact to prove the following useful result. Let $\vartheta(n)$ denote the number of square-free divisors of n; then

LEMMA 3.4.

$$\varphi(x, n) = \frac{x\varphi(n)}{n} + O\left(\vartheta(n)\right), \tag{3.9}$$

uniformly in x.

REMARK 3.1. In computations it is sometimes convenient to replace $\vartheta(n)$ by the more familiar function $\tau(n)$; obviously, $\vartheta(n) \leqq \tau(n)$.

PROOF. By (3.8) and the boundedness of $\mu(n)$,

$$\varphi(x, n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \left(\frac{x}{d} + O(1)\right) = x \sum_{d \mid n} \frac{\mu(d)}{d} + O\left(\vartheta(n)\right),$$

and (3.9) follows on the basis of (1.2).

The remaining lemmas are concerned with the constant α mentioned in the Introduction.

LEMMA 3.5. *The series,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^*(n)\varphi(n)}{n^3}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\varphi(n)}{nJ(n)} \tag{3.10}$$

converge absolutely; denoting their sums by S and S' respectively,

$$S = S' = \alpha \equiv \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p(p+1)}\right) \tag{3.11}$$

where the product is extended over the primes.

PROOF. The first series in (3.10) converges absolutely, because $\mu^*(n)$ is bounded (Remark 2.1) and $\varphi(n) \leqq n$. The absolute convergence of the second series is a consequence of (3.7). Since the general terms of both series are multiplicative as functions of n, they may be expanded into infinite products of Euler type [6, § 17.4]. In particular, by (3.6)

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^*(n)\,\varphi(n)}{n^3} = \prod_p \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^*(p^k)\,\varphi(p^k)}{p^{3k}} \right) = \prod_p \left\{ 1 - \left(\frac{p-1}{p}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p^2}\right)^k \right\}$$

$$= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2+p}\right).$$

A similar product expansion is obtained for S', thereby proving the Lemma.

Let $\zeta(s)$ denote the Riemann ζ-function, $s > 1$.

LEMMA 3.6. *If α is defined by* (3.11), *then*

$$6/\pi^2 < \alpha < 1. \tag{3.12}$$

PROOF. By (3.11) and the fact that $\zeta(2) = \prod \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}$.

4. THE CASE $h(n) = n$ AND PROBLEM A. We prove first

LEMMA 4.1.

$$\varphi_1(x, n) \equiv \sum_{\substack{m \leqq x \\ (m,n)=1}} m = \frac{x^2 \varphi(n)}{2n} + O\big(x\,\vartheta(n)\big). \tag{4.1}$$

PROOF. By partial summation and the definition of $\varepsilon(n)$, (2.5),

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, n) &= \sum_{m \leqq x} m\,\varepsilon\big((m, n)\big) = -\sum_{m \leqq x} \sum_{a \leqq m} \varepsilon\big((a, n)\big) + \sum_{m \leqq x} \varepsilon\big((m, n)\big)\,([x] + 1) \\ &= -\sum_{m \leqq x} \varphi(m, n) + ([x] + 1)\,\varphi(x, n) \equiv \Sigma_1 + \Sigma_2; \end{aligned} \tag{4.2}$$

let us say. Appealing to (3.9), one obtains

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\equiv -\sum_{m \leqq x} \varphi(m, n) = -\sum_{m \leqq x} \left(\frac{m\,\varphi(n)}{n} + O\big(\vartheta(n)\big) \right) \\ &= -\frac{\varphi(n)}{n} \sum_{m \leqq x} m + O\big(x\,\vartheta(n)\big) = -\frac{\varphi(n)}{n} \left(\frac{x^2}{2} + O(x) \right) + O\big(x\,\vartheta(n)\big); \end{aligned}$$

therefore, since $\varphi(n) \leqq n$, $\vartheta(n) \geqq 1$, one deduces

$$\Sigma_1 = -\frac{\varphi(n)\,x^2}{2n} + O\big(x\,\vartheta(n)\big). \tag{4.3}$$

Also,

$$\Sigma_2 \equiv ([x] + 1)\,\varphi(x, n) = x\,\varphi(x, n) + O\big(\varphi(x, n)\big) = x\,\varphi(x, n) + O(x),$$

so that by Lemma 3.4,

$$\Sigma_2 = \frac{\varphi(n)\, x^2}{n} + O\left(x\, \vartheta(n)\right). \tag{4.4}$$

The Lemma results on collecting (4.2), (4.3), and (4.4).

We now prove the first main result of this section. For this purpose, place $h(n) = n$ in (1.1) so that

$$f(n) = \sum_{\substack{d\,\delta = n \\ (d,\,\delta)=1}} g(d)\, \delta. \tag{4.5}$$

THEOREM 4.1. *If $f(n)$ is defined by* (4.5) *and $g(n)$ is bounded, then for $x \geqq 2$,*

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)\, \varphi(n)}{n^3} + O(x \log^2 x). \tag{4.6}$$

REMARK 4.1. The series is absolutely convergent because $g(n)\, \varphi(n) = O(n)$.

PROOF. By (4.5),

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \sum_{\substack{d\,\delta \leq x \\ (d,\,\delta)=1}} g(d)\, \delta = \sum_{d \leq x} g(d)\, \varphi_1\left(\frac{x}{d}, d\right);$$

hence, applying Lemma 4.1 and Remark 3.1, it follows, since $g(n)$ is bounded, that

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \frac{x^2}{2} \sum_{d \leq x} \frac{g(d)\, \varphi(d)}{d^3} + O\left(x \sum_{d \leq x} \frac{\tau(d)}{d}\right).$$

Now

$$\sum_{n \leq x} \frac{\tau(n)}{n} = \sum_{d\,\delta \leq x} \frac{1}{d\,\delta} \leq \left(\sum_{m \leq x} \frac{1}{m}\right)^2 = O(\log^2 x),$$

a fact which also may be deduced from (3.2). Thus

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)\, \varphi(n)}{n^3} + O\left(x^2 \sum_{n > x} \frac{\varphi(n)}{n^3}\right) + O(x \log^2 x).$$

However,

$$\sum_{n > x} \frac{\varphi(n)}{n^3} = O\left(\sum_{n > x} \frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right),$$

and the Theorem results immediately.

We note the corollaries corresponding to the cases $g(n) = 1$ and $g(n) = \mu^*(n)$. By [6, Theorem 288].

COROLLARY 4.1.1 $(g(n) = 1)$. *If $x \geqq 2$, then*

$$\sum_{n \leq x} \sigma^*(n) = \frac{\pi^2 x^2}{12\, \zeta(3)} + O(x \log^2 x). \tag{4.7}$$

Also, on the basis of (2.8) and Lemma 3.5, one obtains

COROLLARY 4.1.2 $(g(n)=\mu^*(n))$. *If* $x\geqq 2$, *then*

$$\Phi^*(x)\equiv\sum_{n\leqq x}\varphi^*(n)=\frac{\alpha x^2}{2}+O(x\log^2 x), \tag{4.8}$$

where α *is defined by* (3.11).

The result in (4.8) furnishes a means for solving Problem *A*. Let $S_2(x)$ denote the number of pairs $\{a, b\}$ with $1\leqq a\leqq x$, $1\leqq b\leqq x$ contained in S_2. With $\Phi^*(x)$ denoting the summatory function of $\varphi^*(n)$, we have

LEMMA 4.2.

$$S_2(x)=2\Phi^*(x)-1. \tag{4.9}$$

PROOF. For each b, $1\leqq b\leqq x$, choose all pairs $\{a, b\}$ such that a is contained in a least positive, semi-reduced residue system (mod b). The number of such pairs is $\Phi^*(x)$. Repeating this process with the rôles of a and b interchanged, one obtains in toto $2\Phi^*(x)$ co-semiprime pairs $\{a, b\}$ satisfying $1\leqq a\leqq x$, $1\leqq b\leqq x$, with the sole duplication of the pair $\{1, 1\}$. This establishes the Lemma.

THEOREM 4.2. *For* $x\geqq 2$,

$$S_2(x)=\alpha x^2+O(x\log^2 x). \tag{4.10}$$

PROOF. The result is an immediate result of Lemma 4.2 and Corollary 4.1.2.

COROLLARY 4.2.1. *The set* S_2 *has asymptotic density* α; *that is*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{S_2(x)}{x^2}=\alpha. \tag{4.11}$$

5. THE CASE $h(n)=\mu^2(n)n$ AND PROBLEM B. The following lemma can be easily proved in the manner of [*1*, (5.2), $k=1$, $s=2$] and is in fact a consequence of that result by Dirichlet multiplication.

LEMMA 5.1.

$$\zeta_n^*\equiv\sum_{\substack{m=1\\(m,n)=1}}^{\infty}\frac{\mu(m)}{m^2}=\frac{n^2}{\zeta(2)J(n)}. \tag{5.1}$$

The next result generalizes (3.4), $(n=1)$.

LEMMA 5.2.

$$Q_n(x)\equiv\sum_{\substack{m\leqq x\\(m,n)=1}}\mu^2(m)=\beta(n)x+O\left(\sqrt{x}\,\vartheta(n)\right), \tag{5.2}$$

where $\beta(n)=n\varphi(n)/\zeta(2)J(n)$.

REMARK 5.1. It is noted by (3.6) that $\beta(n) \leqq 1$.

PROOF. Let $q_n(m)$ be defined to be 1 if m is square-free and $(m, n) = 1$, and 0 otherwise. By (3.3) we have

$$q_n(m) = \varepsilon\big((m,n)\big)\, q(m) = \varepsilon\big((m,n)\big) \sum_{d^2 \delta = m} \mu(d).$$

Hence

$$Q_n(x) = \sum_{m \leqq x} q_n(m) = \sum_{\substack{d^2 \delta \leqq x \\ (d,n)=(\delta,n)=1}} \mu(d) = \sum_{\substack{d \leqq \sqrt{x} \\ (d,n)=1}} \mu(d)\, \varphi\Big(\frac{x}{d^2}, n\Big).$$

Application of Lemma 3.4 yields, by definition of ζ_n^*,

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= \frac{x\,\varphi(n)}{n} \sum_{\substack{d \leqq \sqrt{x} \\ (d,n)=1}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\Big(\sum_{\substack{d \leqq \sqrt{x} \\ (d,n)=1}} \vartheta(n) \Big) \\ &= \frac{x\,\varphi(n)\,\zeta_n^*}{n} + O\Big(\frac{x\,\varphi(n)}{n} \sum_{d > \sqrt{x}} \frac{1}{d^2} \Big) + O\big(\vartheta(n)\,\varphi(\sqrt{x}, n)\big) \\ &= \frac{x\,\varphi(n)\,\zeta_n^*}{n} + O\Big(\frac{\sqrt{x}\,\varphi(n)}{n}\Big) + O\big(\sqrt{x}\,\vartheta(n)\big), \end{aligned}$$

and Lemma 5.2 results by virtue of (5.1).

LEMMA 5.3.

$$Q_n'(x) \equiv \sum_{\substack{m \leqq x \\ (m,n)=1}} \mu^2(m)\, m = \frac{\beta(n)\, x^2}{2} + O\big(x^{\frac{3}{2}} \vartheta(n)\big), \tag{5.3}$$

where $\beta(n)$ is defined as in the preceding lemma.

PROOF. Using the notation introduced in Lemma 5.2, it follows by partial summation that

$$Q_n'(x) = \sum_{m \leqq x} q_n(m)\, m \equiv \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{5.4}$$

where

$$\Sigma_1 = -\sum_{m \leqq x} Q_n(m), \qquad \Sigma_2 = Q_n(x)\,([x] + 1).$$

By Lemma 5.2,

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= -\beta(n) \sum_{m \leqq x} m + O\Big(\vartheta(n) \sum_{m \leqq x} m^{\frac{1}{2}}\Big) \\ &= -\beta(n)\Big(\frac{x^2}{2} + O(x)\Big) + O\big(\vartheta(n)\, x^{\frac{3}{2}}\big), \end{aligned}$$

so that by Remark 5.1,

$$\Sigma_1 = -\frac{\beta(n)\, x^2}{2} + O\big(x^{\frac{3}{2}} \vartheta(n)\big). \tag{5.5}$$

Since for all n, $Q_n(x) \leqq Q_1(x) = Q(x)$, it follows by Lemma 3.2 that

$$\Sigma_2 = Q_n(x)\,(x + O(1)) = x\,Q_n(x) + O\big(Q(x)\big) = x\,Q_n(x) + O(x),$$

and therefore by (5.2),

$$\Sigma_2 = \beta(n)\,x^2 + O\big(x^{\frac{1}{2}}\vartheta(n)\big). \tag{5.6}$$

The Lemma follows, by (5.4), (5.5), and (5.6).

The following lemma will be needed for the second corollary to the next theorem.

LEMMA 5.4.

$$\varphi'(n) \equiv \mu^2(n)\,\varphi(n) = \sum_{\substack{d\,\delta = n \\ (d,\,\delta)=1}} \mu(d)\,\mu^2(\delta)\,\delta. \tag{5.7}$$

PROOF. By (1.2) and the multiplicativity of $\mu(n)$,

$$\varphi'(n) = \sum_{d\,\delta = n} \mu^2(d\,\delta)\,\mu(d)\,\delta = \sum_{\substack{d\,\delta = n \\ (d,\,\delta)=1}} \mu^2(d)\,\mu(d)\,\mu^2(\delta)\,\delta,$$

from which (5.7) results.

In this section we consider (1.1) in the case $h(n) = \mu^2(n)\,n$, that is,

$$f(n) = \sum_{\substack{d\,\delta = n \\ (d,\,\delta)=1}} g(d)\,\mu^2(\delta)\,\delta. \tag{5.8}$$

THEOREM 5.1. *If $g(n)$ is bounded and $f(n)$ is defined by* (5.8), *then*

$$\sum_{n \leqq x} f(n) = \frac{x^2}{2\,\zeta(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)\,\varphi(n)}{n\,J(n)} + O(x^{\frac{3}{2}}). \tag{5.9}$$

REMARK 5.2. The series is absolutely convergent, by the same argument used in the case $g(n) = \mu(n)$ considered in Lemma 3.5.

PROOF. By (5.8) and the definition of $Q'_n(x)$ in (5.3)

$$\sum_{n \leqq x} f(n) = \sum_{\substack{d\,\delta \leqq x \\ (d,\,\delta)=1}} g(d)\,\mu^2(\delta)\,\delta = \sum_{d \leqq x} g(d)\,Q'_d\left(\frac{x}{d}\right),$$

so that by Lemma 5.3, Remark 3.1, and the boundedness of $g(n)$,

$$\sum_{n \leqq x} f(n) = \frac{x^2}{2} \sum_{d \leqq x} \frac{g(d)\,\beta(d)}{d^2} + \left(x^{\frac{1}{2}} \sum_{d \leqq x} \frac{\tau(d)}{d^{\frac{1}{2}}}\right).$$

On the basis of (3.1) and Remark 5.1, it therefore follows that

$$\sum_{n \leqq x} f(n) = \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)\,\beta(n)}{n^2} + O\left(x^2 \sum_{n > x} \frac{1}{n^2}\right) + O(x^{\frac{3}{2}}),$$

and the Theorem results by definition of $\beta(n)$, because the first O-term is $O(x)$.

It should be noted that, in case $g(n)=1$, $f(n)$ in (5.8) becomes the function $\sigma'(n)$ mentioned in § 1. Hence

COROLLARY 5.1.1. $(g(n)=1)$.

$$\sum_{n\leq x}\sigma'(n)=\frac{\alpha' x^2}{2}+O(x^{\frac{3}{2}}), \tag{5.10}$$

where

$$\alpha'\equiv\zeta^{-1}(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n\,J(n)}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p(p+1)}\right).$$

The product expansion of α' is deduced in the same manner as the expansions of Lemma 3.5.

The case $g(n)=\mu(n)$ in (5.8) yields the function $\varphi'(n)$ in (5.7). Thus by Lemma 3.5,

COROLLARY 5.1.2 $(g(n)=\mu(n))$.

$$\Phi'(x)\equiv\sum_{n\leq x}\varphi'(n)=\frac{\alpha x^2}{2\zeta(2)}+O(x^{\frac{3}{2}}). \tag{5.11}$$

We now turn to Problem B. Let $\gamma(n)$ be defined as in the Introduction.

LEMMA 5.5 (cf. WIGERT [9, (3)]).

$$\gamma(n)=\sum_{d|n}\varphi'(d),\quad \varphi'(n)=\mu^2(n)\,\varphi(n). \tag{5.12}$$

PROOF. Möbius inversion applied to (1.2) yields the familiar formula of GAUSS, $n=\sum_{d|n}\varphi(d)$; replacing n by $\gamma(n)$ in this relation, one obtains

$$\gamma(n)=\sum_{d|\gamma(n)}\varphi(d)=\sum_{\substack{d|n\\ (d\text{ square-free})}}\varphi(d),$$

which is the same as (5.12).

THEOREM 5.2.

$$\sum_{n\leq x}\gamma(n)=\frac{\alpha x^2}{2}+O(x^{\frac{3}{2}}), \tag{5.13}$$

where α is defined by (3.11).

PROOF. By (5.12) and the definition of $\Phi'(x)$ in (5.11)

$$\sum_{n\leq x}\gamma(n)=\sum_{d\,\delta\leq x}\varphi'(d)=\sum_{n\leq x}\Phi'\left(\frac{x}{n}\right);$$

thus application of Corollary 5.1.2 leads to

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\gamma(n)&=\frac{\alpha x^2}{2\zeta(2)}\sum_{n\leq x}\frac{1}{n^2}+O\left(x^{\frac{3}{2}}\sum_{n\leq x}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\\&=\frac{\alpha x^2}{2}+O\left(x^2\sum_{n>x}\frac{1}{n^2}\right)+O(x^{\frac{3}{2}})=\frac{\alpha x^2}{2}+O(x^{\frac{3}{2}}).\end{aligned}$$

The Theorem is proved.

Finally, we remark that (5.11) and (5.13) improve estimates of WIGERT involving remainder terms of order $x^{\frac{1}{2}}$ [9, (5), (6)]. Contrary to the approach of this paper, WIGERT obtained independently his estimate for the average of $\gamma(n)$ and from that result deduced an estimate for $\Phi'(x)$.

6. PROBLEM C. Preparatory to the main discussion we prove

LEMMA 6.1. *If $g(n)$ and $h(n)$ are multiplicative functions, then the unitary convolution* (1.1) *of $g(n)$ and $h(n)$ is also multiplicative.*

PROOF. Certainly $f(1)=1$ if $g(1)=h(1)=1$. Suppose then that $n=n_1 n_2$, $(n_1, n_2)=1$. If $n=d\delta$, then d and δ have *unique* factorizations, $d=d_1 d_2$, $\delta=\delta_1 \delta_2$, such that $n_1=d_1 \delta_1$, $n_2=d_2, \delta_2$. Moreover, $(d, \delta)=1 \rightleftharpoons (d_1, \delta_1)=(d_2, \delta_2)=1$. Hence

$$f(n)=\sum_{\substack{d_1\delta_1=n_1\\ d_2\delta_2=n_2\\ (d_1,\delta_1)=(d_2,\delta_2)=1}} f(d_1 d_2)\, g(\delta_1\delta_2)=\sum_{\substack{d_1\delta_1=n_1\\ (d_1,\delta_1)=1}} f(d_1)\, g(\delta_1) \sum_{\substack{d_2\delta_2=n_2\\ (d_2,\delta_2)=1}} f(d_2)\, g(\delta_2),$$

and the Lemma is proved.

Let $q^*(n)$ denote the characteristic function of Q^*, that is, $q^*(n)=1$ or 0 according as n is or is not exponentially odd. It will be observed that $n\in Q^*$ if and only if its greatest unitary, square divisor is 1. Thus, the exponentially odd numbers may be viewed as "unitary" analogues of the square-free numbers. Pursuing this analogy [cf. (3.3)], we define $\mu_2^*(n)$ by the relation,

$$\sum_{\substack{d\delta=n\\ (d,\delta)=1}} \mu_2^*(d)=q^*(n). \tag{6.1}$$

Certainly, (6.1) defines $\mu_2^*(n)$ uniquely, in view of Theorem 2.3. In fact we have the following evaluation.

LEMMA 6.2.

$$\mu_2^*(n)=\begin{cases}\mu^*(\sqrt{n}) & \text{if } n \text{ is a square.}\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{6.2}$$

PROOF. On the basis of (2.6) and (6.1)

$$\mu_2^*(n)=\sum_{\substack{d\delta=n\\ (d,\delta)=1}} \mu^*(d)\, q^*(\delta). \tag{6.3}$$

It is easily seen that $q^*(n)$ is multiplicative, and hence also $\mu_2^*(n)$, by Corollary 2.2.2, Lemma 6.1, and (6.3). It therefore suffices to evaluate $\mu_2^*(n)$ for $n=p^k$, p prime. But by (6.3), $\mu_2^*(p^k)=0$ or -1 according as k is odd or $k\neq 0$ is even. This completes the proof.

LEMMA 6.3.

$$\varphi(n^2)=n\,\varphi(n). \tag{6.4}$$

PROOF. By (1.2),

$$\varphi(n^2) = \sum_{d|n^2} \left(\frac{n^2}{d}\right) \mu(d) = n \sum_{d|n} \left(\frac{n}{d}\right) \mu(d) = n\,\varphi(n).$$

LEMMA 6.4.

$$\vartheta(n^2) = \vartheta(n). \tag{6.5}$$

We are now in a position to prove

THEOREM 6.1. *If* $x \geqq 2$, *then*

$$Q^*(x) \equiv \sum_{n \leq x} q^*(n) = \alpha\, x + O(\sqrt{x} \log x), \tag{6.6}$$

where α *is defined by* (3.11).

PROOF. On the basis of (6.1) one obtains

$$Q^*(x) = \sum_{\substack{d\,\delta \leq x \\ (d,\delta)=1}} \mu_2^*(d) = \sum_{d \leq x} \mu_2^*(d)\, \varphi\left(\frac{x}{d}, d\right),$$

so that by Lemma 6.2,

$$Q^*(x) = \sum_{n \leq \sqrt{x}} \mu^*(n)\, \varphi\left(\frac{x}{n^2}, n^2\right). \tag{6.7}$$

Hence by Lemmas 3.4, 6.3, and 6.4, and Remark 2.1,

$$\begin{aligned} Q^*(x) &= x \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{\mu^*(n)\,\varphi(n^2)}{n^4} + O\Big(\sum_{n \leq \sqrt{x}} \vartheta(n^2)\Big) \\ &= x \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{\mu^*(n)\,\varphi(n)}{n^3} + O\Big(\sum_{n \leq \sqrt{x}} \vartheta(n)\Big). \end{aligned}$$

Application of Lemma 3.5 and Remark 3.1 yields, by the boundedness of $\mu^*(n)$,

$$Q^*(x) = \alpha\, x + O\Big(x \sum_{n > \sqrt{x}} \frac{1}{n^2}\Big) + O\big(T(\sqrt{x})\big). \tag{6.8}$$

Since the first O-term in (6.8) is $O(\sqrt{x})$, the Theorem results on appealing to (3.2).

COROLLARY 6.1.1. *The asymptotic density* $\delta(Q^*)$ *of* Q^* *is* α:

$$\delta(Q^*) \equiv \lim_{x \to \infty} \frac{Q^*(x)}{x} = \alpha. \tag{6.9}$$

We note that $Q \subset Q^*$ where Q denotes the set of all squarefree numbers. By (3.12), (6.9), and the well-known fact that $\delta(Q) = 6/\pi^2$ [see (3.4)], it follows that $\delta(Q) < \delta(Q^*)$.

REMARK 6.1. In another paper concerned with a generalization of Problem C, it is shown that the remainder term in (6.6) can be refined somewhat but at the expense of introducing generating functions in the proof.

Bibliography

[1] COHEN, E.: An extension of RAMANUJAN'S sum, III. Connections with totient functions. Duke Math. J. **23**, 623–630 (1956). — [2] COHEN, E.: Trigonometric sums in elementary number theory. Amer. Math. Monthly **66**, 105–117 (1959). — [3] DICKSON, L. E.: History of the Theory of Numbers, vol. I. New York, reprinted 1952. — [4] DIRICHLET, P. G. LEJEUNE: Vorlesungen über Zahlentheorie, 4th ed. Brunswick 1894 (edited by R. DEDEKIND). — [5] FEKETE, M.: Über die additive Darstellung einiger zahlentheoretischer Funktionen. Math. u. naturwiss. Berichte aus Ungarn **26**, 196–211 (1913). — [6] HARDY, G. H., and E. M. WRIGHT: Introduction to the Theory of Numbers, 3rd ed. Oxford 1954. — [7] LERCH, M.: Démonstration élémentaire d'un théorème d'arithmétique. Sitzungsber. der Böhmischen Ges. Wiss., Prag, No. 2, 1903, 3pp. — [8] VAIDYANATHASWAMY, R.: The theory of multiplicative arithmetical functions. Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 579–662 (1931). — [9] WIGERT, S.: Sur quelques formules asymptotiques de la théorie des nombres. Arkiv för Mat. Astr. Fys. **22**, 6 pp. (1932).

Dept. of Math., The University of Tennessee, Knoxville, Tenn. (U.S.A.)

(Eingegangen am 19. Januar 1960)

KRULL, W.
Math. Zeitschr. 74, 81–90 (1960)

Über die Endomorphismen von total geordneten Archimedischen Abelschen Gruppen

Herrn JOSEPH E. HOFMANN zum 60. Geburtstag gewidmet

Von

WOLFGANG KRULL

Im folgenden soll gezeigt werden, daß die Eigenart und Schönheit der Proportionenlehre des EUDOXOS, die im 5. Buch von Euklids Elementen dargestellt ist, dem modernen Leser erst dann richtig verständlich wird, wenn er die Theorie des EUDOXOS mit der Theorie beliebiger total geordneter Archimedischer Abelscher Gruppen in Zusammenhang bringt. Es wird sich nämlich ergeben, daß die Proportionsdefinition des EUDOXOS und die Hauptsätze über Proportionen in der Anordnung, wie sie im 5. Buch Euklids hergeleitet sind, die richtige Grundlage bieten, um sehr rasch die Hauptsätze über die Endomorphismenhalbgruppen der Gruppen unseres Typs herzuleiten, so daß man mit einem gewissen Recht sagen darf, diese Sätze „ständen schon bei Euklid". (Im Sinne der Feststellung „es steht alles bei DEDEKIND", die EMMY NOETHER oft bei ihren idealtheoretischen Untersuchungen machte.) Auf Grund der gewonnen Resultate soll dann untersucht werden, ob es nicht auch heute noch durchaus sinnvoll sein kann, die Theorie der Körper von reellen Zahlen nicht auf dem allgemein in der Analysis üblichen Weg, sondern unter stärkerem Anschluß an die Griechen als Automorphismen-Theorie Archimedischer Größensysteme zu entwickeln.

§ 1. Beliebige Abelsche Gruppen

Es sei $\mathfrak{A}$ irgendeine feste Abelsche Gruppe. Unter einem *Endomorphismus* von $\mathfrak{A}$ verstehen wir einen Homomorphismus *von* $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}$. Ein *Endo-Isomorphismus* bzw. *Automorphismus* ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{A}$ bzw. *auf* $\mathfrak{A}$. Die Multiplikation und die Addition der Endomorphismen sind wie üblich definiert. E ist der identische, N der Null-Endomorphismus. Im übrigen bezeichnen $H, Z, \ldots$ Endomorphismen; $A, B, \ldots$ Automorphismen; $a, b, c, \ldots$ Gruppenelemente; $n, m, \ldots$ ganze Zahlen. Unter einem „Ring" bzw. „Körper" verstehen wir stets einen mit *kommutativer* Multiplikation. Ist die Möglichkeit einer nicht kommutativen Multiplikation zugelassen, so sprechen wir von einem *Schiefring* bzw. *Schiefkörper*. Alle betrachteten Ringe sollen ein Einselement besitzen. – Unseren Ausgangspunkt bildet die triviale Bemerkung:

HILFSSATZ 1. *Ist die Gruppe* $\mathfrak{A}$ *gleichzeitig ein Schiefring mit Einselement* e, *und definiert man den Endomorphismus* H_a $(a \in \mathfrak{A})$ *durch* „$H_a c = a \cdot c$ *für alle* $c \in \mathfrak{A}$", *so bildet die Menge aller* H_a *eine Halbgruppe* $\mathfrak{E}_e$ *mit Einselement* E, *und es gibt in* $\mathfrak{E}_e$ *für jedes* $a \in \mathfrak{A}$ *genau ein* H *mit* $He = a$.

Der Schiefring $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann ein Ring, wenn $\mathfrak{C}_e$ Abelsch ist.

Wir definieren nun: Eine Endomorphismen-Halbgruppe $\mathfrak{A}$ (mit Einselement E) der Gruppe $\mathfrak{A}$ soll *e-transitiv* bzw. *e-einfach-transitiv* heißen, wenn sie für jedes $a \in \mathfrak{A}$ mindestens ein bzw. genau ein H mit $He = a$ enthält. Unser nächstes Hauptziel ist der Nachweis, daß Hilfssatz 1 gewissermaßen umgekehrt werden kann, wenn wir uns auf die Frage beschränken, auf welche Weise sich eine gegebene Gruppe $\mathfrak{A}$ zum *Ring* machen läßt. Auf die Schwierigkeiten, die auftreten, wenn wir über das Kommutative hinausgehen wollen, wird zum Schluß von § 1 kurz eingegangen.

HILFSSATZ 2. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine e-einfach-transitive Abelsche Endomorphismen-Halbgruppe. Dann gilt:*

a) *Gibt es zu $e' \in \mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}$ ein H mit $He' = e$, so ist H ein Automorphismus, und es liegt auch H^{-1} in $\mathfrak{A}$. Die Menge aller Automorphismen $A \in \mathfrak{A}$ bildet die größte Untergruppe von $\mathfrak{A}$ mit Einselement E.*

b) *$\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann auch e'-einfach-transitiv, wenn der Endomorphismus $H \in \mathfrak{A}$ mit $He = e'$ ein Automorphismus ist.*

Beweis. a) Mit $H_{a,e}$ bezeichnen wir allgemein den eindeutigen Endomorphismus H aus $\mathfrak{A}$, für den $H_{a,e}e = a$. Ist nun $H \in \mathfrak{A}$ und $He' = e$, so haben wir $(H \cdot H_{e',e})e = e = Ee$ und damit $H \cdot H_{e',e} = E$; wegen der Kommutativität von $\mathfrak{A}$ gilt aber auch $H_{e',e} \cdot H = E$. Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber bekanntlich: $H = A$ ist ein Automorphismus, und es ist $H_{e',e} = A^{-1}$. — Der Rest von a) ist trivial, ebenso ist b) eine triviale Folgerung von a).

SATZ 1. a) *Jede Abelsche e-einfach-transitive Halbgruppe $\mathfrak{A}$ ist ein Endomorphismen-Ring, $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$, und es gilt $H_{a+b,e} = H_{a,e} + H_{b,e}$ $(a, b \in \mathfrak{A})$.*

b) *Führt man in $\mathfrak{A}$ mit Hilfe von $\mathfrak{A}$ eine e-Multiplikation ein durch die Vorschrift $(a \cdot b)_e = (H_{a,e} \cdot H_{b,e})e$, so wird $\mathfrak{A}$ zu einem Ring $\mathfrak{R}_e$ mit Einselement e, der durch die Vorschrift $a \to H_{a,e}$ kanonisch isomorph auf $\mathfrak{R}$ abgebildet wird.*

Beweis. a) Es genügt zu zeigen: Für $a, b \in \mathfrak{A}$ gilt in $\mathfrak{A}$ stets $H_{a,e} + H_{b,e} = H_{a+b,e}$. Nun hat man für beliebige $c \in \mathfrak{A}$: $H_{a+b,e}c = (H_{a+b,e} \cdot H_{c,e})e = H_{c,e}(H_{a+b,e}e) = H_{c,e}(a+b) = H_{c,e}a + H_{c,e}b = (H_{c,e} \cdot H_{a,e})e + (H_{c,e} \cdot H_{b,e})e = H_{a,e}(H_{c,e}e) + H_{b,e}(H_{c,e}e) = H_{a,e}c + H_{b,e}c$. Wegen der Willkürlichkeit von c gilt also $H_{a+b,e} = H_{a,e} + H_{b,e}$. (Für $a = e$, $b = 0$ folgt speziell $H_{e,e} = E = E + H_{0,e}$; $H_{0,e} = N$.) — b) ist im wesentlichen trivial.

Ist $H_{e',e} = A_{e',e} \in \mathfrak{A}$ ein Automorphismus, so ist $\mathfrak{A}$ nach Hilfssatz 2 auch e'-einfach-transitiv, und es wird daher $\mathfrak{A}$ durch Einführung der e'-Multiplikation $(a \cdot b)_{e'} = (H_{a,e'} \cdot H_{b,e'})e'$ zu einem Ring $\mathfrak{R}'_{e'}$ mit Einselement e', der ebenso wie $\mathfrak{R}_e$ zu $\mathfrak{R}$ isomorph ist. Um einen direkten Zusammenhang zwischen $\mathfrak{R}_e$ und $\mathfrak{R}'_{e'}$ herzustellen, müssen wir jedes $H_{a,e}$ aus $\mathfrak{A}$ auf die Form $H_{a',e'}$ bringen, d.h. wir haben $H_{a,e}e'$ zu berechnen. Es ergibt sich: $H_{a,e}e' = (H_{a,e} \cdot A_{e',e})e = A_{e',e}(H_{a,e}e) = A_{e',e}a$, d.h. wir haben die *Umrechnungsformel:*

$$H_{a,e} = H_{A_{e',e}a,e'} \qquad (a \in \mathfrak{A}). \tag{1}$$

Aus der Umrechnungsformel folgt sofort: $A_{e',e}\big((a\cdot b)_e\big)=(A_{e',e}\cdot H_{a,e}\cdot H_{b,e})\,e=(H_{a,e}\cdot H_{b,e})\,(A_{e',e}e)=(H_{a,e}\cdot H_{b,e})\,e'=(H_{A_{e',e}a,e'}\cdot H_{A_{e',e}b,e'})\,e'=(A_{e',e}a\cdot A_{e',e}b)_{e'}$. Aus dieser Bemerkung ergibt sich weiter mühelos:

Satz 2. *Ist $A_{e',e}$ ein Automorphismus aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{R}_e$ bzw. $\mathfrak{R}'_{e'}$ der mit Hilfe von $\mathfrak{A}$ aus $\mathscr{A}$ abgeleitete Ring mit dem Einselement e bzw. e', so bildet $A_{e',e}$ den Ring $\mathfrak{R}_e$ ringisomorph auf $\mathfrak{R}'_{e'}$ ab.*

Durch Satz 1 und Satz 2 ist gezeigt: *Jede* hinsichtlich eines Elements $e\in\mathscr{A}$ einfach-transitive Abelsche Endomorphismen-Halbgruppe kann benutzt werden, um aus $\mathscr{A}$ einen Ring $\mathfrak{R}_e$ zu machen. Im allgemeinen kann mit Hilfe einer Halbgruppe $\mathfrak{A}$ sogar eine ganze Klasse von Ringen gewonnen werden, doch sind alle Ringe einer solchen Klasse kanonisch untereinander isomorph. —

Um den Spezialfall der *Körper* besonders zu würdigen, definieren wir: Eine *Automorphismen-Gruppe* $\mathfrak{G}$ von $\mathscr{A}$ soll *einfach-transitiv* heißen, wenn in $\mathfrak{G}$ für jedes Paar $a\neq 0$, $b\neq 0$ aus $\mathscr{A}$ genau ein Automorphismus A mit $Aa=b$ existiert. Natürlich ist $\mathfrak{G}$ bereits dann einfach-transitiv, wenn die angegebene Bedingung für alle Paare $e=a$, b mit festem e erfüllt ist. Ist $\mathfrak{G}$ eine einfach-transitive Automorphismen-Gruppe, so ist $\mathfrak{G}\cup\{N\}$ für jedes $e\neq 0$ aus $\mathscr{A}$ eine e-einfach-transitive Endomorphismen-Halbgruppe im bisherigen Sinne. Aus dieser Bemerkung, Hilfssatz 2 und Satz 1 a) folgt fast unmittelbar:

Satz 3. *Die Menge aller der e-einfach-transitiven Abelschen Endomorphismen-Halbgruppen $\mathfrak{A}$, die gleichzeitig Endomorphismen-Körper sind, wird durch die Vorschrift $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}-\{N\}$ umkehrbar eindeutig auf die Menge aller einfach-transitiven Abelschen Automorphismen-Gruppen $\mathfrak{G}$ abgebildet.*

Um also alle Möglichkeiten zu übersehen, wie $\mathscr{A}$ zu einem *Körper* gemacht werden kann, hat man sich nur einen Überblick über die Menge aller einfach-transitiven Abelschen Automorphismen-Gruppen $\mathfrak{G}$ zu verschaffen.

Fragen wir nach den Schwierigkeiten, auf die man stößt, wenn man die gewonnenen Resultate auf Schiefringe übertragen will, so lautet die Antwort so: Ist $\mathfrak{C}$ eine beliebige e-einfach-transitive Endomorphismen-Halbgruppe, und versucht man, in $\mathscr{A}$ eine e-Multiplikation durch $(a\cdot b)_e=(H_{a,e}\cdot H_{b,e})\,e$ einzuführen, so zeigt sich, daß zwar die Assoziativität der Multiplikation und das distributive Gesetz $\big(c\cdot(a+b)\big)_e=(c\cdot a)_e+(c\cdot b)_e$ sofort verifiziert werden können, daß aber die Gültigkeit des distributiven Gesetzes $\big((a+b)\cdot c\big)_e=(a\cdot c)_e+(b\cdot c)_e$ gleichwertig ist mit der Allgemeingültigkeit der Gleichung $H_{a+b,e}=H_{a,e}+H_{b,e}$, die in Satz 1 a) nur unter scharfer Ausnutzung der Kommutativität bewiesen werden konnte. — Setzt man ferner für $\mathfrak{C}$ die Gültigkeit von $H_{a+b,e}=H_{a,e}+H_{b,e}$ voraus, und ist $A_{e',e}$ ein in $\mathfrak{C}$ enthaltener Automorphismus, so wird zwar $\mathscr{A}$ durch die Multiplikationsdefinition $(a\cdot b)_e=(H_{a,e}\cdot H_{b,e})\,e$ bzw. $(a\cdot b)_{e'}=(H_{a,e'}\cdot H_{b,e'})\,e'$ jeweils zu einem Schiefring $\mathfrak{R}_e$ bzw. $\mathfrak{R}'_{e'}$ mit dem Einselement e bzw. e'. Aber es ist zum mindesten nicht selbstverständlich, daß der Gruppen-Automorphismus $A_{e',e}$ den Schiefring $\mathfrak{R}_e$ isomorph auf $\mathfrak{R}'_{e'}$ abbildet. Denn beim Beweis der Umrechnungsformel (1) wurde wieder wesentlich die Kommutativität von $\mathfrak{A}$ ausgenützt.

§ 2. Total geordnete Archimedische Abelsche Gruppen

Es sei jetzt die Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ total geordnet. $\mathfrak{H}$ sei die Unterhalbgruppe aller echt positiven Elemente. $\mathfrak{A}$ sei Archimedisch, es gebe also zu jedem Paar $a, b \in \mathfrak{H}$ ein n, derart daß $n \cdot a > b$. Betrachtet wird die Halbgruppe $\mathfrak{E}^*$ aller der Endomorphismen H von $\mathfrak{A}$, die entweder die Ordnung von $\mathfrak{A}$ erhalten (d.h. $a > b \Rightarrow Ha > Hb$) oder sie umkehren ($a > b \Rightarrow Ha < Hb$). $\mathfrak{E}$ sei die Unterhalbgruppe aller ordnungserhaltenden Endomorphismen, mit $-E$ werde der durch $(-E)a = -a$ festgelegte, zu $\mathfrak{E}^*$ aber nicht zu $\mathfrak{E}$ gehörige Automorphismus bezeichnet. Dann wissen wir: Es ist $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} \cup (-E) \cdot \mathfrak{E}$, und es gilt $(-E) \cdot H = H \cdot (-E)$ für alle $H \in \mathfrak{E}^*$. Gibt es genau einen Endomorphismus $H \in \mathfrak{E}^*$ mit $Ha = b$, so gibt es auch genau einen Endomorphismus $H' \in \mathfrak{E}^*$ mit $H'a = -b$, nämlich $H' = (-E) \cdot H$. Nennen wir ferner für $e \in \mathfrak{H}$ die Unterhalbgruppe $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{E}$ *e-einfach-transitiv in* $\mathfrak{H}$, wenn zu jedem $a \in \mathfrak{H}$ ein $H \in \mathfrak{E}$ mit $He = a$ existiert, so sieht man sofort: Eine Unterhalbgruppe $\mathfrak{C}^*$ von $\mathfrak{E}^*$ ist dann und nur dann e-einfach-transitiv, wenn $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^* \cap \mathfrak{E}$ e-einfach-transitiv in $\mathfrak{H}$ ist. $\mathfrak{C}^*$ ist dann und nur dann e-einfach-transitiv, wenn $\mathfrak{C}^*$ $(-e)$-einfach-transitiv ist. Diese Bemerkungen gestatten es, im folgenden zunächst nur $\mathfrak{E}$ zu betrachten, und da jeder $H \in \mathfrak{E}$ einen Endomorphismus von $\mathfrak{H}$ induziert, durch den er selbst eindeutig bestimmt ist, dürfen und wollen wir dabei die $H \in \mathfrak{E}$ geradezu mit den induzierten Endomorphismen von $\mathfrak{H}$ identifizieren. In der späteren Formulierung der Hauptsätze können wir dann ohne neue Sonderbetrachtungen die gewonnenen Ergebnisse unmittelbar für $\mathfrak{E}^*$ und $\mathfrak{A}$ formulieren.

Zunächst definieren wir im Sinne des 5. Buches von Euklid: Es seien $a, b, c, d \in \mathfrak{H}$; das Paar $\langle a, b \rangle$ soll *proportional* zu $\langle c, d \rangle$ heißen, wenn für alle natürlichen Zahlen m, n gilt:

$$(2) \qquad \begin{cases} m \cdot a > n \cdot b \Rightarrow m \cdot c > n \cdot d \\ m \cdot a = n \cdot b \Rightarrow m \cdot c = n \cdot d \\ m \cdot a < n \cdot b \Rightarrow m \cdot c < n \cdot d. \end{cases}$$

Ersichtlich ist die Proportionalität eine Äquivalenzrelation. Bezeichnet $a:b$ die Klasse aller zu $\langle a, b \rangle$ proportionalen Paare, so können wir kurz $a:b = c:d$ schreiben, falls (2) erfüllt ist. Offenbar folgt aus $a:b = c:d$ stets $b:a = d:c$, und es gilt das

1. ADDITIONSGESETZ: $a:b = c_1:d_1 = c_2:d_2 \Rightarrow a:b = (c_1 + c_2):(d_1 + d_2)$.

Im Anschluß an Euklid beweisen wir jetzt drei fundamentale Hilfssätze.

HILFSSATZ 3. *Aus* $a:b = a:b'$ *folgt stets* $b = b'$.

Beweis indirekt. Es sei etwa $b' = b + e > b$. Dann gibt es m, n derart, daß $m \cdot b > a$, $m \cdot e > a$, $n \cdot a \leqq m \cdot b < (n+1) \cdot a$, und weiter folgt $(n+1) \cdot a \leqq m \cdot b + a < m \cdot b + m \cdot e = m \cdot b'$. Es ist also sicher $a:b \neq a:b'$.

HILFSSATZ 4. *Aus* $a:b = c:d$ *und* $a > c$ *folgt stets* $b > d$.

Beweis indirekt. Angenommen es sei $b \geqq d$; dann ist $d = b + e > b$, denn aus $d = b$ folgte $a = c$ nach Hilfssatz 3. Es gibt nun m, n derart, daß $m \cdot b > a$,

$m \cdot e > a$, $n \cdot a \leqq m \cdot b < (n+1) \cdot a$, und man erhält: $(n+1) \cdot c < n \cdot a + a < m \cdot b + m \cdot e = m \cdot d$; $a:b \neq c:d$.

HILFSSATZ 5. *Aus $a:b = c:d$ folgt stets $a:c = b:d$.*

Zunächst nämlich folgt aus $a:b = c:d$ trivialerweise $(m \cdot a):(m \cdot b) = (n \cdot c):(n \cdot d)$ für jedes Paar m, n. Nach Hilfssatz 3 und Hilfssatz 4 ergibt sich weiter: Aus $m \cdot a >$ bzw. $=$ bzw. $< n \cdot c$ folgt $n \cdot b >$ bzw. $=$ bzw. $< n \cdot d$; d.h. es gilt (2) für die Paare $\langle a, c\rangle$, $\langle b, d\rangle$.

Wendet man auf das erste Additionsgesetz Hilfssatz 5 an, so ergibt sich das

2. ADDITIONSGESETZ: $a:b_1 = c:d_1$, $a:b_2 = c:d_2 \Rightarrow a:(b_1 + b_2) = c:(d_1 + d_2)$.

Den Ausgangspunkt für die Endomorphismen-Theorie von $\mathfrak{H}$ liefert das folgende Lemma, das unmittelbar aus der Definition der ordnungserhaltenden Endomorphismen folgt.

LEMMA. *Für beliebige $a, b \in \mathfrak{H}$ und $H \in \mathfrak{E}$ gilt $a:b = Ha:Hb$.*

Wenden wir die Hilfssätze 3, 4, 5 auf die Endomorphismen-Theorie von $\mathfrak{H}$ an, so erhalten wir die folgenden Sätze, die wir aus den zu Beginn des Paragraphen angegebenen Gründen gleich für $\mathfrak{E}^*$ und $\mathfrak{A}$ formulieren können.

SATZ 4. *Ein Endomorphismus $H \in \mathfrak{E}^*$ von $\mathfrak{A}$ ist durch Angabe eines einzigen Urbild-Bild-Paares $\langle a, Ha = c\rangle$ eindeutig bestimmt. — Jeder Endomorphismus H ist ein Endo-Isomorphismus.*

Triviale Folge aus dem Lemma und Hilfssatz 3 (für die Endomorphismen von $\mathfrak{H}$).

Für beliebige $e \in \mathfrak{A}$ erhalten wir als

KOROLLAR. *Ist $\mathfrak{E}^*$ e-transitiv, so ist $\mathfrak{E}^*$ sogar e-einfach-transitiv.*
Ist $\mathfrak{C}^* \leqq \mathfrak{E}^*$ und $\mathfrak{C}^*$ e-transitiv, so ist $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{E}^*$.

SATZ 5. *Jeder Endomorphismus $H \in \mathfrak{E}$ ist ordnungsmonoton im folgenden Sinne: Gilt bei einem Urbild-Bild-Paar $\langle a, Ha\rangle$ die Beziehung $Ha > a$ bzw. $Ha < a$, so gilt sie bei allen Urbild-Bild-Paaren.*

Triviale Folgerung aus dem Lemma und Hilfssatz 4. — Man beachte, daß diesmal die Formulierung umständlicher würde, wenn wir von $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{E}$ zu $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}^*$ übergehen wollten. Satz 5 ist vor allem deshalb wichtig, weil er die tiefere Bedeutung von Hilfssatz 4 zeigt, aus dem wir Hilfssatz 5 ableiteten. Hilfssatz 5 seinerseits führt rasch zu dem entscheidenden Theorem:

SATZ 6. *Die Endomorphismen-Halbgruppe $\mathfrak{E}^*$ ist kommutativ*

Beim Beweis drücken wir, gestützt auf Satz 4, analog wie in § 1 durch die Schreibweise $H = H_{b,a}$ die Tatsache aus, daß H der (einzige) Endomorphismus mit $Ha = b$ ist. Es seien $H, Z \in \mathfrak{E}$; $a \in \mathfrak{H}$ und $Z = H_{c,a}$, $H = H_{d,c} = H_{b,a}$. Dann haben wir $H \cdot Z = H_{d,a}$, und wegen $Z \cdot H = H_{c,a} \cdot H_{b,a}$ bleibt nur $H_{c,a} = H_{d,b}$ zu beweisen. Nun ist $a:c = b:d$ wegen $H = H_{d,c} = H_{b,a}$, und $a:b = c:d$, $H_{c,a} = H_{d,b}$ folgt aus Hilfssatz 5.

Satz 6 liefert in Verbindung mit Satz 1 a) unmittelbar:

SATZ 7. *Ist $\mathfrak{E}^*$ hinsichtlich irgendeines Elementes e transitiv, so ist $\mathfrak{E}^*$ ein (kommutativer) Ring, in dem allgemein die Formel $H_{a+b,e}=H_{a,e}+H_{b,e}$ gilt, und man kann — mit $\mathfrak{E}^*$ statt $\mathfrak{A}$ — die Sätze 1, 2, 3 von § 1 auf $\mathscr{A}$ anwenden.*

Zusatz. $\mathfrak{E}^*$ ist als Ring stets nullteilerfrei, und zwar von Charakteristik 0. (Klar, da alle Endomorphismen nach Satz 4 Endo-Isomorphismen sind, und aus $H \neq N$ stets $n \cdot H \neq N$ folgt.)

Fragen wir nach einer einfachen Bedingung dafür, daß $\mathfrak{E}^*$ hinsichtlich des Elementes e, das nach früheren Bemerkungen positiv angenommen werden darf, transitiv ist, so kommen wir zu folgendem Theorem, das nochmals zu den Proportionen zurückführt.

SATZ 8. *$\mathfrak{E}^*$ ist dann und nur dann hinsichtlich $e \in \mathscr{H}$ transitiv, wenn zu jedem Tripel e, b, c aus $\mathscr{H}$ in $\mathscr{H}$ die „vierte Proportionale", d.h. ein (notwendig eindeutiges) d mit $e:b=c:d$ existiert.*

Beweis. Ist $H=H_{c,e}$ und $b \in \mathscr{H}$ beliebig, so genügt $d=Hb$ nach dem Lemma der Bedingung $e:b=c:d$, unsere Voraussetzung ist also notwendig. Ist sie andererseits erfüllt, so definiert die Vorschrift „$Hb=d$, wenn $e:b=c:d$" jedenfalls eine ordnungserhaltende Abbildung von $\mathscr{H}$ in $\mathscr{H}$. Aus dem 2. Additionsgesetz (mit e statt a) folgt aber sofort, daß die von uns definierte Abbildung H der Bedingung $H(b_1+b_2)=Hb_1+Hb_2$ genügt, also ein Endomorphismus (von $\mathscr{H}$ und damit nach Erweiterung auf $\mathscr{A}$ auch ein solcher von $\mathscr{A}$) ist.

Besonders hervorzuheben ist, daß wir uns beim Beweise von Satz 8 auf Hilfssatz 5 stützen mußten. Satz 8 ist also keine Trivialität, wie man auf den ersten Blick meinen könnte. Ziehen wir die Resultate von § 1 heran, so ergibt sich fast unmittelbar:

KOROLLAR ZU SATZ 8. *$\mathfrak{E}^*$ ist genau dann e-transitiv (für geeignetes $e \in \mathscr{H}$) und ein Körper, wenn in $\mathscr{H}$ immer — d.h. zu jedem Tripel a, b, c — die durch $a:b=c:d$ charakterisierte vierte Proportionale d existiert.*

In diesem Falle ist $\mathfrak{E}^*$ sogar a-einfach-transitiv für alle $a \in \mathscr{H}$.

Die letzte Behauptung folgt unmittelbar aus dem Korollar zu Satz 4 und Hilfssatz 2.

Die Möglichkeit, daß $\mathfrak{E}^*$ zwar ein Körper, aber hinsichtlich keines einzigen a transitiv ist, also sozusagen ein „zu kleiner" Körper ist, soll hier nicht weiter diskutiert werden. — Wir bemerken schließlich noch:

SATZ 9. *Ist $\mathfrak{E}^*$ e-transitiv für ein $e \in \mathscr{H}$, so wird $\mathfrak{E}^*$ zu einem total geordneten Archimedischen Ring mit zu $\mathscr{A}$ ordnungsisomorpher Additionsgruppe, wenn man festsetzt: $H=H_{a,e}>N=H_{0,e}$ dann und nur dann, wenn $a>0$.*

Zum Beweis hat man nur zu beachten: a) Wegen $H_{a,e}+H_{b,e}=H_{a+b,e}$ wird $\mathfrak{E}^*$ als Additionsgruppe durch die Vorschrift $H_{a,e} \leftrightarrow a$ ordnungsisomorph auf $\mathscr{A}$ abgebildet. — b) Ist $H=H_{a,e}>Z=H_{b,e}$, also $a>b$, und $Z'=H_{c,e}>N$, also $c>0$, so hat man $H_{a,e}-H_{b,e}=H_{a-b,e}$, $a-b>0$, und daraus folgt $H_{c,e}\cdot(H_{a,e}-H_{b,e})=H_{d,e}>N=H_{0,e}$; denn es ist $d>0$, weil $H_{c,e}$ und $H_{a,e}-H_{b,e}=H_{a-b,e}$ beide zu $\mathfrak{E}$ gehören und $e \in \mathscr{H}$ ist.

Wieder verzichten wir auf die Untersuchung der Frage, welche Ordnungsaussagen gemacht werden können, wenn $\mathfrak{E}^*$ hinsichtlich keines einzigen Elementes transitiv ist.

§ 3. Historische und didaktische Bemerkungen

Wollen wir auf Grund von § 1 und § 2 die Bedeutung des 5. Buches Euklids vom modernen Standpunkt würdigen, so ist einerseits die zentrale Stellung der Hilfssätze 3—5 in § 2 zu beachten; andererseits ist zu berücksichtigen, daß die vierte Proportionale im Werk Euklids eine fundamentale Rolle spielt und daß, wie in einer im Rohentwurf bereits vorliegenden Dissertation unter anderem gezeigt werden soll, tatsächlich sogar im 5. Buch die Existenz der vierten Proportionalen an mindestens einer Stelle stillschweigend vorausgesetzt wird. Wir wollen daher angesichts der Tatsache, daß das 5. Buch Euklids inhaltlich auf Eudoxos zurückgeht, eine total geordnete Archimedische Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ kurz als *Eudoxische Gruppe* bezeichnen, wenn in $\mathfrak{A}$ zu jedem positiven Tripel a, b, c die vierte Proportionale existiert.

Um einen möglichst engen Anschluß an die Griechen zu gewinnen, definieren wir weiter: Unter einer Eudoxischen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ bzw. einem total geordneten Halbkörper $\mathfrak{L}$ soll die Menge aller positiven Elemente einer Eudoxischen Gruppe $\mathfrak{A}$ bzw. eines total geordneten Körpers $\mathfrak{K}$ verstanden werden. Man sieht dann sofort: Eudoxische Halbgruppen und total geordnete Halbkörper können genausogut selbständig axiomatisch eingeführt werden wie die entsprechenden Gruppen und Körper. Der einzige Unterschied ist der, daß man bei der Addition die Forderung: „Zu jedem Paar a, b gibt es ein c mit $a+c=b$" ersetzen muß durch die Forderung: „Zu a, b gibt es dann und nur dann ein c mit $a+c=b$, wenn $b>a$." — Weiter überzeugt man sich mühelos, daß jede Eudoxische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ bzw. jeder total geordnete Halbkörper $\mathfrak{L}$ sofort zu einer Eudoxischen Gruppe $\mathfrak{A}$ bzw. einem total geordneten Körper $\mathfrak{K}$ erweitert werden kann, derart daß $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{L}$ gerade die Menge aller positiven Elemente von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{K}$ darstellt. Es ist also auch vom axiomatischen Standpunkt aus ganz unwesentlich, wenn wir — den Griechen folgend, die weder eine Null noch negative Elemente kannten — mit Halbgruppen und Halbkörpern statt mit Gruppen und Körpern operieren. Dann aber zeigt eine Überprüfung der Schlüsse von § 1 und § 2:

Der Satz: „*Bei jeder Eudoxischen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ bildet die Menge aller ordnungserhaltenden Automorphismen einen total geordneten Halbkörper $\mathfrak{L}$, der als additive Halbgruppe zu $\mathfrak{H}$ kanonisch ordnungsisomorph ist*", folgt so rasch und einfach aus den klassischen Hilfssätzen 3, 4, 5, daß mit Recht behauptet werden kann: Der genannte Satz ist für den aufmerksamen Leser bereits im 5. Buch Euklids zu finden, vorausgesetzt allerdings, daß dieser Leser mit dem modernen, den Griechen noch fremden Automorphiebegriff vertraut ist.

Zum Beweis beachte man: Man braucht, um den fraglichen Satz aus den Hilfssätzen 3, 4, 5 abzuleiten, zunächst (nur für Automorphismen) den trivialen Satz 4 von § 2, sowie Satz 6, dessen durch eine kurze Automorphismenrechnung

geführter Beweis allerdings etwas aus dem klassischen griechischen Rahmen herausfällt. Dann ist (entsprechend dem Hauptteil des Beweises von Satz 8) zu zeigen: Sind a, c gegeben und definiert man allgemein: „$Ab = d$, falls $a:b = c:d$", so entsteht ein Automorphismus A von $\mathfrak{H}$. Im Fall einer Eudoxischen Halbgruppe ist nun von vornherein klar, daß A eine Abbildung von $\mathfrak{H}$ *auf* $\mathfrak{H}$ darstellt. (Ist d gegeben, so wird $Ab = d$, falls $a:b = c:d$.) Es bleibt $A(b_1 + b_2) = Ab_1 + Ab_2$ zu beweisen, und das geschieht, wie in § 2 bei Satz 8, ganz in klassisch griechischer Weise durch Herleitung des 2. Additionsgesetzes aus dem ersten. Schließlich brauchen wir noch die Formel $A_{a+b,c} = A_{a,c} + A_{b,c}$. Hier treten wir wieder aus dem engeren griechischen Rahmen, denn wir müssen auf Satz 1a) von § 1 zurückgreifen. Aber es ist wenigstens auch hier die zum Beweis nötige Rechnung außerordentlich kurz und elementar.

Auf jeden Fall zeigt unsere Analyse: Es ist auch heute noch durchaus nicht abwegig, zu überlegen, wie sich der Aufbau der Analysis gestaltet, wenn man soweit wie möglich dem Vorbild der Griechen folgt, für die es (bei den uns interessierenden Fragen) nur ganze Zahlen und „Größen", aber jedenfalls keine reellen Zahlen gab. Die „Größen", mit denen sich die Griechen beschäftigten, waren durchweg der Geometrie entnommen. Nichts hindert uns aber, auch Beispiele aus der Physik heranzuziehen: Die Betrachtung geometrischer und physikalischer Größen und der dort auftretenden Additivität führt durch Abstraktion zwanglos zum Begriff der total geordneten Abelschen Gruppe. (Wir werden im Gegensatz zu den Griechen nicht bei der Halbgruppe stehenbleiben, da in der Physik auch negative Größen auftreten.) Die Plausibilität des Archimedischen Axioms ist leicht an Beispielen klarzumachen. Es fragt sich nur, wie es in dieser Hinsicht mit dem Zusatzaxiom steht, durch das wir die Eudoxischen Gruppen gekennzeichnet hatten. Hier ist anzuknüpfen an die Vorstellung, daß man Größen durch Vergleich mit einer Maßgröße erfaßt, daß aber in einem „homogenen" Größensystem die spezielle Wahl der Maßgröße gleichgültig sein muß. Diese Überlegung führt durch Abstraktion zur Auszeichnung derjenigen total geordneten Abelschen Gruppen, bei denen zu $a \neq 0$, $c \neq 0$ stets ein Automorphismus A mit $Aa = c$ existiert. Bei dem Versuch, derartige Gruppen näher zu charakterisieren, kommt man schließlich, wie in § 2 gezeigt, zwanglos zum Proportionalitätsbegriff und zur axiomatischen Einführung der Eudoxischen Gruppen. Das heißt also: Sieht man es als eine Grundaufgabe der Mathematik an, eine Theorie zu entwickeln, die als Grundlage für die Behandlung geometrischer und physikalischer Größensysteme dienen kann, so ist es durchaus plausibel, eine systematische Untersuchung der Eudoxischen Gruppen an den Anfang zu stellen. Von diesem Ausgangspunkt kommt man dann, wie gezeigt, zwangsläufig zur Einführung des Körperbegriffs, und zwar tragen die auftretenden Körper wegen ihrer Archimedischen Totalordnung „reellen" Charakter. Es wäre also ein Irrtum, anzunehmen, der „griechische" Grundsatz, nach der Einführung der ganzen Zahlen sich zunächst auf die Betrachtung von Größensystemen zu beschränken, sperre den Zugang zum Körperbegriff. Nur sind die Elemente der auf dem „griechischen" Weg gewonnenen Körper nicht rationale oder reelle „Zahlen",

sondern Automorphismen. Im übrigen bleibt man bis zur Konstruktion der Automorphismen-Körper einschließlich durchaus im Algebraischen. Die Untersuchungen erfordern nirgends die Einführung eines Begriffs wie des der Menge aller Dedekindschen Schnitte — obwohl bekanntlich DEDEKIND mit seiner Schnittdefinition bewußt an das 5. Buch Euklids anknüpfte. Auf die Bedeutung dieser Erkenntnis für die Würdigung des 5. Buches vom modernen Standpunkt sei hier nur andeutungsweise hingewiesen.

Hingegen sei kurz ausgeführt, wie nach dem systematischen algebraischen Studium der Eudoxischen Gruppen zwanglos der Anschluß an die übliche, auf dem Begriff des reellen Zahlkörpers aufbauende Analysis gewonnen werden kann. Man geht am besten aus von der Betrachtung „mehrdimensionaler" Größensysteme, wie sie in der Physik auftreten. Hier sind zunächst mehrere total geordnete Archimedische Gruppen $\mathfrak{A}_i$ gegeben, und um rechnerisch weiterzukommen, muß man die $\mathfrak{A}_i$ alle in eine gemeinsame Obergruppe des gleichen Typus (ordnungsisomorph) einbetten. In diesem Zusammenhang liegt aber die Frage nach einer *Universalgruppe* $\mathfrak{A}_u$, in die *jede* total geordnete Archimedische Gruppe einbettbar ist, sehr nahe. Man wird sie also aufgreifen und folgendermaßen beantworten: Bildet man zu einer beliebigen, nichtdiskreten, total geordneten Archimedischen Gruppe $\mathfrak{A}$ in üblicher Weise die vollständige Hülle $\mathfrak{A}_u$ hinsichtlich der Ordnungstopologie von $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}_u$ eine Universalgruppe in dem von uns gewünschten Sinne. $\mathfrak{A}_u$ ist, unabhängig von der speziellen Wahl der Ausgangsgruppe $\mathfrak{A}$, bis auf Ordnungsisomorphie eindeutig bestimmt, so daß man unbedenklich von *der* Universalgruppe sprechen darf, die zur Menge aller total geordneten Archimedischen Gruppen gehört. — Weiter zeigt man mühelos, daß $\mathfrak{A}_u$ Eudoxisch ist, daß also der zu $\mathfrak{A}_u$ gehörige Endomorphismenring $\mathfrak{E}_u^* = \mathfrak{K}_u^*$ ein total geordneter Archimedischer Körper ist, in dem die Endomorphismenkörper aller Eudoxischen Gruppen ordnungsisomorph eingebettet werden können. Da nun $\mathfrak{K}_u^*$ mühelos mit dem Körper aller reellen Zahlen identifiziert werden kann, haben wir so den Anschluß an die üblichen Grundlagen der Analysis gewonnen.

Bei unserem Aufbau wird man allerdings fragen, ob ein so früher Übergang zur Universalgruppe $\mathfrak{A}_u$ tatsächlich sinngemäß ist. Sollte man nicht die Heranziehung des topologischen Begriffs der vollständigen Hülle auf einen späteren Zeitpunkt verschieben und zunächst noch weiter rein algebraisch vorgehen? Hier darf nicht verschwiegen werden, daß der Versuch einer ausschließlich algebraischen Weiterentwicklung der Theorie der total geordneten Archimedischen Gruppen rasch auf überraschende Schwierigkeiten führt. Zunächst hatten wir uns ja auf das Studium der in plausibler Weise axiomatisch charakterisierten *Eudoxischen* Gruppen beschränkt. Darüberhinaus aber wird man die Frage nach expliziten Beispielen nichttrivialer Eudoxischer Gruppen nicht umgehen können — wobei die leicht einzuführende Additionsgruppe der rationalen Zahlen wohl als trivial anzusehen ist. Nun sind aber die einfachsten Beispiele total geordneter Archimedischer Gruppen (etwa Gruppen mit endlich vielen, paarweise inkommensurablen Erzeugenden) alle nicht-Eudoxisch; man stößt daher zwangsläufig auf das folgende Problem: Es soll eine beliebig

vorgegebene Archimedische Gruppe $\mathfrak{A}$ durch einen möglichst einfachen algebraischen Prozeß (etwa entsprechend dem Übergang von einem Integritätsbereich zu seinem Quotientenkörper) in eine kleinste umfassende Eudoxische Gruppe $\mathfrak{A}_e$ eingebettet werden. Was diese Aufgabe angeht, so zeigen die Untersuchungen von § 2: Die Lösung ist leicht, wenn die Gruppe $\mathfrak{A}$ hinsichtlich irgendeines e transitiv ist. Denn in diesem Falle läßt sich die Einbettung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}_e$ zurückführen auf die Einbettung des zugehörigen Endomorphismen-Ringes $\mathfrak{E}^*$ in seinen Quotientenkörper. Im allgemeinen ist aber der Endomorphismen-Ring $\mathfrak{E}^*$ von $\mathfrak{A}$, kurz gesagt „zu klein". Ist z.B. $\mathfrak{E}^*$ isomorph zum Ring der ganzen rationalen Zahlen, was unter anderem bei weitaus den meisten durch zwei inkommensurable Elemente erzeugten Gruppen $\mathfrak{A}$ zutrifft, so entspricht dem Übergang von $\mathfrak{E}^*$ zu seinem Quotientenkörper nur der Übergang von $\mathfrak{A}$ zur kleinsten Divisionsobergruppe, d.h. zur kleinsten Obergruppe $\mathfrak{A}_b$, in der zu jedem Paar n, a ein b mit $n \cdot b = a$ existiert. Im allgemeinen, insbesondere bei den erwähnten von zwei inkommensurablen Elementen erzeugten Gruppen, ist aber $\mathfrak{A}_b$ keineswegs Eudoxisch.

Die Betrachtung von solchen und ähnlichen Beispielen zeigt: Die Frage, wie weit eine gegebene total geordnete Archimedische Additionsgruppe $\mathfrak{A}$ eine ausgezeichnete multiplikative Struktur besitzt und wie $\mathfrak{A}$ rein algebraisch in eine möglichst kleine Obergruppe eingebettet werden kann, die vom multiplikativen Standpunkt aus ideal, d.h. Eudoxisch ist — diese Frage führt auf weit kompliziertere Probleme, als man bei oberflächlicher Betrachtung annehmen möchte. Man wird sich daher mit ihr nur dann näher beschäftigen, wenn eine systematische Untersuchung der total geordneten Archimedischen Gruppen von allen möglichen Gesichtspunkten aus beabsichtigt ist. Handelt es sich dagegen nur um einen Aufbau der Grundlagen der Analysis, der nach griechischem Vorbild das Studium von allgemeinen Größensystemen an die Spitze stellt, so ist unbedingt empfehlenswert, die rein algebraischen Untersuchungen nicht allzu weit zu treiben und, wie oben skizziert, durch Einführung des Begriffs der Universalstruktur sowie des topologischen Vollständigkeitsbegriffs verhältnismäßig früh den Anschluß an die klassische Analysis herzustellen, bei der der Körper *aller* reellen Zahlen oder, was auf dasselbe herauskommt, die Universalgruppe $\mathfrak{A}_u$ von vornherein im Mittelpunkt der Betrachtung steht.

Bonn, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 9. April 1960)

SPECHT, W.
Math. Zeitschr. 74, 91–98 (1960)

Zur Theorie der elementaren Mittel

Herrn ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

WILHELM SPECHT

Bezeichnet $\mathfrak{P}_n$ für eine beliebige Dimension $n > 1$ die Menge aller n-stelligen reellen Vektoren

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

mit positiven Komponenten, so läßt sich bei einer beliebig vorgegebenen Gewichtsverteilung

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \quad \text{mit} \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

in positiven Gewichten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ zu jedem von Null verschiedenen reellen Parameterwert s für jeden Vektor $x \in \mathfrak{P}_n$ das *elementare Mittel*

$$\mathfrak{M}_s(p, x) = \left(\sum p_\nu x_\nu^s\right)^{\frac{1}{s}} \tag{1.1}$$

(als positiver Wert) eindeutig erklären. Erklärt man noch das *geometrische Mittel*

$$\mathfrak{M}_0(p, x) = \exp\left(\sum p_\nu \log x_\nu\right) \tag{1.2}$$

und die *Extrema*

$$\mathfrak{M}_{-\infty}(p, x) = \lim_{s \to -\infty} \left(\sum p_\nu x_\nu^s\right)^{\frac{1}{s}} = \min_{(\nu)} (x_\nu), \tag{1.3}$$

$$\mathfrak{M}_{+\infty}(p, x) = \lim_{s \to +\infty} \left(\sum p_\nu x_\nu^s\right)^{\frac{1}{s}} = \max_{(\nu)} (x_\nu), \tag{1.4}$$

so besteht bekanntlich [1]) die Ungleichung

$$\mathfrak{M}_s(p, x) \leqq \mathfrak{M}_t(p, x) \quad \text{für} \quad -\infty \leqq s < t \leqq +\infty,$$

wobei das Gleichheitszeichen genau im Falle $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ zutrifft.

Während demnach der Quotient

$$Q_{s,t}(p, x) = \frac{\mathfrak{M}_t(p, x)}{\mathfrak{M}_s(p, x)} \quad \text{für} \quad -\infty < s < t < +\infty \tag{2.1}$$

eine von der Wahl der Gewichtsverteilung (p), der Wahl des Vektors $x \in \mathfrak{P}_n$ und von der Dimension n unabhängige untere Grenze

$$1 \leqq Q_{s,t}(p, x) \tag{2.2}$$

[1]) Man vergleiche: G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD and G. PÓLYA, Inequalities, insbes. Chap. II. Cambridge: University Press 1934.

besitzt, kann eine analoge obere Beschränkung nicht erwartet werden, da die obere Grenze

$$\overline{\operatorname{fin}}_{-\infty<s<t<+\infty} Q_{s,t}(\mathfrak{p}, x) = \frac{\mathfrak{M}_{+\infty}(\mathfrak{p}, x)}{\mathfrak{M}_{-\infty}(\mathfrak{p}, x)} = \frac{\max(x_\nu)}{\min(x_\nu)} = \beta(x), \tag{2.3}$$

die ich als die *(relative) Breite* des Vektors $x \in \mathfrak{P}_n$ bezeichnen will, in der Menge $\mathfrak{P}_n$ keiner oberen Beschränkung unterliegt.

Aus diesem Grunde liegt es nahe, die Frage einer oberen Abschätzung des Quotienten $Q_{s,t}(\mathfrak{p}, x)$ unter der Beschränkung auf die Menge $\mathfrak{P}_n(B)$ aller Vektoren $x \in \mathfrak{P}_n$ zu untersuchen, deren relative Breite der Bedingung

$$1 \leqq \beta(x) \leqq B \tag{3}$$

mit einer festen Konstanten $B \geqq 1$ unterliegt. Unter dieser Einengung der Fragestellung gilt nach (2.3) jedenfalls die Abschätzung

$$1 \leqq Q_{s,t}(\mathfrak{p}, x) \leqq \beta(x) \leqq B. \tag{4}$$

Eine genauere Untersuchung führt auf den nachstehenden

SATZ 1. *Für jeden Vektor $x \in \mathfrak{P}_n$ einer relativen Breite $1 \leqq \beta(x) \leqq B$ besteht bei beliebiger Gewichtsverteilung $(\mathfrak{p})$ die Ungleichung*

$$1 \leqq Q_{s,t}(\mathfrak{p}, x) \leqq \Gamma_{s,t}(B) \quad \text{für} \quad -\infty < s < t < +\infty \tag{5.1}$$

mit der (genauen) oberen Schranke

$$\Gamma_{s,t}(B) = \left(\frac{t-s}{t} \cdot \frac{B^t - 1}{B^t - B^s}\right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{s}{t-s} \cdot \frac{B^t - B^s}{B^s - 1}\right)^{\frac{1}{t}} \quad \text{für} \quad st \neq 0, \tag{5.2}$$

$$\Gamma_{0,t}(B) = \lim_{s \to 0} \Gamma_{s,t}(B) = \left(\frac{B^t - 1}{t \log B}\right)^{\frac{1}{t}} \exp\left(\frac{\log B}{B^t - 1} - \frac{1}{t}\right), \tag{5.3}$$

$$\Gamma_{s,0}(B) = \lim_{t \to 0} \Gamma_{s,t}(B) = \left(\frac{s \log B}{B^s - 1}\right)^{\frac{1}{s}} \exp\left(\frac{1}{s} - \frac{\log B}{B^s - 1}\right). \tag{5.4}$$

BEWEIS. Bildet man aus dem Vektor $x \in \mathfrak{P}_n$ mit einem beliebigen reellen Exponenten s den Vektor

$$x^s = (x_1^s, x_2^s, \ldots, x_n^s),$$

so besteht, wie man leicht erkennt, für die relative Breite die Gleichung

$$\beta(x^s) = \big(\beta(x)\big)^{|s|}. \tag{6.1}$$

Insbesondere gilt also

$$\beta(x^{-1}) = \beta(x). \tag{6.2}$$

Daher gehört ein Vektor x genau dann zur Menge $\mathfrak{P}_n(B)$, wenn für einen von Null verschiedenen Exponenten s der Vektor x^s der Menge $\mathfrak{P}_n(B^{|s|})$ angehört. Schließlich besteht für jeden reellen Wert s, jeden Vektor $x \in \mathfrak{P}_n$

und jede Gewichtsverteilung (p) die Gleichung

$$\mathfrak{M}_s(p, x) = \left(\mathfrak{M}_{-s}(p, x^{-1})\right)^{-1},$$

also auch die Gleichung

$$Q_{s,t}(p, x) = Q_{-t,-s}(p, x^{-1}) \quad \text{für} \quad -\infty < s < t < \infty. \tag{7}$$

Da wegen (6.2) mit dem Vektor x auch der reziproke Vektor x^{-1} die Menge $\mathfrak{P}_n(B)$ durchläuft, folgt hieraus die Beziehung

$$\Gamma_{s,t}(B) = \Gamma_{-t,-s}(B) \quad \text{für} \quad -\infty < s < t < \infty. \tag{8}$$

Aus diesem Grunde genügt es, den Satz 1 für die drei Fälle

a) $0 < s < t < \infty$; b) $0 = s < t < \infty$; c) $-\infty < s < 0 < t < \infty$

zu beweisen.

Da für jeden positiven Wert λ die Gleichung

$$Q_{s,t}(p, \lambda x) = Q_{s,t}(p, x)$$

besteht, ist die gesuchte Schranke $\Gamma_{s,t}(B)$ die obere Grenze

$$\Gamma_{s,t}(B) = \overline{\operatorname{fin}}_{(p,x)} Q_{s,t}(p, x) \leqq B$$

in der Teilmenge

$$\mathfrak{R}_n(B): \quad 0 < p_\nu < 1; \quad \sum p_\nu = 1; \quad 1 \leqq x_\nu \leqq B$$

des $2n$-dimensionalen euklidischen (p, x)-Raumes. Dieser Sachverhalt ermöglicht eine weitere Reduktion des Problems auf drei Sonderfälle:

a) Im Falle $0 < s < t < \infty$ setze man $1 < \tau = t/s$ und

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x^s \quad \text{mit} \quad 1 \leqq y_\nu = x_\nu^s \leqq B^s.$$

Dann besteht die Gleichung

$$Q_{s,t}^s(p, x) = \frac{\mathfrak{M}_t^s(p, x)}{\mathfrak{M}_s^s(p, x)} = \frac{\mathfrak{M}_\tau(p, y)}{\mathfrak{M}_1(p, y)} = Q_{1,\tau}(p, y),$$

also auch die Gleichung

$$\Gamma_{s,t}^s(B) = \Gamma_{1,t/s}(B^s) \quad \text{für} \quad 0 < s < t < \infty. \tag{9.1}$$

b) Im Falle $0 = s < t < \infty$ setze man

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x^t \quad \text{mit} \quad 1 \leqq y_\nu = x_\nu^t \leqq B^t.$$

Dann besteht die Gleichung

$$Q_{0,t}^t(p, x) = \frac{\mathfrak{M}_t^t(p, x)}{\mathfrak{M}_0^t(p, x)} = \frac{\mathfrak{M}_1(p, y)}{\mathfrak{M}_0(p, y)} = Q_{0,1}(p, y),$$

also auch die Gleichung

$$\Gamma_{0,t}^t(B) = \Gamma_{0,1}(B^t) \quad \text{für} \quad 0 = s < t < \infty. \tag{9.2}$$

c) Im Falle $s<0<t$ setze man

$$r=|s| \quad \text{und} \quad \tau=t/r,$$

ferner

$$y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)=x' \quad \text{mit} \quad 1\leqq y_\nu=x'_\nu\leqq B'.$$

Dann besteht die Gleichung

$$Q'_{s,t}(p, x)=\frac{\mathfrak{M}'_t(p, x)}{\mathfrak{M}'_s(p, x)}=\frac{\mathfrak{M}_\tau(p, y)}{\mathfrak{M}_{-1}(p, y)}=Q_{-1,\tau}(p, y),$$

also auch die Gleichung

$$\Gamma'^{|s|}_{s,t}(B)=\Gamma_{-1,t/|s|}(B^{|s|}) \quad \text{für} \quad -\infty<s<0<t<\infty. \tag{9.3}$$

Der Beweis des Satzes 1 ist damit auf die Bestimmung der drei Konstanten

(I) $\Gamma_{1,\tau}(B)$ für $\tau>1$; (II) $\Gamma_{0,1}(B)$; (III) $\Gamma_{-1,\tau}(B)$ für $\tau>0$

zurückgeführt.

FALL I. Die Berechnung der Konstanten

$$\Gamma_{1,\tau}(B)=\overline{\underset{(p,x)}{\text{fin}}}\, Q_{1,\tau}(p, x) \qquad (1<\tau<\infty)$$

für die Menge $\mathfrak{R}_n(B)$ zerlegen wir in die Bestimmung des Maximums

$$\Gamma_{1,\tau}(p, B)=\max_{(x)} Q_{1,\tau}(p, x)$$

bei fester Gewichtsverteilung (p) im abgeschlossenen Bereich

$$\mathfrak{X}_n(B): \quad 1\leqq x_\nu\leqq B$$

des n-dimensionalen euklidischen (x)-Raumes und die Bestimmung der oberen Grenze

$$\Gamma_{1,\tau}(B)=\overline{\underset{(p)}{\text{fin}}}\, \Gamma_{1,\tau}(p, B)$$

für alle möglichen Gewichtsverteilungen. Da der Wert $\Gamma_{1,\tau}(p, B)$ an einer Stelle $z\in\mathfrak{P}_n(B)$ angenommen wird, besteht die Gleichung

$$\Gamma^\tau_{1,\tau}(p, B)=Q^\tau_{1,\tau}(p, z)=\frac{\sum p_\nu z_\nu^\tau}{(\sum p_\nu z_\nu)^\tau}.$$

Wir setzen für einen beliebigen Index $1\leqq\varkappa\leqq n$

$$p_\varkappa=p; \quad \sum_{\nu\neq\varkappa} p_\nu z_\nu^\tau=(1-p)\, a_\tau; \quad \sum_{\nu\neq\varkappa} p_\nu z_\nu=(1-p)\, a_1$$

und bilden die Funktion

$$\varphi(x)=\frac{p\, x^\tau+(1-p)\, a_\tau}{(p\, x+(1-p)\, a_1)^\tau} \quad \text{für} \quad 1\leqq x\leqq B.$$

Die Ableitung

$$\varphi'(x)=p\,(1-p)\,\tau\,\frac{(1-p)\, a_1\, x^{\tau-1}-a_\tau}{(p\, x+(1-p)\, a_1)^{\tau+1}}$$

zeigt, daß die Funktion $\varphi(x)$ im Intervall $1 \leqq x \leqq B$ ihr Maximum in einem der Randpunkte $x=1$ oder $x=B$ annimmt, weshalb wir für jeden Index $1 \leqq \varkappa \leqq n$ auch eine der Gleichungen

$$z_\varkappa = 1 \quad \text{oder} \quad z_\varkappa = B$$

erhalten. Mithin genügt das Maximum $\Gamma_{1,\tau}(p, B)$ einer Gleichung

$$\Gamma_{1,\tau}^{\tau}(p, B) = \frac{1-\xi+\xi B^\tau}{(1-\xi+\xi B)^\tau} = \psi(\xi) \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \xi \leqq 1,$$

so daß wir weiter erhalten

$$\Gamma_{1,\tau}^{\tau}(B) = \max_{0 \leqq \xi \leqq 1} \psi(\xi).$$

Da die Ableitung

$$\psi'(\xi) = \frac{B^\tau - 1 - \tau(B-1) - \xi(\tau-1)(B-1)(B^\tau-1)}{(1-\xi+\xi B)^{\tau+1}}$$

die Nullstelle

$$0 < \xi_0 = \frac{B^\tau - 1 - \tau(B-1)}{(\tau-1)(B-1)(B^\tau-1)} < 1$$

besitzt, erhalten wir

$$\Gamma_{1,\tau}^{\tau}(B) = \psi(\xi_0) = \frac{(\tau-1)^{\tau-1}(B^\tau-1)^\tau}{\tau^\tau (B-1)(B^\tau-B)^{\tau-1}}$$

und damit

$$\Gamma_{1,\tau}(B) = \frac{\tau-1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau-1}\right)^{\frac{1}{\tau}}\left(\frac{B^\tau-1}{B^\tau-B}\right)\left(\frac{B^\tau-B}{B-1}\right)^{\frac{1}{\tau}}$$

in Übereinstimmung mit der Angabe des Satzes 1. Auf Grund der Gln. (8) und (9.1) folgt hieraus der Beweis des Satzes für alle Parameterpaare

$$-\infty < s < t < 0 \quad \text{bzw.} \quad 0 < s < t < \infty.$$

Fall II. In gleicher Weise wie zuvor erhalten wir die Konstante

$$\Gamma_{0,1}(B) = \overline{\inf_{(p,x)}} Q_{0,1}(p, x)$$

durch Bestimmung des Maximums

$$\Gamma_{0,1}(p, B) = \max_{(x)} Q_{0,1}(p, x)$$

im abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{X}_n(B)$ und durch die Bestimmung der oberen Grenze

$$\Gamma_{0,1}(B) = \overline{\inf_{(p)}} \Gamma_{0,1}(p, B)$$

für alle möglichen Gewichtsverteilungen. Der Wert $\Gamma_{0,1}(p, B)$ wird an einer Stelle $z \in \mathfrak{P}_n(B)$ angenommen:

$$\Gamma_{0,1}(p, B) = Q_{0,1}(p, z) = \frac{\sum p_\nu z_\nu}{\exp(\sum p_\nu \log z_\nu)}.$$

Setzen wir für einen beliebigen Index $1 \leqq \varkappa \leqq n$

$$p_\varkappa = p; \quad \sum_{\nu \neq \varkappa} p_\nu z_\nu = (1-p) a_1; \quad \sum_{\nu \neq \varkappa} p_\nu \log z_\nu = (1-p) \log a_0$$

und bilden wir die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{p\,x + (1-p)\,a_1}{\exp(p \log x + (1-p)\log a_0)} \quad \text{für} \quad 1 \leqq x \leqq B,$$

so zeigt die Ableitung

$$\varphi'(x) = p(1-p)\,\frac{x - a_1}{x \exp(p \log x + (1-p)\log a_0)},$$

daß die Funktion $\varphi(x)$ ihr Maximum in einem der Randpunkte $x=1$ oder $x=B$ annimmt. Mithin besitzt das Maximum $\Gamma_{0,1}(p, B)$ eine Darstellung

$$\Gamma_{0,1}(p, B) = \frac{1 - \xi + \xi B}{\exp(\xi \log B)} \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \xi \leqq 1,$$

so daß wir erhalten

$$\Gamma_{0,1}(B) = \max_{0 \leqq \xi \leqq 1} \psi(\xi).$$

Da die Ableitung

$$\psi'(\xi) = [(B-1) - (1 + \xi(B-1)) \log B] \exp(-\xi \log B)$$

die Nullstelle

$$0 < \xi_0 = \frac{B - 1 - \log B}{(B-1)\log B} < 1$$

besitzt, finden wir

$$\Gamma_{0,1}(B) = \psi(\xi_0) = \frac{1}{e}\,\frac{B-1}{\log B} \exp\left(\frac{\log B}{B-1}\right)$$

in Übereinstimmung mit den Angaben des Satzes 1. Auf Grund der Gln. (8) und (9.2) folgt hieraus der Beweis des Satzes für die Fälle

$$-\infty < s < t = 0 \quad \text{bzw.} \quad 0 = s < t < +\infty.$$

FALL III. Die Maxima

$$\Gamma_{-1,\tau}(p, B) = \max_{(x)} Q_{-1,\tau}(p, x) \quad \text{für} \quad \tau > 0$$

im abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{X}_n(B)$ liefern die Konstante

$$\Gamma_{-1,\tau}(B) = \overline{\inf_{(p)}}\, \Gamma_{-1,\tau}(p, B)$$

als obere Grenze für alle möglichen Gewichtsverteilungen. Der Wert $\Gamma_{-1,\tau}(p, B)$ wird an einer Stelle $z \in \mathfrak{P}_n(B)$ angenommen:

$$\Gamma^{\tau}_{-1,\tau}(p, B) = Q^{\tau}_{-1,\tau}(p, z) = \left(\sum p_\nu z_\nu^{\tau}\right)\left(\sum p_\nu z_\nu^{-1}\right)^{\tau}.$$

Setzen wir für einen beliebigen Index $1 \leqq \varkappa \leqq n$

$$p_\varkappa = p; \quad \sum_{\nu \neq \varkappa} p_\nu z_\nu^{\tau} = (1-p)\,a_{\tau}; \quad \sum_{\nu \neq \varkappa} p_\nu z_\nu^{-1} = (1-p)\,a_{-1}$$

und

$$\varphi(x) = \left(p\,x^{\tau} + (1-p)\,a_{\tau}\right)\left(p\,x^{-1} + (1-p)\,a_{-1}\right)^{\tau} \quad \text{für} \quad 1 \leqq x \leqq B,$$

so zeigt die Ableitung

$$\varphi'(x) = p(1-p)\,\tau\,\frac{(p+(1-p)\,a_{-1}\,x)^{\tau-1}}{x^{\tau+1}}\,(a_{-1}\,x^{\tau+1} - a_\tau),$$

daß die Funktion $\varphi(x)$ ihr Maximum in einem der Randpunkte $x=1$ oder $x=B$ annimmt. Mithin erhalten wir für das Maximum $\Gamma_{-1,\tau}(p, B)$ eine Gleichung

$$\Gamma^\tau_{-1,\tau}(p, B) = (1-\xi+\xi B^\tau)\,(1-\xi+\xi B^{-1})^\tau = \psi(\xi) \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \xi \leqq 1.$$

Die Nullstelle

$$0 < \xi_0 = \frac{B^\tau - 1 - \tau(1-B^{-1})}{(\tau+1)\,(B^\tau-1)\,(1-B^{-1})} < 1$$

der Ableitung

$$\psi'(\xi) = \big(1-(1-B^{-1})\,\xi\big)^{\tau-1}\,[B^\tau - 1 - \tau(1-B^{-1}) - (\tau+1)(B^\tau-1)(1-B^{-1})\,\xi]$$

liefert den Wert

$$\Gamma^\tau_{-1,\tau}(B) = \left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^\tau \left(\frac{B^\tau - B^{-1}}{B^\tau - 1}\right)^\tau \left(\frac{B^\tau - B^{-1}}{(\tau+1)\,(1-B^{-1})}\right),$$

also

$$\Gamma_{-1,\tau}(B) = \left(\frac{\tau+1}{\tau}\cdot\frac{B^\tau - B^{-1}}{B^\tau - 1}\right)^{-1} \left(\frac{-1}{\tau+1}\cdot\frac{B^\tau - B^{-1}}{B^{-1}-1}\right)^{\frac{1}{\tau}}$$

in Übereinstimmung mit den Angaben des Satzes 1. Nach (9.3) erhält man hieraus den Wert $\Gamma_{s,t}(B)$ in den noch verbliebenen Fällen

$$-\infty < s < 0 < t < +\infty.$$

Der Beweisgang in allen drei Sonderfällen zeigt zugleich, daß die angegebenen Werte $\Gamma_{s,t}(B)$ die optimalen Schranken für das behandelte Problem darstellen.

Übertragungen des Satzes 1 auf Integrale liegen nahe: Bezeichnet $p(x)$ eine beliebige (nichtnegativwertige) integrable normierte Belegungsfunktion des Intervalls $0 \leqq x \leqq 1$ der reellen Zahlengeraden:

$$\int_0^1 p(x)\,dx = 1,$$

so können für jede im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ erklärte positivwertige integrable Funktion $f(x)$ die Integralmittel

$$\mathfrak{M}_s(p, f) = \left[\int_0^1 f^s(x)\,p(x)\,dx\right]^{\frac{1}{s}} \quad \text{mit} \quad s \neq 0 \tag{10.1}$$

$$\mathfrak{M}_0(p, f) = \exp\left[\int_0^1 \log f(x)\cdot p(x)\,dx\right] \tag{10.2}$$

gebildet werden. Es besteht dann der

Satz 2. *Für jede auf dem Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ der reellen Zahlengeraden erklärte integrable positivwertige Funktion $f(x)$ mit den Schranken*

$$0 < f_0 \leqq f(x) \leqq F_0 \quad \text{auf} \quad 0 \leqq x \leqq 1$$

besteht bei beliebiger normierter Belegungsfunktion $p(x)$ die Ungleichung

$$(11) \qquad 1 \leqq \frac{\mathfrak{M}_t(p, f)}{\mathfrak{M}_s(p, f)} \leqq \Gamma_{s,t}\left(\frac{F_0}{f_0}\right) \quad \text{für} \quad -\infty < s < t < +\infty.$$

Als leicht überprüfbare Beispiele zu diesem Satze gebe ich an:

1. Auf dem Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ sei eine beliebige beschränkte integrable Funktion $f(x)$ erklärt:

$$f_0 \leqq f(x) \leqq F_0.$$

Dann besteht für jede Belegungsfunktion $p(x)$ des Intervalls die Ungleichung

$$1 \leqq \int_0^1 \int_0^1 e^{f(x)-f(y)}\, p(x)\, p(y)\, dx\, dy \leqq \left(\mathfrak{Cof}\, \frac{F_0 - f_0}{2}\right)^2 = \Gamma_{-1,1}(e^{F_0 - f_0}).$$

2. Unter den gleichen Voraussetzungen besteht auch die Ungleichung

$$1 \leqq \frac{\int_0^1 \exp[f(x)]\, p(x)\, dx}{\exp\left[\int_0^1 f(x)\, p(x)\, dx\right]} \leqq \frac{e^{F_0 - f_0} - 1}{(F_0 - f_0)\, e} \cdot \exp\left(\frac{F_0 - f_0}{e^{F_0 - f_0} - 1}\right) = \Gamma_{0,1}(e^{F_0 - f_0}).$$

Erlangen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 23. September 1959)

JURKAT, W. B.
Math. Zeitschr. 74, 99–104 (1960)

Polynomial approximation of continuous functions on linear spaces

Dedicated to ERICH KAMKE on his 70-th birthday

By

W. B. JURKAT[1])

Let f denote a continuous mapping of a Hausdorff space X into a real linear Hausdorff space Y (i.e. separated topological vector space with real scalars), let G be a set of real-valued continuous functionals on X, and denote by P the set of all polynomials p in the functions from G with coefficients from Y:

$$p(x) = \sum y_{n_1,\ldots,n_k} g_1(x)^{n_1} \ldots g_k(x)^{n_k}.$$

These polynomials are continuous functions on X into Y and shall be used in approximating f. Here, of course, we have to specify in a reasonable way the type of approximation desired. It seems natural to ask for uniform approximation on X since limit points of P in this topology are necessarily continuous functions. Under the additional assumptions that X is compact and that Y is locally convex[2]) we obtain by obvious changes in BOURBAKI's proof [2, Chap. X, § 5, No. 4] the following generalization of the Weierstrass-Stone theorem: *In order that every continuous f can uniformly be approximated on X by polynomials from P it is necessary and sufficient that the points of X can be separated by means of functionals from G, i.e. to each pair $x_1 \neq x_2$ from X there exists a $g \in G$ with $g(x_1) \neq g(x_2)$.*

For non-compact spaces X one can, in general, not hope to obtain polynomial approximation uniformly on X. One should either include more functions into P or weaken the topology which describes the type of approximation. It is natural to use the compact open topology[3]) in the space of continuous functions on X into Y which corresponds to uniform convergence on all compact subsets of X. Limit points of P in this topology are necessarily functions which are continuous on all compact subsets of X. To ensure that these limit points are continuous on X we simply assume that X is a metric space. If, moreover, Y is locally convex (and real, separated) then the theorem mentioned above can readily be extended as follows: *In order that P is dense in the space of all continuous functions on X into Y under the compact open topology it is necessary and sufficient that the points of X can be separated by*

[1]) This research was supported by the United States Air Force Office of Scientific Research under contract No. AF 49(638)-619.

[2]) For a definition see BOURBAKI [3, Chap. II].

[3]) For a definition see KELLEY [5, Chap. 7].

means of functionals from G. The metric of X is not needed for the sufficiency part of the proof, but ensures that nothing of the continuity of f is lost in the approximation.

From the viewpoint of analysis the interesting spaces X will be locally convex with real or complex scalars. The Hahn-Banach theorem then implies that the set of all linear continuous functionals (real-valued or complex-valued respectively) separates the points of X and is, therefore, a natural choice for G. The theorem above applies, in case of complex scalars with the obvious change that Y also should allow complex scalars and that the polynomials should be formed in functionals from G *and* their conjugates[4]). In this way we obtain polynomial approximations for a continuous f if both X and Y are locally convex (and separated). If the compact open topology is metrizable there will even exist a (countable) sequence $p_n \in P$ which converges to f uniformly on every compact set in X. But in most cases of interest this topology is not metrizable so that the result above guarantees only a non-countable sequence converging to f which may, therefore, bear little resemblance to any of the p's. The purpose of this paper is to show that in most cases of interest every continuous function f can, nevertheless, be represented as limit of a countable sequence of polynomials in linear continuous functionals and their conjugates under the uniform convergence on compacta. This result is a non-trivial improvement even with pointwise convergence.

The author is indebted to G. G. LORENTZ for valuable remarks.

1. Main result. We *assume* the field S of *scalars* to be *either* the system of *real* numbers *or* the system of *complex* numbers throughout the paper. Following Bourbaki locally convex, metric, complete spaces are called Fréchet spaces. These are vector spaces which are complete under a metric defined by countably many semi-norms. Any Banach space is of this type. We *assume* that X is a *Fréchet space*. A subset A of X is called separable if A contains a countable dense set. A subset B of X is called bounded if $\lambda_n x_n \to 0$ for arbitrary $x_n \in B$, $\lambda_n \in S$, $\lambda_n \to 0$, or equivalently if all defining semi-norms remain bounded on B. We *assume* that D is a *separable closed* subset of X and that there exist *countably many bounded* sets $B_n \subseteq X$ such that *every compact set* $C \subseteq D$ is *contained in one* of the B_n's. The latter assumption means that D is covered by bounded sets B_n in a certain way which can be realized, e.g., if D is bounded or if X is a Banach space. We *assume* that Y is a *Fréchet space* and that R is a topological vector *subspace* of Y. With any set G of functionals g on X (into S) we associate the set P of all polynomials p in functionals g and their conjugates $\bar{g}$, $g \in G$, with coefficients in R.

Under these assumptions we have the following

Theorem. *There exists a (universal) countable set* G *of linear continuous functionals* g *on* X *such that every continuous function* f *on* D *into* R *is limit*

[4]) Special polynomial approximations using linear functionals on a convex compact space were introduced by J. BLACKMAN in connection with electrical networks (oral communication).

of a convergent countable sequence $p_n \in P$ under the uniform convergence on all compact subsets C of D.

The set G can always be replaced by the set of all linear continuous functionals on X. If X is a separable Banach space we may take for D the whole space X or any closed subset of it. For R we may take another Banach space and put $Y=R$. This special case covers many interesting situations in functional analysis and supplies the proper approximation theorems there. For finite dimensional spaces we obtain classical forms of the Weierstraß approximation theorem.

2. Lemmas. We denote by $C[0, 1]$ the Banach space of continuous functionals on $[0, 1]$ (into S), by N the set of natural integers, and by X^N the product of spaces X, one for each $n \in N$. If X is a Fréchet space so is X^N.

Lemma 1. *Every separable Fréchet space X is isomorphic to a closed linear subspace of $C[0, 1]^N$.*

The *proof* is based on the Banach-Mazur theorem that every separable Banach space is isomorphic to a closed linear subspace of $C[0, 1]$, also in the case of complex scalars [*1*, p. 185]. Suppose that X_n is the separable Banach space obtained from X and the n-th semi-norm by first taking equivalence classes to obtain a norm and then completing the space. It is easy to see, cf. BOURBAKI [*3*, Chap. II, § 5, No. 5], that X is isomorphic to a closed linear subspace of the product of the X_n's, and the proof is completed by embedding every X_n into $C[0, 1]$.

A Fréchet space X is said to have the K-property if there exist linear continuous functionals $g_{nk}(x)$ on X, and $x_{nk} \in X$, $k_n \in N$ such that

$$\pi_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} g_{nk}(x)\, x_{nk} \to x \qquad (n \to +\infty) \tag{1}$$

for all $x \in X$. By the Banach-Steinhaus theorem, cf. BOURBAKI [*3*, Chap. III, § 3, No. 6], the convergence in (1) must be uniform on every compact subset of X. A property of this type was first considered by KOLMOGOROV in connection with questions of compactness, cf. BANACH [*1*, p. 237]. The K-property is clearly satisfied if X has a Schauder basis as, e.g., $C[0, 1]$ does. But the K-property for $C[0, 1]$ follows more easily by Fejér means or better by Bernstein polynomials. If X has the K-property so does X^N as is easily verified. Hence Lemma 1 contains the

Corollary. *Every separable Fréchet space can be embedded (isomorphically) into a Fréchet space with the K-property.*

It is even possible to show that $C[0, 1]^N$ has a Schauder basis. But this improvement is not important for us.

Under the assumptions of the Theorem we have

Lemma 2. *Every continuous function f on D into R can be extended to a continuous function F on X into R.*

This extension of TIETZE's theorem is due to DUGUNDJI [4], actually with fewer assumptions than we have listed.

3. Proof of the Theorem. We may assume $B_n \subseteqq D$, $B_n \subseteqq B_{n+1}$ $(n \in N)$ without loss of generality. If we replace X by a smaller Fréchet space containing D or by a bigger Fréchet space the Theorem remains equally true in view of the Hahn-Banach extension theorem. So we may first replace X by the closed linear hull of D which is separable and then by a Fréchet space with the K-property according to the Corollary. This space we call X again, and G will consist of the functionals occurring in (1). Now construct the extension F according to Lemma 2. Denote the metrics in X and Y by $d(x_1, x_2)$, $d(y_1, y_2)$ respectively. The continuity of F implies that to every compact set $C \subseteqq X$ and to every $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that

$$d\big(F(x_1), F(x_2)\big) \leqq \varepsilon \quad \text{if} \quad d(x_1, x_2) \leqq \delta, \qquad x_1 \in C, \qquad x_2 \in X. \tag{2}$$

Therefore

$$f_n(x) = F\big(\pi_n(x)\big) \to F(x) \qquad (\text{all } x \in X,\ n \to +\infty), \tag{3}$$

and uniformly so on every compact set $C \subseteqq X$. Clearly

$$f_n(x) = F_n\big(g_{n1}(x), \ldots, g_{nk_n}(x)\big), \tag{4}$$

where F_n denotes a continuous function on S^{k_n} into R. Denote by I_n an interval in S^{k_n} containing the image of the bounded set B_n under the mapping $x \to \big(g_{n1}(x), \ldots, g_{nk_n}(x)\big)$. By a finite dimensional Weierstrass approximation theorem there exists a polynomial P_n in the variables $g_{n1}, \ldots, g_{nk_n}$ and $\bar{g}_{n1}, \ldots, \bar{g}_{nk_n}$ with coefficients in R such that

$$d(F_n, P_n) \leqq 1/n \quad \text{on} \quad I_n. \tag{5}$$

This polynomial can be obtained by ideas already used in the introduction[5]. For instance one can decompose I_n into small simplices and replace F_n by a function which is linear on each simplex and maps, therefore, I_n into a finite dimensional subspace of R. Using a basis for this subspace the problem reduces to the approximation of continuous functionals on I_n which is classical and the starting point of our approach. Making the g's in P_n dependent upon x again we obtain polynomials $p_n \in P$ such that

$$d\big(f_n(x), p_n(x)\big) \leqq 1/n \quad \text{for} \quad x \in B_n. \tag{6}$$

Now consider an arbitrary compact set $C \subseteqq D$ which will be contained in B_k, say. Since $C \subseteqq B_n$ $(n \geqq k)$ we infer from (6) that $f_n(x) - p_n(x) \to 0$ uniformly on C, while (3) gives $f_n(x) \to f(x)$ uniformly on C, hence

$$p_n(x) \to f(x) \qquad \text{uniformly on } C. \tag{7}$$

[5] G. LORENTZ remarks that Bernstein polynomials can be applied directly to this situation.

4. Remarks. Let us discuss the assumptions on D in our Theorem. To be closed is essential already for finite dimensional spaces. Separability is necessary if f is the identity mapping. The Theorem implies that for every separable Banach space X there exist polynomials $p_n \in P$ such that

$$p_n(x) \to x \qquad (\text{all } x \in X,\ n \to +\infty), \tag{8}$$

even uniformly on all compact subsets of X. This is a weaker property than the K-property (1) and typical for our Theorem. It is not known whether or not the K-property holds for every separable Banach space. For polynomial approximation it is cearly necessary that the range of f be separable. Most of the difficulties already appear for functionals f. For every Hilbert space of uncountable dimension the norm cannot be approximated by a sequence $p_n \in P$, even if G consists of all linear continuous functionals. But, perhaps, there are non-separable Banach spaces such that all continuous functionals can be approximated everywhere by varying G with the functionals. If we keep G fixed and countable the number of approximable functionals is at most equal to the power of the continuum. The covering property of D is important for metric spaces like S^N.

It is interesting to investigate approximation also under the "strong" topology of uniform convergence on all bounded sets. *Suppose* for simplicity that X and Y are Banach spaces and P the set of all polynomials constructed from all linear continuous functionals on X and their conjugates. The polynomials map bounded sets into (relatively) compact sets, and functions in the strong closure of P do the same. Under the weak topology on X the polynomials are uniformly continuous on bounded sets of X. The same holds true for functions of the strong closure of P. We want to show that this property is characteristic for elements of the closure. To this end we consider the strong bi-dual X'' which is a Banach space containing X with the same norm, and which under a "weak" topology contains X with its weak topology as a dense subspace. Moreover the closed balls in X'' are compact under this weak topology. Let us consider a function f on X into Y which is uniformly continuous on all bounded sets of X under its weak topology. As bounded set we choose a closed ball B in X. Its weak completion in X'' is denoted by B''. By weak continuity f can be extended to B''. Now the Weierstrass-Stone theorem of the introduction allows uniform approximation on the weakly compact set B'' by polynomials with coefficients in Y, where for the variables or their conjugates we may take continuous linear functionals on X'' under the weak topology (since these functionals already separate). But these functionals are nothing but extensions by weak continuity of continuous linear functionals on X (under the weak or strong topology). Restricting all functions to B it follows that f can uniformly be approximated on B by polynomials from P. Since B was arbitrary we conclude that f belongs to the strong closure of P. Since the topology of uniform convergence on bounded sets is metrizable we have the following result under the assumptions specified above: *A function f on X into Y is limit of a convergent countable*

sequence $p_n \in P$ under the uniform convergence on all bounded sets if and only if on every bounded set f is uniformly continuous under the weak topology of X. If X is reflexive ($X'' = X$) every weakly continuous function f can be approximated in this stronger sense. Weakly continuous functions depend (in a certain sense) essentially only upon finitely many parameters. Usually there will exist many strongly continuous functions which can be approximated in the stronger sense only if the set P is enlarged in a suitable way.

References

[1] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932. — [2] BOURBAKI, N.: Éléments de Mathématique, Livre III, Topologie générale. Paris 1949. — [3] BOURBAKI, N.: Livre V, Espaces vectoriels topologiques. Paris 1955. — [4] DUGUNDJI, J.: An extension of TIETZE'S theorem. Pacific J. Math. **1**, 353–367 (1951). — [5] KELLEY, J. L.: General topology. New York 1955.

Dept. of Math., Syracuse University, Syracuse, N.Y. (U.S.A.)

(Eingegangen am 30. September 1959)

HOFMANN, J. E.
Math. Zeitschr. 74, 105–118 (1960)

Über die Quadrisectio trianguli

Herrn ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

JOSEPH EHRENFRIED HOFMANN

1. Im folgenden soll zunächst einiges aus neu aufgetauchtem Material über die Frühgeschichte der Aufgabe mitgeteilt werden:

Ein Dreieck durch zwei zueinander senkrechte Gerade in vier flächengleiche Stücke zu zerschneiden (Quadrisectio trianguli).

Diese Aufgabe hat seit der Behandlung durch JAK. BERNOULLI[1]) und L. EULER[2]) steigendes Interesse gefunden[3]). Sie taucht jedoch schon früher auf. So wurde sie von M. DE MAUBUISSON, einer sonst nicht weiter bekannten Pariser Persönlichkeit, an HUYGENS gegeben. Dies entnehmen wir einer Notiz von CHR. HUYGENS[4]) auf einem Zettel, der eine Figur und einige Rechnungen von anderer Hand trägt[5]) und vielleicht von MAUBUISSON stammt. Bei der etwas flüchtig gezeichneten Figur[6]) (Abb. 1) findet sich außer den Streckenbezeichnungen $BF = x$, $CE = y$ und $BC = 2a$ noch die Gleichung

$$x^2 = 8ay + 8ax - 4yx - 10aa - yy, \tag{1.1}$$

aus der die Lage der 4 Punkte A, E, F, C auf der Dreieckseite AC gekennzeichnet wird, falls die in E und F beginnenden Strecken die lösenden sind.

[1]) *Solutio algebraica problematis de quadrisectione trianguli scaleni per duas normales rectas.* Acta eruditorum für November 1687, 617–623 = *Opera* I, ed. G. CRAMER, Genf 1744, 328–335. Vgl. z. B. A. PROCISSI: *Il problema Bernoulliano „De quadrisectione ...".* Periodico di mat. (4) **14**, 1–21 (1934).

[2]) *Dilucidationes super problemate geometrico de quadrisectione trianguli a J. Bernoulli olim tractato,* Erstdruck in den Mém. de l'Ac. sc. de Pétersbourg **1** (1803/06), 26–48 (1809) = *Opera omnia* (1) XXVI, ed. A. SPEISER, Lausanne 1953, 286–303, und *Solutio completa problematis de quadrisectione trianguli per duas rectas inter se normales,* Erstdruck ebda 49–87 bzw. 304–333. Beide Abhandlungen wurden der Petersburger Akademie am gleichen Tage, nämlich am 3. 5. 1779 alten Stils vorgelegt. Über den Inhalt vgl. das diesbezüglich in der Einleitung (*Opera* XXX–XXXIV) Gesagte.

[3]) Vgl. G. LORIA: *Osservazioni sopra la storia di un problema pseudo-elementare.* Bibliotheca math. (3) **4**, 48–51 (1903).

[4]) *Œuvres complètes* XX, bearbeitet von E. J. DIJKSTERHUIS und J. A. VOLLGRAFF, d. Haag 1940, 428.

[5]) Dieser Zettel befindet sich im Mscr. D aus dem Huygensschen Nachlaß in Leiden und wird ergänzt durch die Aufzeichnungen auf S. 427–433 und 435–436 des Ms.; die zugehörige Figur befindet sich auf Blatt 189 der *Chartae mathematicae,* das in dieses Ms. gehört und herausgenommen wurde. Aus Datierungen von weiteren Aufzeichnungen im Mscr. D geht hervor, daß diese Blätter im Herbst 1672 niedergeschrieben wurden.

[6]) Die Punktbezeichnung C zwischen den Ecken A und C dürfte nur versehentlich hinzugefügt worden sein. Die Strecken BE und FC sind nur wenig voneinander verschieden, und zwar ist BE die kürzere. Die Seitenhalbierende AQ geht nicht durch den Schnittpunkt der aus E und F kommenden und das Dreieck ABC viertelnden Strecken.

Diese Bedingung ist zwar notwendig, jedoch nicht hinreichend. Sind E und F gemäß (1.1) bestimmt, so vierteln die in E und F beginnenden und die Fläche des Dreiecks jeweils halbierenden Strecken die Fläche des Dreiecks, aber daraus geht noch nicht hervor, daß sie aufeinander senkrecht stehen müssen.

Ergänzend bemerkt HUYGENS: Wird BC durch Q halbiert und verhält sich BC zu QA wie 9 zu 8, dann sind BF und CE mittlere Proportionale zwischen BQ und $BQ+QA$ und es ist $BE=CF=\frac{1}{6}\cdot BC$. In seinen eigenen Notizen zum nämlichen Gegenstand vermerkt er, dieser Sonderfall gehe auf MAUBUISSON zurück. Unerwähnt bleibt jedoch, daß sich in diesem Fall die teilenden Strecken auf AQ schneiden und die ganze Figur hinsichtlich AQ schrägsymmetrisch ist. Ob MAUBUISSON nur der Mittelsmann oder der Erfinder der Aufgabe ist, ist im Augenblick noch ungeklärt.

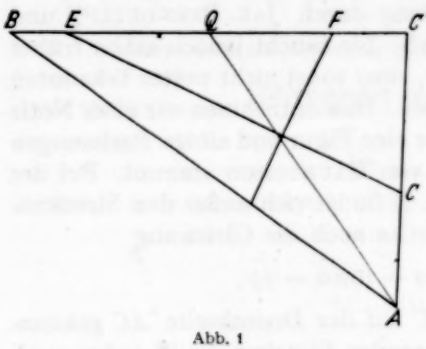


Abb. 1

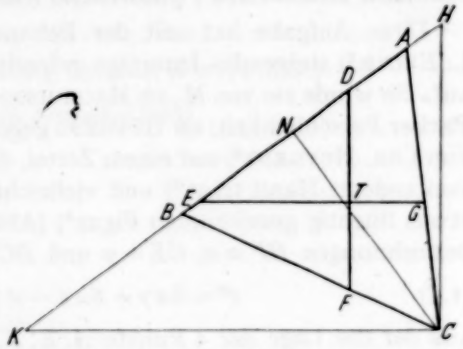


Abb. 2

2. HUYGENS hat sich im Herbst 1672 eingehend mit dieser Aufgabe befaßt [5]). Er gewinnt an Hand der Abb. 2 auf Grund rein geometrischer Überlegungen ein Äquivalent der Gl. (1.1). Nach Entlastung seiner Figur von überflüssigen und störenden Nebenlinien und Einträgen setzen wir mit HUYGENS $AB=a$, $AE=x$, $DB=y$ und schneiden die Parallelen zu den teilenden Linien DF und EG durch C mit der verlängerten AB in H und K. Weil nun $\triangle AGE=\frac{1}{2}\cdot\triangle ABC$ und $GE\parallel CK$ ist, gilt

$$\begin{cases} AE\times AG=\frac{1}{2}\cdot AB\times AC, \\ AE:AG=AK:AC, \end{cases} \tag{2.1}$$

also

$$AK=2\cdot x^2:a \quad \text{und entsprechend} \quad HB=2\cdot y^2:a. \tag{2.2}$$

Weiterhin ergibt sich aus $GE\parallel CK$ und $\triangle AEG=2\cdot\triangle DET$ das Gleichungstripel

$$AE:EG=AK:KC, \quad ET:DE=KC:HK, \quad AE\times EG=2\cdot DE\times ET. \tag{2.3}$$

Hieraus folgt nach seitenweiser Multiplikation unter Mitverwenden von (2.2)

$$a\cdot HK=4\cdot DE^2. \tag{2.4}$$

Nun ist aber

$$HK = AK + HB - AB = (2x^2 + 2y^2 - a^2) : a \tag{2.5}$$

und

$$DE = AE + DB - AB = x + y - a, \tag{2.6}$$

also

$$x^2 + 4xy + y^2 - 4a(x + y) + \tfrac{5}{2} \cdot a^2 = 0. \tag{2.7}$$

Damit ist (1.1) wiedergewonnen. HUYGENS bemerkt dazu, daß hieraus bei Deutung von x und y als cartesische Koordinaten eine Hyperbel entsteht.

Die hinzutretende Orthogonalbedingung gewinnt HUYGENS vermöge des Pythagoreischen Lehrsatzes aus $\triangle CHK$. Er fällt das Lot $CN = n$ aus C auf AB und rechnet anfangs etwas unzweckmäßig weiter, gelangt jedoch später zu einer symmetrischen Schlußformel, die sich mit $AN = e$, $NB = d$ so ergibt: Aus

$$HA = HB - AB = \frac{2y^2}{a} - a \quad \text{und entsprechend} \quad BK = \frac{2x^2}{a} - a \tag{2.8}$$

folgt unter Verwendung der rechtwinkligen Dreiecke HNC und KNC

$$\left(\frac{2x^2 + 2y^2}{a} - a\right)^2 = HK^2 = \left(\frac{2y^2}{a} - a + e\right)^2 + \left(\frac{2x^2}{a} - a + d\right)^2 + 2n^2, \tag{2.9}$$

also wegen $d + e = a$

$$\frac{4x^2y^2}{a^2} = \frac{2dx^2}{a} + \frac{2ey^2}{a} + n^2 - de, \tag{2.10}$$

oder

$$\left(x^2 - \frac{ae}{2}\right)\left(y^2 - \frac{ad}{2}\right) = \left(\frac{an}{2}\right)^2 [= \triangle^2]. \tag{2.11}$$

Ist nun $x = y$, dann folgt aus (2.7) entweder der nur für ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze C brauchbare Wert $x = y = \frac{a}{2}$ oder der Wert $x = y = \frac{5a}{6}$. Alsdann führt (2.10) auf

$$n^2 - de = \frac{175}{324} \cdot a^2 \quad \text{oder} \quad n^2 + \left(\frac{d-e}{2}\right)^2 = \left(\frac{8a}{9}\right)^2. \tag{2.12}$$

Hier ist $n^2 + \left(\frac{d-e}{2}\right)^2$ das Quadrat der aus C kommenden Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC. Diese Seitenhalbierende verhält sich also zur Grundlinie AB wie 8 zu 9. Das ist die Begründung des oben erwähnten Ergebnisses von MAUBUISSON[7]).

Jetzt konstruiert HUYGENS die aus (2.7) und (2.11) bestimmten Kurven an einer neuen, leider nur recht flüchtig skizzierten Figur (Abb. 3), in der A als Ursprung, AB als die Richtung der positiven Y-Achse und das aus A nach unten gehende Lot zu AB als die positive X-Achse angesehen wird. Der

[7]) Die Gleichungen (2.12) finden sich nicht in den noch erhaltenen Aufzeichnungen von HUYGENS; diese sind jedoch nur skizzenhaft angelegt und noch nicht endgültig redigiert, so daß aus dem Fehlen eines logisch nötigen Zwischenstückes in den Entwicklungen nichts gegen den Autor geschlossen werden darf.

Mittelpunkt $\left(\frac{2a}{3}; \frac{2a}{3}\right)$ der Hyperbel ist mit D bezeichnet; das Asymptotenpaar — es schließt ja mit AB die Winkel $\pm 60°$ ein — wird anscheinend auf

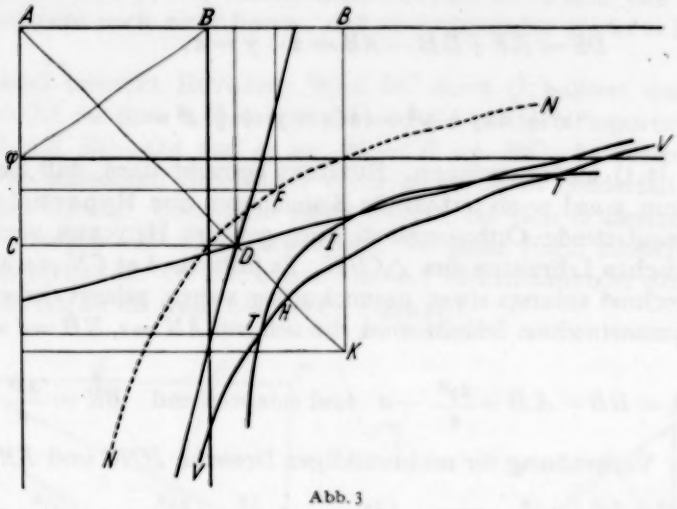


Abb. 3

Grund einer in den Aufzeichnungen nicht erhaltenen Rechnung konstruiert. Gezeichnet ist nur der Hyperbelast VHV durch den Punkt $H\left(\frac{5a}{6}; \frac{5a}{6}\right)$.

HUYGENS weiß natürlich, daß die durch (2.11) dargestellte Kurve TIT zu den beiden Koordinatenachsen symmetrisch ist, und daß für seine Zwecke zunächst nur der Schnittpunkt T mit der Hyperbel innerhalb des Quadrates $0 \leqq x \leqq a$ in Frage kommt. Er zeichnet nur den Kurvenast im I. Quadranten mit den Asymptoten $x = \sqrt{\frac{ae}{2}} = A\varphi$ und $y = \sqrt{\frac{ad}{2}} = AB$, so daß $A\varphi^2 + AB^2 = \frac{1}{2} \cdot a^2$. Zur Konstruktion bedient er sich der (im Bild punktierten) Hyperbel FN mit der Gleichung

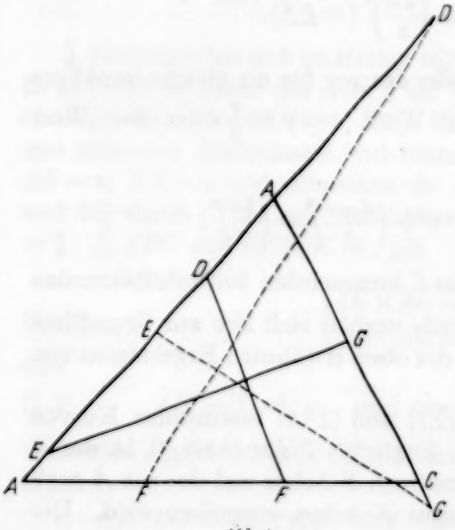


Abb. 4

$$\xi\eta = \frac{an}{2} \; [= \triangle], \tag{2.13}$$

wobei er

$$\xi^2 = x^2 - \frac{ae}{2}, \quad \eta^2 = y^2 - \frac{ad}{2} \tag{2.14}$$

nach dem Pythagoreischen Lehrsatz bestimmt. Er nimmt d und e als positiv an, beschränkt sich also auf spitzwinklige Dreiecke.

Besonders interessant ist eine am Ende dieser Aufzeichnungen ohne nähere Erläuterung gegebene und sehr sorgfältig ausgeführte Figur (Abb. 4), die zwei

Lösungen des Problems an einem spitzwinkligen Dreieck zeigen will. Beim Nachkonstruieren ergibt sich jedoch — dies ist in der Huygens-Ausgabe nicht beachtet —, daß nur die ausgezogenen Linien DF, EG und die gerissene Linie EG das Dreieck ABC halbieren, nicht aber die gerissene Linie DF. Gl. (2.7) ist nämlich darauf beschränkt, daß sich D und E auf der Dreieckseite AB selbst befinden und nicht auf einer ihrer Verlängerungen. Sie kann daher nicht auf den außerhalb des Dreiecks liegenden Abschnitt AD angewendet werden, wie das ersichtlich von HUYGENS versucht worden war.

3. Aus diesen Aufzeichnungen geht hervor, daß HUYGENS das Problem der Quadrisectio weitgehend durchgedacht und viele Vorarbeiten für eine spätere Veröffentlichung über diesen Gegenstand getroffen hatte. Dazu ist es jedoch nicht gekommen, und zwar durch eine Unbedachtheit von HUYGENS. Dieser war nämlich im September 1686 von dem jungen Schweizer N. FATIO de Duillier besucht worden, der sich damals gerade auf dem Wege nach England befand, hatte an dem Gast Gefallen gefunden und sich mit diesem bei einem erneuten Besuch im März 1687 eingehend über verschiedene mathematische Fragen unterhalten. Damals mag wohl auch die Quadrisectio berührt worden sein, auf die FATIO womöglich auch in Paris hingewiesen worden sein mag — als ein bisher noch nicht völlig gelöstes und ziemlich schwieriges Problem. Davon muß FATIO seinem Basler Freund JAK. BERNOULLI Mitteilung gemacht haben, und zwar mit der zusätzlichen unrichtigen Bemerkung, HUYGENS habe die Lösung auf eine Gleichung von höherem als dem 40. Grad zurückgeführt. Das schließen wir aus einer Andeutung, die BERNOULLI in einem Brief an FATIO vom 2. 10. 1700 einfließen läßt[8]).

Mag nun diese Bemerkung oder ein anderer Hinweis der Anlaß für BERNOULLI gewesen sein, sich eingehender mit der Fragestellung zu befassen: Auf jeden Fall finden wir in seinem Tagebuch, den *Meditationes et annotationes*[9]), einen vom Druck[1]) nur wenig abweichenden Entwurf. Gleich zu Beginn des Textes weist BERNOULLI auf HUYGENS hin, ohne ihn jedoch mit Namen zu nennen[10]). Er schickt dem eigentlichen Text vier Hilfssätze voraus:

1. *Jede der beiden viertelnden Strecken halbiert für sich das Dreieck.*

2. *Keine der Teillinien in einem Dreieck mit ungleichen Seiten kann durch eine Ecke gehen.*

---

[8]) Dieser bisher noch nicht veröffentlichte Brief war mir dank der Liebenswürdigkeit von Herrn O. SPIESS-Basel in Abschrift zugänglich. Infolge eines Schreibversehens wird das Datum dieses Briefes in J. E. HOFMANN: *Über Jak. Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik*, Genf 1957 = Monographies de l'Enseignement math. Nr. 3, Anm. 75, wo diese Anlegenheit kurz gestreift wird, unrichtig mit 2. 5. 1700 angegeben.

[9]) Mskr. LI a 3 der Basler Universitätsbibliothek, Artikel 108. Auch dieses Ms. konnte ich auf Grund des Entgegenkommens von Herrn SPIESS in Abschrift verwenden.

[10]) Ich gebe den Wortlaut nach den *Opera*[1]), 328 wieder: *Problema hocce, quod summum hujus aevi Mathematicum non ita pridem occupatum tenuit, tam parum ex voto eidem successisse audio, ut ultra quadragesimam potestatem, si bene memini, et credere fast est, assurrexerit.* Vielleicht ist *quadragesimam* Schreibfehler und sollte durch *quartam* ersetzt werden. Wäre dem so, dann hätte alles seine Richtigkeit. (Zusatz bei der Korrektur.)

3. Keine der Teillinien in einem Dreieck mit ungleichen Seiten kann zu einer Dreieckseite parallel oder senkrecht liegen.

4. Es ist nicht möglich, daß sich die Endpunkte der Teillinien auf zwei Dreieckseiten allein verteilen (so daß auf der dritten Seite kein Endpunkt liegt). Jene Seite, auf der sich zwei der Endpunkte befinden, ist niemals die längste.

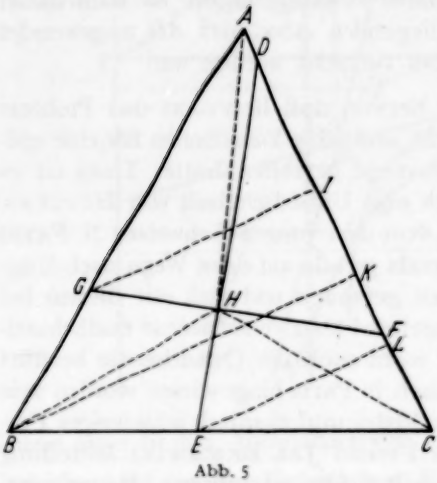


Abb. 5

Die Analysis des Problems schließt an drei gleichartig behandelte Figuren an, die sich nur durch die Gestalt des Dreiecks unterscheiden. Die Seite, auf der sich die beiden Teilpunkte D und F befinden, ist AC und liegt schräg. Im ersten Fall (Abb. 5) sind die Winkel bei A und C spitz, im zweiten Fall ist der bei C und im dritten Fall der bei A stumpf.

Auch BERNOULLI geht bei Herleitung der kennzeichnenden Gleichungen rein geometrisch vor, verwendet jedoch andere Hilfslinien als HUYGENS, nämlich die Lote aus E, B, G auf AC und die Strecken AH, BH, CH. Mit $AC = a$, $KB = d$, $KC = e$, $KA = f$, $CD = x$, $AF = y$ sieht seine Rechnung in verkürzter Form so aus:

$$(3.1)\quad \frac{\triangle BEH}{\triangle ECH} = \frac{BE}{EC} = \frac{KB - EL}{EL} = \frac{KB \times AD - EL \times AD}{EL \times AD} = \frac{\frac{x}{a} \cdot \frac{ad}{2} - \frac{ad}{4}}{\frac{ad}{4}} = \frac{2x - a}{a}$$

und

$$(3.2)\quad \triangle ECH = \triangle DEC - \triangle DHC = \frac{ad}{4} - \frac{ad}{8} \cdot \frac{x}{x + y - a} = \frac{x + 2y - 2a}{x + y - a} \cdot \frac{ad}{8},$$

also

$$(3.3)\quad \begin{cases} \triangle BEH = \dfrac{(2x - a)(x + 2y - 2a)d}{8(x + y - a)} \\ \text{und entsprechend} \\ \triangle BGH = \dfrac{(2y - a)(2x + y - 2a)d}{8(x + y - a)}. \end{cases}$$

Nun ist aber $\triangle BEH + \triangle BGH = \frac{1}{4} \cdot \triangle ABC = \frac{ad}{8}$; also entsteht durch Einsetzen wiederum Gl. (2.7). Die Orthogonalitätsbedingung ergibt sich dann aus der Ähnlichkeit der Dreiecke FGI und EDL vermöge $GI : IF = DL : EL$ nach leichter Umformung aus

$$(3.4)\quad y^2 = \frac{1}{2} \cdot af + \frac{a^2 d^2}{4x^2 - 2ae},$$

d.h. im Grunde genau so wie in (2.11). Im Gegensatz zu HUYGENS beachtet jedoch BERNOULLI eingehend die für e und f möglichen Vorzeichen. Schließlich

entfernt er y aus (3.4) und (2.7) und erhält eine umfängliche Gleichung 8. Grades — ein Ergebnis, um das natürlich dem Gedanken nach auch HUYGENS wußte, wenn er es auch nicht ausdrücklich hingeschrieben hat.

Neu ist hingegen die zweckmäßige Annahme $AD=p$, $DF=z$, $FC=q$, mittels deren (2.7) zu

$$z=p+q+\sqrt{2p^2+2q^2} \tag{3.5}$$

wird. Mit $p=q$ erhält BERNOULLI das uns schon bekannte Ergebnis von MAUBUISSON, ohne jedoch dessen Namen zu nennen oder auf ihn anzuspielen — wahrscheinlich wußte er nichts davon. Nun führt er die rationalen Fälle $p=1$, $q=7$ bzw. 7 und 17 bzw. 7 und 23 an. Im Grunde kennt er also die vermöge

$$\begin{cases} p=u^2+2uv-v^2 \\ q=u^2-2uv-v^2 \\ z=4u^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=p+q+z=2(3u^2-v^2), \\ x=p+z=5u^2+2uv-v^2, \\ y=q+z=5u^2-2uv-v^2 \end{cases} \tag{3.6}$$

entstehenden rationalen Lösungen von (2.7).

Anschließend zeigt BERNOULLI durch eine leichte, jedoch etwas langwierige Rechnung, daß wirklich die Dreieckseite, die zwei Endpunkte der Teilenden Geraden trägt, nicht die längste ist, und daß die fragliche Dreieckseite im stumpfwinkligen Dreieck die mittlere sein muß.

Bei späterer Gelegenheit kommt BERNOULLI noch zweimal auf die Quadrisectio zurück, nämlich in den *Notae et animadversiones tumultuariae in Geometriam Cartesii*, die der 4. lateinischen Ausgabe[11]) der Descartesschen *Géométrie*[12]) beigegeben und auch in den *Opera* II abgedruckt sind[13]). In der Note 2 zu Buch I der *Geometria*[14]) führt BERNOULLI die Herstellung der Lösungen auf den Durchschnitt der durch (2.7) und (2.11) gegebenen Kurven zurück, wiederholt also nichtsahnend das von HUYGENS eingeschlagene Verfahren; in der Note 13 zu Buch III der *Geometria*[15]) wird das Problem mit dem Durchschnitt zweier passender Kurven 3. Ordnung in Verbindung gebracht.

4. EULER will fast 100 Jahre später in den beiden zur nämlichen Zeit in der Petersburger Akademie vorgelegten Abhandlungen[2]) die Untersuchungen BERNOULLIS durch eine eingehendere Determination ergänzen. Leider

[11]) Frankfurt a.M. 1695. Die erste lateinische Ausgabe mit den Kommentaren von FR. VAN SCHOOTEN erschien Leiden 1649, die zweite (nunmehr stark vermehrte) Ausgabe mit interessanten Zusätzen des Schooten-Kreises Amsterdam 1659/61, die dritte — im wesentlichen ein unveränderter Nachdruck der zweiten unter Erhaltung der Seitenzahlen, Amsterdam 1683.

[12]) Erstausgabe als Anhang zum *Cours de la méthode*, Leiden 1637, Faksimile-Ausgabe mit der englischen Übersetzung von D. E. SMITH-M. L. LATHAM, New York 1925, ^{2}1954.

[13]) Genf 1744 wie I[1]), und zwar mit durchlaufender Paginierung.

[14]) JAK. BERNOULLI, *Opera* II, 671–674 = DESCARTES[4] 1695[11]), Note 2: *Non semper necesse est, ad constructionem, omnes Problematis aequationes indeterminatas ad unam determinatam reducere: sed praestat quandoque Problema conficere per Loca quae suppeditant indeterminatae aequationes.*

[15]) ebda 689–690 = DESCARTES ebda, Note 13: *De simplicissima Problematis construendi ratione.*

verwendet er jedesmal verschiedene Bezeichnungen, so daß es ohne größere Umschweife nicht gut möglich ist, seine eigene Schreibweise wiederzugeben. Sein Ansatz ist nicht mehr geometrisch, sondern rein rechnerisch und wird durch Heranziehen trigonometrischer Funktionen sehr übersichtlich. Indem EULER die Fläche $\triangle$ eines Dreiecks (wie ABC) als gegeben ansieht, kann er eine Seite (z.B. c) aus den Cotangenten der anliegenden Winkel (hier α und β) in der Form

$$c = \sqrt{2\triangle(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cot}\beta)} \tag{4.1}$$

ausdrücken. In der ersten Abhandlung geht es um die aus $x+y=a+z$ hervorgehende Beziehung. EULER sieht das Auftreten von drei Lösungen am gleichseitigen Dreieck, deren jede aus einer Höhe und einer Seitenparallelen besteht, als ein isoliertes Vorkommnis an. Berichtigend bemerkt er in der zweiten Abhandlung, Entsprechendes sei auch für gleichschenklige und für Dreiecke ohne gleiche Seiten möglich, doch sei im letzten Fall nur eine geringfügige Abweichung vom gleichseitigen Dreieck vorhanden. Er bedient sich einer inhomogenen rationalisierenden Darstellung der Stücke x, y, z, die aus jener von (3.6) mit $u=\frac{1}{2}$, also $z=1$ hervorgeht. Da nun weder p noch q negativ werden dürfen, ist

$$0 \leqq |v| \leqq \frac{\sqrt{2}-1}{2} = 0{,}207. \tag{4.2}$$

Deshalb ist es sinnvoll, aus einer nach Hundertsteln von v fortschreitenden Tabelle eine Übersicht über die entsprechend zusammengehörigen Werte von x und y zu geben.

Nun geht es darum, die Huygens-Bernoullische Gl. (2.11) trigonometrisch auszudrücken. Sie ist ja gleichwertig mit

$$(x^2 - \triangle \cdot \operatorname{cotg}\alpha)(y^2 - \triangle \cdot \operatorname{cot}\beta) = \triangle^2, \tag{4.3}$$

wobei

$$\triangle = \frac{(x+y-1)^2}{2(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)} = \frac{x^2+y^2-2}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}. \tag{4.4}$$

Der rechte Ausdruck ergibt sich unmittelbar aus (2.7), wenn wir $a=x+y-1$ setzen. Führen wir nunmehr mit EULER noch die Hilfsgrößen

$$\mu = y^2 - 1, \quad \nu = x^2 - 1 \tag{4.5}$$

ein, dann geht (4.3) über in[16])

$$(1-\mu^2)\operatorname{cotg}^2\alpha + 2(1+\mu\nu)\operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta + (1-\nu^2)\operatorname{cotg}^2\beta = (\mu+\nu)^2. \tag{4.6}$$

[16]) EULER formt nicht die Gleichungen (3.4) bzw. (4.3) um, sondern beginnt mit dem System

$$x^2 = \triangle \cdot (\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\varphi), \quad (x+y-1)^2 = 2\triangle \cdot (\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta),$$
$$y^2 = \triangle \cdot (\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{tg}\varphi), \quad 1 = \tfrac{1}{2}\triangle \cdot (\operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi),$$

wobei $\varphi = \sphericalangle TED$ (Abb. 2). Er berechnet zunächst $\operatorname{cotg}\alpha$ und $\operatorname{cotg}\beta$ aus $\operatorname{cotg}\varphi$ und $\operatorname{tg}\varphi$, indem er $\triangle$ entfernt, dann $\operatorname{cotg}\varphi$ und $\operatorname{tg}\varphi$ aus $\operatorname{cotg}\alpha$ und $\operatorname{cotg}\beta$ und setzt das Produkt der erhaltenen Ausdrücke gleich 1. Ob er (als blinder Mann!) von seinen Helfern hinreichend deutlich auf die Gleichung (3.4) hingewiesen wurde, aus der sich alles ohne Rückgang auf das Gleichungssystem entwickeln läßt, steht dahin.

Nun ergeben sich die folgenden Entsprechungen:

v	$-\frac{\sqrt{2}-1}{2}$	0	$+\frac{\sqrt{2}-1}{2}$
x	1	$\frac{5}{4}$	$\sqrt{2}$
y	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{4}$	1
μ	1	$\frac{9}{16}$	0
ν	0	$\frac{9}{16}$	1

und zwar nehmen x und ν im Existenzbereich (4.2) mit zunehmendem v stetig zu, hingegen y und μ stetig ab.

Jetzt wendet sich EULER, ausgehend vom Fall des gleichseitigen Dreiecks, zu jenen gleichschenkligen Dreiecken, bei denen die Quadrisectio aus drei verschiedenen Lösungen besteht; die eine wird von der Höhe auf die Grundlinie und einer Parallelen zu dieser gebildet, während die anderen beiden Lösungen zwei Geradenpaare enthalten, von denen die Grundlinie in je zwei Punkten geschnitten wird. Diese Lösungen gehen durch Spiegeln an der Höhe auf die Grundlinie ineinander über.

Nun ergibt sich z. B. aus (4.6)

$$(4.7)\qquad \operatorname{cotg}\alpha=\frac{\mu+\nu}{\sqrt{4-(\mu-\nu)^2}}=\frac{x^2+y^2-2}{\sqrt{4-(x^2-y^2)^2}}=\frac{\left(\frac{3}{4}-v^2\right)^2}{\sqrt{(1-4v^2)\left(1-\frac{9v^2}{4}+v^4\right)}}.$$

Ist hier $v=0$, dann ist $\operatorname{cotg}\alpha=\frac{9}{16}$, also $\alpha_0=60°38'33''$. Erteilen wir hier der Einheit z den Wert 12, dann ist $p=q=3$, $x=y=15$, und die in (2.11) mit n bezeichnete Dreieckshöhe ist alsdann gleich 16. Das ist der schon von MAUBUISSON aufgefundene Fall für das gleichschenklige Dreieck. Mit $v=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ erhalten wir $\operatorname{cotg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, also ein gleichseitiges Dreieck. Da nun $|v|$ klein ist, entsteht die Potenzentwicklung[17])

$$(4.8)\qquad \operatorname{cotg}\alpha=\frac{9}{16}\cdot\left(1+\frac{11}{3\cdot 8}\cdot v^2+\frac{3\cdot 509}{9\cdot 128}\cdot v^4+\cdots\right).$$

Daraus geht hervor, daß $|\alpha|$ von α_0 bis 60° abnimmt, wenn $|v|$ von 0 bis zu $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ zunimmt. Ist nun (Abb. 2) $\sphericalangle TED=\varphi$, dann ist

$$(4.9)\qquad \triangle=2\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi=\sin 2\varphi=\frac{x^2+y^2-2}{2\cdot\operatorname{cotg}\alpha}=\sqrt{(1-4v^2)\left(1-\frac{9}{4}\cdot v^2+v^4\right)},$$

[17]) Natürlich läßt sich aus (4.7) vermittels $\cos 2\alpha=(\operatorname{cotg}^2\alpha-1):(\operatorname{cotg}^2\alpha+1)$ auch ein in v^2 rationaler Ausdruck zur Bestimmung von $\cos 2\alpha$ erhalten, aber dieses Vorgehen hat keinen besonderen Rechenvorteil für sich.

also[18])

$$\cos 2\varphi = \tfrac{5}{2} \cdot v - 2v^3. \tag{4.10}$$

Folglich gehört zu $v = 0$ der Winkel $\varphi = 45°$ und zu $|v| = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ der Winkel $|\varphi| = 30°$.

Alsdann geht EULER auf die Möglichkeit ein, die Vierteilung eines gleichschenkligen Dreiecks so durchzuführen, daß zwei Ausgangspunkte der Teillinien auf einem der Schenkel liegen. Auch auf diesem Wege erhält er drei Lösungen, nämlich zwei zur Höhe auf die Grundlinie des Dreiecks spiegelgleiche und eine dritte, die aus dieser Höhe und einer Parallelen zur Grundlinie besteht. Dieser Fall ergibt sich z. B., wenn zu (4.6) noch die aus $x = \sqrt{2}$, $y = 1$, also $\mu = 0$, $\nu = 1$ entstehende Gleichung

$$\operatorname{cotg}^2\alpha + 2 \cdot \operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta = 1 \tag{4.11}$$

hinzutritt. Jetzt ist $z = y$; $\alpha = \gamma$ sind die Basiswinkel, $\beta = 180° - 2\alpha$ ist der Winkel an der Spitze. Damit bricht EULER ab und wendet sich zum Fall $x = y = \frac{5}{4}$, d. h. zum Sonderfall von MAUBUISSON, den er an Hand der aus (4.6) hervorgehenden Gleichung

$$175 \cdot \operatorname{cotg}^2\alpha + 2 \cdot 337 \cdot \operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta + 175 \cdot \operatorname{cotg}^2\beta = 324 \tag{4.12}$$

eingehend diskutiert. Dabei bedient er sich der rationalisierenden Substitution

$$\operatorname{cotg}\alpha : \operatorname{cotg}\beta : 1 = (25 + 7w^2) : (25w^2 - 7) : 32w \tag{4.13}$$

und zeigt an Hand tabellarischer Übersichten, die durch Näherungsentwicklungen zustande kommen, wie man bei Dreiecken, die nur wenig von der Form des gleichseitigen abweichen, zu Lösungen vordringen kann.

5. Keiner der bisherigen Autoren hat bemerkt, daß sich die Vierteilung sehr einfach auch durch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal behandeln läßt. Abb. 6 lehrt zunächst, wie wir im Anschluß an (3.5) die Verteilung der Punkte A, D, E, B auf der doppelt getroffenen Dreieckseite gewinnen: Wir beginnen mit dem rechtwinkligen Dreieck SUV aus den Katheten $US = p + q$ und $SV = p - q$; dann ist also $UV = \sqrt{(p+q)^2 + (p-q)^2} = \sqrt{2(p^2+q^2)} = z - p - q$. Hierauf machen wir auf der verlängerten UV der Reihe nach $AD = p$, $DU = q$, $VE = p$, $EB = q$. Jetzt sind die vier Punkte A, D, E, B „richtig" verteilt. Indem wir diese Verteilung durch Maßstabveränderung übertragen, können wir jede beliebige Strecke AB gemäß (3.5) unterteilen.

Nun wählen wir auf dem Halbkreis über Durchmesser DE einen Punkt T und ergänzen zur Raute $DEPQ = 4 \cdot \triangle DET$. Schneiden wir alsdann QT

[18]) Diese einfache Beziehung ist EULER entgangen, der aus den in Anmerkung 16 entwickelten Formeln zu der Reihenentwicklung

$$\operatorname{tg}\varphi = 1 - \frac{5}{2} \cdot v + \frac{25}{8} \cdot v^2 - \frac{93}{16} \cdot v^3 + \frac{1235}{128} \cdot v^4 + \cdots$$

gelangt.

mit der Parallelen zu AQ durch D in G und TP mit der Parallelen zu BP durch E in F, dann schneiden sich AG und BF so in C, daß das entstehende Dreieck ABC von EG und DF geviertelt wird. Den ganz einfachen Beweis kann ich wohl übergehen.

Hier ist also

$$(5.1) \qquad \begin{cases} DF : 2 \cdot DT = DF : DP = DE : DB = z : y, \\ EG : 2 \cdot ET = EG : EQ = DE : AE = z : x. \end{cases}$$

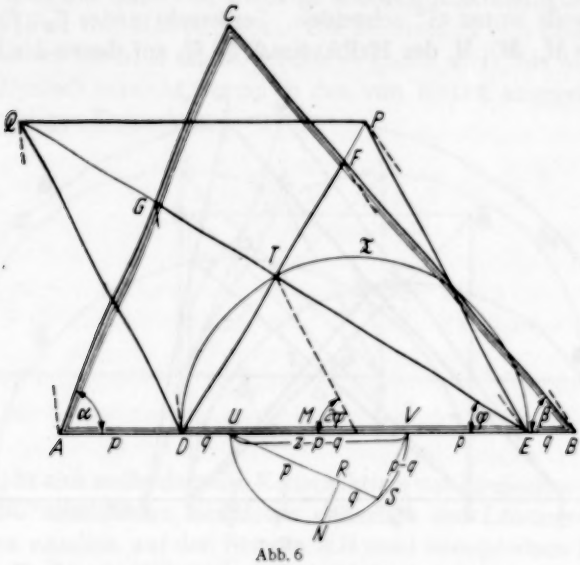


Abb. 6

Außerdem ist

$$(5.2) \qquad \begin{cases} TF : DT = (2z - y) : y, \\ TG : ET = (2z - x) : x. \end{cases}$$

Also schneiden sich die viertelnden Linien der sämtlichen möglichen Dreiecke ABC mit der nämlichen „richtigen" Verteilung der Punkte A, D, E, B in den nämlichen konstanten Verhältnissen; folglich sind alle diese Dreiecke zueinander affin.

Während nun T auf dem Halbkreis über DE wandert, bewegen sich F und G auf Halbkreisen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$, deren Mittelpunkte auf AB liegen. Aus (5.1) folgt nach leichter Rechnung

$$(5.3) \qquad DF = \frac{2z^2 \cdot \sin\varphi}{y}, \qquad EG = \frac{2z^2 \cdot \cos\varphi}{x},$$

also

$$(5.4) \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{x^2 - z^2 - z^2 \cdot \cos 2\varphi}{z^2 \cdot \sin 2\varphi}, \qquad \operatorname{cotg}\beta = \frac{y^2 - z^2 + z^2 \cdot \cos 2\varphi}{z^2 \cdot \sin 2\varphi}.$$

Weiterhin ergibt sich die Höhe n des Punktes C über AB aus $2 \cdot \triangle : a$ als

$$(5.5) \qquad n = \frac{2z^2 \cdot \sin 2\varphi}{a}.$$

Also hat diese Höhe von A den Abstand

$$n \cdot \operatorname{cotg} \alpha = \frac{2(x^2 - z^2)}{a} - \frac{2z^2 \cdot \cos 2\varphi}{a}. \tag{5.6}$$

Folglich wandert auch C auf einem Halbkreis $\mathfrak{C}$ mit dem Mittelpunkt auf AB, während T den Halbkreis $\mathfrak{T}$ über DE durchläuft.

In Abb. 7 sind die bisherigen Ergebnisse zusammengefaßt: über $D\hat{E}$ liegt das Quadrat DEP_0Q_0 und auf dessen Diagonalen das Punktepaar F_0, G_0; so entsteht schließlich das Dreieck ABC_0, dessen viertelnde Linien die Grundlinie AB jeweils unter 45° schneiden. Senkrecht unter C_0, F_0, G_0 liegen die Mittelpunkte M_c, M_f, M_g der Halbkreise $\mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$, auf denen die Punkte C, F, G

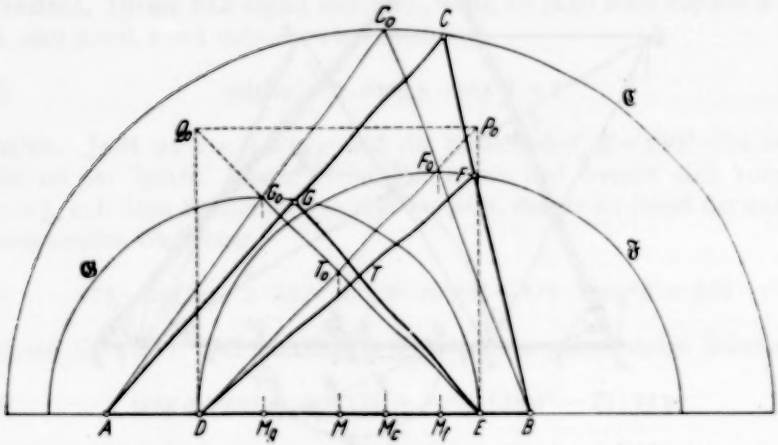


Abb. 7

wandern. Wählen wir irgendeine zulässige Lage des Punktes C, dann liegt F im Schnitt von $\mathfrak{F}$ mit BC und G im Schnitt von $\mathfrak{G}$ mit AC und DF, EG sind die gesuchten viertelnden Linien.

Soll nun Dreieck ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze C sein, dann liegt C im Schnitt von $\mathfrak{C}$ mit dem Mittellot zu AB. Soll die Spitze A sein, dann muß $\mathfrak{C}$ mit dem Kreis um A durch B geschnitten werden. Im Sonderfall von MAUBUISSON (und nur in diesem) ist $M = M_c$ gleichzeitig Mittelpunkt von AB und DE.

In geistreicher Weise zeigt Herr SPEISER wie folgt[19]), daß das Problem stets eine ungerade Anzahl von Lösungen hat: Er bemerkt, daß innerhalb eines gegebenen Dreiecks ABC in jeder Richtung zwei zueinander senkrechte Strecken existieren, die das Dreieck halbieren und sich in seinem Innern schneiden. Werden die vier Teilflächen der Reihe nach z.B. im positiven Drehsinn mit f_1, f_2, f_3, f_4 bezeichnet, dann ist sicher

$$f_1 + f_2 = f_3 + f_4 = \tfrac{1}{2} \cdot \triangle; \quad f_2 + f_3 = f_4 + f_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \triangle, \tag{5.7}$$

also

$$f_1 = f_3, \quad f_2 = f_4. \tag{5.8}$$

[19]) EULER, *Opera*[2]), XXXI.

Somit sind die nicht aneinander liegenden Teilflächen gleichgroß. Nun geht das Verhältnis $f_1:f_2$ zweier benachbarter Teilflächen durch Drehen der Ausgangsrichtung um 90° über in seinen reziproken Wert. Wird die Anfangsrichtung so gewählt, daß $f_1 > f_2$, dann ist nach der Drehung $f_1 < f_2$. Folglich muß es — da es sich um eine stetige Veränderung handelt — mindestens eine Zwischenlage geben, für die $f_1 = f_2$. Alsdann ist die Vierteilung erreicht. Gibt es mehrere lösende Zwischenlagen, so sind auch doppelt zählende Lösungen möglich. Dies tritt nur dann ein, wenn die äußeren Abschnitte der Teilpunkte gleichlang sind (Fall von MAUBUISSON). Die Höchstzahl von Lösungsmöglichkeiten ist — wie wir nachher sehen werden — gleich drei. Sie wird z.B. beim gleichseitigen Dreieck erreicht, ferner in den von EULER angegebenen Fällen von gleichschenkligen Dreiecken.

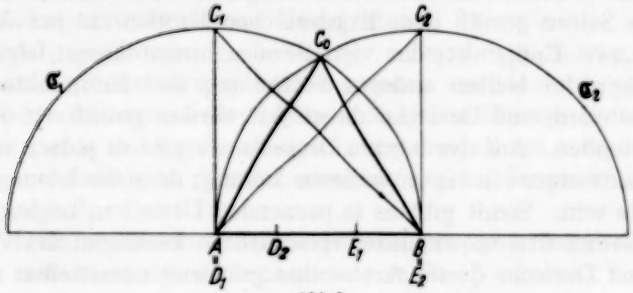


Abb. 8

An Abb. 7 läßt sich außerdem die Konstruktion von Dreiecken ungleicher Seitenlänge ABC anschließen, bei denen sicherlich drei Lösungen vorhanden sind. Wir geben nämlich auf der Strecke AB zwei verschiedene Punktepaare D_1, E_1 und D_2, E_2 derart, daß jedesmal A, D, E, B eine „richtige" Verteilung ist. Dann konstruieren wir die zu jeder dieser Verteilungen gehörenden Halbkreise $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$. Sie schneiden sich stets in genau einem Punkt C. Das erkennen wir so:

Wir konstruieren auf AB die den Extremwerten $|v| = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ im Sinne der Eulerschen Parameterform entsprechenden Verteilungen. Die zugehörigen Halbkreise $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ schneiden sich nunmehr (Abb. 8) so auf dem Mittellot zu AB, daß das gleichseitige Dreieck ABC_0 entsteht. Lassen wir den Teilpunkt D stetig von D_1 bis D_2, d.h. innerhalb des Existenzbereiches wandern, dann bewegt sich auch E stetig von E_1 bis E_2. Auch der zur Verteilung D, E gehörige Halbkreis $\mathfrak{C}$ wird stetig verändert, und zwar so, daß er eine Kurve mit ziemlich verwickelter Gleichung umhüllt. Diese Kurve hat das Mittellot von AB zur Symmetrieachse und geht mit waagrechter Tangente durch C_0. Machen wir diesen Punkt zum Ursprung, die waagrechte Tangente zur X-Achse und das nach oben weisende Stück des Mittellotes von AB zur positiven Y-Achse eines cartesischen Koordinatensystems, dann wird die Einhüllende der Halbkreise in der Nähe von C_0 durch einen Bogen des Kreises

$$x^2 + \left(y - \frac{11a}{72}\right)^2 = \left(\frac{11a}{72}\right)^2 \tag{5.9}$$

angenähert. Daraus läßt sich entnehmen, daß sich zumindest für absolut kleine v je zwei verschiedene der zugehörigen Halbkreise in genau einem Punkt schneiden. Diese Eigenschaft bleibt bis zu den Extremwerten $|v| = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ des Existenzbereiches erhalten; so stehen z. B. die Halbkreise $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ der Abb. 8 vom Mittelpunkt des Kreises (5.9) um $\frac{11{,}19a}{72}$ statt um $\frac{11a}{72}$ ab. Der Kreis (5.9) ist Scheitelkreis der Eingehüllten und wird von dieser in der Nähe von C_0 umschlossen. Ist nun C Schnitt irgend zweier Kreise $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ innerhalb des Existenzbereiches, dann geht durch ihn kein weiterer Halbkreis des Kreissystems; folglich gibt es bei Auftreten mehrerer Vierteilungen innerhalb eines Dreiecks höchstens zwei dieser Vierteilungen so, daß je zwei der Endpunkte auf einer und der nämlichen Dreieckseite liegen. Nun dürfen aber im Dreieck ohne gleiche Seiten gemäß dem Ergebnis von BERNOULLI auf der längsten Seite keine zwei Endpunkte der vierteilenden Linien liegen; folglich müssen sich auf einer der beiden anderen Seiten je zwei Endpunkte von zwei Lösungen befinden, und Dreiecke dieser Art werden gemäß der obigen Konstruktion gefunden. Auf der letzten Dreieckseite gibt es jedoch nur einmal zwei Endpunkte einer einzigen weiteren Lösung; denn die Lösungszahl sollte ja ungerade sein. Somit gibt es in passenden Dreiecken ungleicher Seitenlänge höchstens drei voneinander verschiedene Lösungen des Vierteilungsproblems, und Dreiecke dieser Art — das geht nun unmittelbar aus unserer Konstruktion hervor — weichen von ihrer Form nur verhältnismäßig wenig von den gleichseitigen Dreiecken ab.

Das hier Vorgebrachte kann also als konstruktive Ergänzung dessen dienen, was EULER mit seinen Näherungen geleistet hat.

(13b) Ichenhausen/Günzburg, Heinrich Sinz-Str. 15

(Eingegangen am 16. November 1959)

PICONE, M.
Math. Zeitschr. 74, 119–128 (1960)

Sull'equazione integrale non lineare di seconda specie di Fredholm

Nota dedicata a ERICH KAMKE

Di
MAURO PICONE

Siano: A un insieme chiuso di punti di uno spazio euclideo a p dimensioni, i cui punti saranno indicati, indifferentemente, con x e y e le coordinate *reali* di questi rispettivamente con $x_1, x_2, \ldots, x_p$ e $y_1, y_2, \ldots, y_p$;

B un insieme chiuso di punti di uno spazio euclideo a $2q$ dimensioni, il cui punto sarà indicato con u e le coordinate *complesse* di questo con $u_1, u_2, \ldots, u_q$;

$f(x)$ e $K(x, y, u)$ due vettori assegnati, a q componenti complesse, il primo funzione di x, continua in A, ed il secondo funzione del punto (x, y, u) continua in $A \times A \times B$;

$C(A, B)$ la classe dei vettori a q componenti complesse, funzioni del punto x, continue in A e aventi coinsieme contenuto in B.

Sono ben noti i due teoremi seguenti.

I. *L'insieme A sia limitato ed esista un numero reale Λ tale da aversi, comunque si assumano i due punti (x, y, u) e (x, y, u') di $A \times A \times B$*

$$|K(x, y, u) - K(x, y, u')| \leqq \Lambda |u - u'| \quad [1]) \tag{1}$$

Se

$$\Lambda \operatorname{mis} A < 1, \tag{2}$$

ed esiste una funzione $u^{(0)}(x)$, della classe $C(A, B)$, tale che appartengano alla stessa classe tutte quelle successivamente definite dalle eguaglianze[2])

$$\left\{\begin{aligned} u^{(1)}(x) &= f(x) + \int_A K[x, y, u^{(0)}(y)]\, \mathrm{d}y, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ u^{(n+1)}(x) &= f(x) + \int_A K[x, y, u^{(n)}(y)]\, \mathrm{d}y, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

l'equazione integrale

$$u(x) = f(x) + \int_A K[x, y, u(y)]\, \mathrm{d}y, \tag{4}$$

[1]) Indicando con una lettera a una matrice, in particolare un vettore, col simbolo $|a|$ ne denoterò il *modulo* (detto anche *norma*) in una determinata e sempre mantenuta qualsivoglia definizione dell'ordinaria analisi matriciale, per esempio, in una delle definizioni contemplate da FROBENIUS.

[2]) In particolare, se B é tutto lo spazio complesso a $2q$ dimensioni, ciò non impone alcuna condizione né a $u^{(0)}(x)$ né a $f(x)$.

nella funzione incognita $u(x)$, possiede una ed una sola soluzione della classe $C(A, B)$, risultando

$$\lim_{n\to\infty} u^{(n)}(x) = u(x),$$

uniformemente in A, ed ivi

$$|u(x) - u^{(0)}(x)| \leqq \frac{U}{1 - \Lambda \operatorname{mis} A},$$

avendo indicato con U un numero non superato, in A, dalla funzione

$$\left| f(x) + \int_A K[x, y, u^{(0)}(y)]\, dy - u^{(0)}(x) \right|. \tag{5}$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha:

$$|u^{(n+1)}(x) - u^{(n)}(x)| \leqq \Lambda \int_A |u^{(n)}(y) - u^{(n-1)}(y)|\, dy,$$

e quindi

$$|u^{(n+1)}(x) - u^{(n)}(x)| \leqq \Lambda^n (\operatorname{mis} A)^{n-1} \int_A |u^{(1)}(x) - u^{(0)}(x)|\, dx \leqq (\Lambda \operatorname{mis} A)^n U.$$

Se $u(x)$ e $u'(x)$ sono due soluzioni della (4), di classe $C(A, B)$, detto P un numero non superato, in A, da $|u(x) - u'(x)|$, si ha:

$$|u(x) - u'(x)| \leqq \Lambda \int_A |u(x) - u'(x)|\, dx \leqq \Lambda P \operatorname{mis} A$$

e quindi, successivamente, per qualsivoglia numero naturale n,

$$|u(x) - u'(x)| \leqq P(\Lambda \operatorname{mis} A)^n.$$

II. *L'insieme A sia di misura finita e sia $H(x, y)$ una matrice quadrata d'ordine q, a elementi complessi, funzione del punto (x, y), continua e limitata in $A \times A$, ove risulti, per un certo numero non negativo M,*

$$|H(x, y)| \leqq M.$$

Se

$$M \operatorname{mis} A < 1 \tag{6}$$

e la funzione $f(x)$ è limitata in A, l'equazione integrale, nella funzione incognita $u(x)$,

$$u(x) = f(x) + \int_A H(x, y)\, u(y)\, dy,$$

possiede una ed una sola soluzione continua e limitata in A, e risulta, ivi,

$$|u(x) - f(x)| \leqq \frac{M}{1 - M \operatorname{mis} A} \int_A |f(x)|\, dx, \tag{7}$$

e quindi

$$|u(x)| \leqq \frac{F}{1 - M \operatorname{mis} A},$$

avendo designato con F un numero non superato da $|f(x)|$, in A.

DIMOSTRAZIONE. Per l'n^{mo} nucleo iterato del nucleo $H(x, y)$, si ha

$$|H^{(n)}(x, y)| \leqq M^{n+1}(\text{mis } A)^n$$

e quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} H^{(n)}(x, y)$, ove si é posto $H^{(0)}(x, y) \equiv H(x, y)$, é assolutamente ed uniformemente convergente nell'insieme A, ivi avendosi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |H^{(n)}(x, y)| \leqq \frac{M}{1 - M \text{ mis } A}.$$

Scopo preminente di questa nota é di far conoscere un nuovo teorema d'esistenza e d'unicità per la soluzione dell'equazione integrale di FREDHOLM (4), teorema che si fonda sul seguente

LEMMA. *Sia A di misura finita e $H(x, y, u)$ una matrice quadrata d'ordine q, funzione del punto (x, y, u), continua nell'insieme $A \times A \times B$, ove risulta, per un certo numero M, verificante la* (6),

$$|H(x, y, u)| \leqq M. \tag{8}$$

A norma del teorema II, *assegnate, comunque, due funzioni $u(x)$ e $u'(x)$, della classe $C(A, B)$ e due funzioni $f(x)$ e $f'(x)$, continue e limitate in A, esistono due determinate funzioni, $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$, continue e limitate in A, per le quali si ha:*

$$\begin{cases} \varphi(x) = f(x) + \int_A H[x, y, u(y)]\, \varphi(y)\, dy, \\ \varphi'(x) = f'(x) + \int_A H[x, y, u'(y)]\, \varphi'(y)\, dy, \end{cases} \tag{9}$$

risultando

$$|\varphi(x)| \leqq \frac{F}{1 - M \text{ mis } A}, \qquad |\varphi'(x)| \leqq \frac{F'}{1 - M \text{ mis } A}, \tag{10}$$

supposto che $|f(x)|$ e $|f'(x)|$ non superino, in A, rispettivamente, i numeri F e F'. Ebbene, se, comunque si assumano i punti (x, y, u) e (x, y, u') in $A \times A \times B$, risulta, inoltre, per un certo numero L,

$$|H(x, y, u') - H(x, y, u)| \leqq L\,|u' - u|, \tag{11}$$

le due funzioni $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ verificheranno la limitazione:

$$\begin{cases} |\varphi'(x) - \varphi(x)| \\ \qquad \leqq |f'(x) - f(x)| + P \int_A |f'(y) - f(y)|\, dy + L\, Q \int_A |u'(y) - u(y)|\, dy, \end{cases} \tag{12}$$

ove

$$P = \frac{M}{1 - M \text{ mis } A}, \qquad Q = \frac{F' + F - |F' - F|}{2(1 - M \text{ mis } A)^2}. \tag{13}$$

DIMOSTRAZIONE. Dalle (9) si ricava l'eguaglianza:

$$\varphi'(x) - \varphi(x) = f'(x) - f(x) + \int_A \{H[x, y, u'(x)] - H[x, y, u(y)]\}\, \varphi'(y)\, dy + \int_A H[x, y, u(y)]\, \{\varphi'(y) - \varphi(y)\}\, dy,$$

e pertanto che $\varphi'(x)-\varphi(x)$ é soluzione di un'equazione integrale lineare con nucleo $H[x, y, u(y)]$ e termine noto

$$f'(x)-f(x)+\int_A \{H[x, y, u'(y)]-H[x, y, u(y)]\}\,\varphi'(y)\,dy,$$

onde segue, tenendo conto della (7), della seconda delle (10) e dalla (11), la limitazione

$$|\varphi'(x)-\varphi(x)| \leqq |f'(x)-f(x)| + \frac{M}{1-M \operatorname{mis} A}\int_A |f'(y)-f(y)|\,dy + \frac{LF'}{(1-M \operatorname{mis} A)^2}\int_A |u'(y)-u(y)|\,dy.$$

Se si osserva che sussiste anche la limitazione da questa ottenuta scambiando, simultaneamente $\varphi(x)$ con $\varphi'(x)$ e $f(x)$ con $f'(x)$, risulta dimostrata la (12), con P e Q date dalle (13).

Ne segue il teorema:

III. *L'insieme A sia di misura finita e si abbia, in $A\times A\times B$,*

$$K(x, y, u) \equiv H(x, y, u)\,u,$$

$H(x, y, u)$ designando una matrice quadrata d'ordine q, funzione del punto (x, y, u) continua in $A\times A\times B$, per la quale ivi risulti

$$|H(x, y, u)| \leqq M, \tag{8}$$

e comunque vi si prendano due punti (x, y, u) e (x, y, u')

$$|H(x, y, u')-H(x, y, u)| \leqq L|u'-u|,$$

M e L essendo due numeri non negativi verificanti le limitazioni:

$$M \operatorname{mis} A < 1, \tag{6}$$

$$LF \operatorname{mis} A < (1-M \operatorname{mis} A)^2, \tag{14}$$

ove F é un numero non superato da $|f(x)|$ in A. Se la funzione $u^{(0)}(x)$ e tutte quelle successivamente definite come soluzioni delle equazioni:

$$\begin{cases} u^{(1)}(x) = f(x)+\int_A H[x, y, u^{(0)}(y)]\,u^{(1)}(y)\,dy, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ u^{(n+1)}(x) = f(x)+\int_A H[x, y, u^{(n)}(y)]\,u^{(n+1)}(y)\,dy, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases} \tag{15}$$

appartengono alla classe $C(A, B)$, esiste una ed una sola soluzione dell'equazione (4), della stessa classe, limitata in A, avendosi, ivi, uniformemente

$$\lim_{n\to\infty} u^{(n)}(x) = u(x), \tag{16}$$

e la formula di maggiorazione

$$|u(x) - f(x)| \leqq \frac{M}{1 - M \operatorname{mis} A} \int_A |f(x)| \, \mathrm{d}x. \tag{17}$$

DIMOSTRAZIONE. In forza del teorema II, le (15) definiscono le funzioni $u^{(n)}(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$, continue in A, ivi verificanti la limitazione:

$$|u^{(n)}(x)| \leqq \frac{F}{1 - M \operatorname{mis} A}. \tag{18}$$

Posto poi $Q = F/(1 - M \operatorname{mis} A)^2$, si ha, in virtù del lemma,

$$|u^{(n+1)}(x) - u^{(n)}(x)| \leqq L\, Q \int_A |u^{(n)}(y) - u^{(n-1)}(y)| \, \mathrm{d}y,$$

e quindi, successivamente,

$$|u^{(n+1)}(x) - u^{(n)}(x)| \leqq L\, Q (L\, Q \operatorname{mis} A)^{n-1} \int_A |u^{(1)}(y) - u^{(0)}(y)| \, \mathrm{d}y,$$

donde, tenendo conto della (14), la convergenza uniforme, in A, della successione $\{u^{(n)}(x)\}$, verso una funzione $u(x)$ soluzione della (4) verificante la limitazione (17), che é verificata dalle $u^{(n)}(x)$. Il teorema d'unicità é, del pari, conseguenza immediata del lemma e della (14).

OSSERVAZIONI. 1. Nel teorema I, all'ipotesi secondo la quale la funzione $u^{(0)}(x)$ e tutte quelle successivamente definite dalle (3) devono appartenere alla classe $C(A, B)$, si può sostituire la seguente.

La funzione $u^{(0)}(x)$ appartiene alla classe $C(A, B)$ e l'insieme $A \times B$ contiene quello definito dalle limitazioni:

$$x \in A, \qquad |u - u^{(0)}(x)| \leqq \frac{|f(x) + \int_A K[x, y, u^{(0)}(y)] \, \mathrm{d}y - u^{(0)}(x)|}{1 - A \operatorname{mis} A}.$$

2. Nel teorema III, all'ipotesi secondo la quale la funzione $u^{(0)}(x)$ e tutte quelle successivamente definite come soluzioni delle equazioni (15) devono appartenere alla classe $C(A, B)$, si puo sostituire la seguente.

La funzione $u^{(0)}(x)$ appartiene alla classe $C(A, B)$ e l'insieme $A \times B$ contiene quello definito dal verificarsi delle limitazioni:

$$x \in A, \qquad |u - f(x)| \leqq \frac{M}{1 - M \operatorname{mis} A} \int_A |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

3. Supposto che l'insieme B sia tutto lo spazio complesso a $2q$ dimensioni, mentre il teorema I assicura l'esistenza della soluzione della (4), nel caso in cui l'insieme A sia limitato, lasciando la funzione $f(x)$ affatto arbitraria, il teorema III, consente a questo insieme di essere illimitato, purché di misura finita, ma impone alla funzione $f(x)$ la limitazione:

$$|f(x)| \leqq F < \frac{(1 - M \operatorname{mis} A)^2}{L \operatorname{mis} A}.$$

4. Nell'esempio offerto dal caso particolare, che andiamo a considerare, é facile fare un istruttivo confronto fra l'ufficio del teorema I e quello del teorema III.

L'insieme A sia un intervallo limitato dell'asse reale x, B l'asse reale u e si consideri l'equazione (4) nel caso particolare in cui si abbia

$$K(x, y, u)\begin{cases} = \varphi(x, y)\, u \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 1 + |u|^{\alpha}\right), & \text{per } |u| \geqq 1, \\ = \varphi(x, y)\, u^{n}, & \text{per } |u| \leqq 1, \end{cases}$$

ove $\varphi(x, y)$ designa una funzione reale delle due variabili reali x e y, continua nel quadrato $A \times A$ del piano (x, y), α un numero reale e n un numero naturale dispari.

Il teorema I é, in questo caso, applicabile se

$$\alpha \leqq 0 .$$

Potendosi allora porre, detto μ il massimo di $|\varphi(x, y)|$ in $A \times A$

$$\Lambda = \mu \operatorname{Max}(n, 1 + |\alpha|),$$

si ha che: *Se risulta*

$$\operatorname{mis} A < \frac{1}{\mu \operatorname{Max}(n, 1 + |\alpha|)}, \tag{19}$$

l'equazione integrale (4) *possiede una ed una sola soluzione comunque si assegni la funzione* $f(x)$ *e, posto, nella* (5), $u^{(0)}(x) \equiv 0$ *si perviene alla formola di maggiorazione:*

$$|u(x)| \leqq \frac{F}{1 - \mu \operatorname{Max}(n, 1 + |\alpha|) \operatorname{mis} A}. \tag{20}$$

Se α é positivo il teorema I non é applicabile, lo é il teorema III, se

$$\alpha \leqq 1 .$$

Potendosi, allora, porre

$$M = \mu, \qquad L = \mu \operatorname{Max}(n - 1, |\alpha|),$$

si ha che: *Se risulta*

$$\operatorname{mis} A < \frac{1}{\mu}, \tag{21}$$

l'equazione (4) *possiede una ed una sola soluzione, purché la funzione* $f(x)$ *verifichi la limitazione*

$$|f(x)| \leqq F < \frac{(1 - \mu \operatorname{mis} A)^2}{\mu \operatorname{Max}(n - 1, |\alpha|) \operatorname{mis} A} \tag{22}$$

e sussiste la formola di maggiorazione:

$$|u(x)| \leqq \frac{F}{1 - \mu \operatorname{mis} A}. \tag{23}$$

Per $\alpha \leqq 0$ sono applicabili entrambi i teoremi I e III, ma, mentre il primo impone alla misura dell'intervallo A la limitazione (19), il terzo consente, a norma della (21), di moltiplicare tale misura per il numero $\operatorname{Max}(n, 1 + |\alpha|)$, che può essere grandissimo, dipendentemente dalla grandezza di n e di $|\alpha|$, purché la funzione $f(x)$ verifichi la limitazione (22) ed allora, la formola di maggiorazione (20) può sostituirsi con la più ristretta (23).

Fissato n, l'equazione limite della (4) per $\alpha \to -\infty$, ha il nucleo discontinuo

$$K(x, y, u) \begin{cases} = \varphi(x, y)\, u \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right), & \text{per } |u| > 1, \\ = \varphi(x, y)\, u^n, & \text{per } |u| \leqq 1, \end{cases}$$

e ad una tale equazione non si applica né il teor. I, né il teor. III. La (19) darebbe al limite, mis $A \leqq 0$ e, per mis $A = 0$, indicato con a il punto in cui degenera l'intervallo A, l'equazione limite della (4) possiede l'unica soluzione $u(x) = f(a)$; la (22) darebbe, al limite, $|f(x)| \leqq F \leqq 0$ e, per $f(x) \equiv 0$, l'equazione limite della (4), possiede, conformemente alla (23), la soluzione $u(x) \equiv 0$.

5. Caso dell'equazione integrale di Volterra. Forse conviene osservare, come vado a fare brevemente, anche taluni teoremi, secondo i quali si estendono alle equazioni integrali non lineari, di seconda specie, di Volterra, con integrazione p-dimensionale, quelli considerati in una mia nota, attualmente in corso di stampa[3]), per le stesse equazioni con integrazione unidimensionale.

E'utile, a tale scopo, introdurre le locuzioni e notazioni seguenti. Presi due punti $x(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ e $y(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ dello spazio a p dimensioni, dico che y *non é superiore a* x e scrivo $y \leqq x$, se é $y_k \leqq x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$. Preso un punto x dello spazio, indico con $R(x)$ l'insieme luogo dei punti non superiori a x, e, se il punto y non é superiore a x, con $R(x, y)$, l'insieme luogo dei punti non superiori a x e non inferiori a y. Per un insieme A di punti dello spazio indico poi con $A(x)$ e $A(x, y)$, supposto $y \leqq x$, rispettivamente gl'insiemi, eventualmente vuoti, $A \cap R(x)$, $A \cap R(x, y)$.

Ciò posto, assegnati i vettori $f(x)$ e $K(x, y, u)$ e gli insiemi A e B, già introdotti, vogliamo considerare l'equazione integrale di Volterra:

$$(4_V) \qquad u(x) = f(x) + \int_{A(x)} K[x, y, u(y)]\, \mathrm{d}y, \qquad x \in A,$$

per enunciare i relativi seguenti teoremi d'esistenza e d'unicità, brevemente accennando alle loro dimostrazioni.

IV. *Supposto, per ogni punto x di A, limitato l'insieme $A(x)$, se la funzione $u^{(0)}(x)$ e tutte quelle successivamente dedotte dalla eguaglianza, per $x \in A$,*

$$u^{(n+1)}(x) = f(x) + \int_{A(x)} K[x, y, u^{(n)}(y)]\, \mathrm{d}y \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

sono della classe $C(A, B)$ e ad ogni punto τ di A, corrisponde un numero Λ_τ, per il quale, comunque si prendano due punti (x, y, u) e (x, y, u') di $A(\tau) \times A(\tau) \times B$, con $y \leqq x$, riesca

$$|K(x, y, u') - K(x, y, u)| \leqq \Lambda_\tau |u' - u|,$$

[3]) Nel volume 49 (1960), degli Annali di Matematica pura e applicata, dedicato a Giovanni Sansone.

esiste una ed una sola soluzione dell'equazione (4_V) *della classe* $C(A, B)$ *e si ha*

$$\lim_{n\to\infty} u^{(n)}(x) = u(x),$$

uniformemente in ogni insieme $A(\tau)$, *ed ivi la formola di maggiorazione:*

$$|u(x) - u^{(0)}(x)| \leqq U_\tau G_p[\Lambda_\tau \operatorname{mis} R(x, e_\tau)],$$

ove U_τ *indica un numero non superato in* $A(\tau)$ *della funzione*

$$\left| f(x) + \int_{A(x)} K[x, y, u^{(0)}(y)]\, dy - u^{(0)}(x) \right|,$$

e_τ *il punto estremo inferiore di* $A(\tau)$ *e* $G_p(t)$ *la funzione intera della variabile reale* t*:*

$$G_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n!)^p}.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha, per x in $A(\tau)$,

$$|u^{(n+1)}(x) - u^{(n)}(x)| \leqq \Lambda_\tau \int_{A(x)} |u^{(n)}(y) - u^{(n-1)}(y)|\, dy, \tag{24}$$

e quindi

$$|u^{(2)}(x) - u^{(1)}(x)| \leqq \Lambda_\tau \int_{A(x)} |u^{(1)}(y) - u^{(0)}(y)|\, dy \leqq \Lambda_\tau U_\tau \operatorname{mis} A(x) \leqq \Lambda_\tau U_\tau \operatorname{mis} R(x, e_\tau),$$

donde, successivamente, tenendo conto della (24),

$$|u^{(n+1)}(x) - u^{(n)}(x)| \leqq U_\tau \frac{[\Lambda_\tau \operatorname{mis} R(x, e_\tau)]^n}{(n!)^p}. \qquad \text{Ecc.}$$

Si osservi che all'ipotesi secondo la quale le funzioni della successione $\{u^{(n)}(x)\}$ devono appartenere alla classe $C(A, B)$, si può sostituire quella dell'appartenenza a tale classe della sola funzione iniziale $u^{(0)}(x)$ e, per ogni τ, all'insieme $A \times B$ quello definito dal verificarsi delle limitazioni

$$x \in A_\tau, \qquad |u - u^{(0)}(x)| \leqq U_\tau G_p[\Lambda_\tau \operatorname{mis} R(x, e_\tau)].$$

V. *Per ogni punto* x *di* A, *l'insieme* $A(x)$ *sia limitato e sia* $H(x, y)$ *una matrice quadrata d'ordine* q, *a elementi complessi, funzione del punto* (x, y) *continua in* $A \times A$, *risultando, in* $A(\tau) \times A(\tau)$, *per* $y \leqq x$, *con un certo numero* M_τ,

$$|H(x, y)| \leqq M_\tau.$$

Se, come è stato già supposto, la funzione $f(x)$ *è continua in* A, *l'equazione integrale lineare di* VOLTERRA:

$$u(x) = f(x) + \int_{A(x)} H(x, y) f(y)\, dy,$$

possiede una ed una sola soluzione, continua in A, *e risulta, in* $A(\tau)$,

$$|u(x) - f(x)| \leqq M_\tau \int_{A(x)} G_p[M_\tau \operatorname{mis} R(x, y)]\, |f(y)|\, dy.$$

DIMOSTRAZIONE. Per i nuclei iterati del nucleo $H(x, y)$, si ha[4])

$$|H^{(1)}(x, y)| = \left| \int_{A(x,y)} H(x, s)\, H(s, y)\, \mathrm{d}s \right| \leqq M_\tau^2 \,\mathrm{mis}\, A(x, y) \leqq M_\tau^2 \,\mathrm{mis}\, R(x, y),$$

$$|H^{2}(x, y)| = \left| \int_{A(x,y)} H^{(1)}(x, s)\, H(s, y)\, \mathrm{d}s \right| \leqq M_\tau^3 \int_{A(x,y)} \mathrm{mis}\, R(x, s)\, \mathrm{d}s$$

$$\leqq M_\tau^3 \int_{R(x,y)} \mathrm{mis}\, R(x, s)\, \mathrm{d}s = M_\tau^3 \frac{[\mathrm{mis}\, R(x, y)]^2}{(2!)^p},$$

e, successivamente,

$$|H^{(n)}(x, y)| \leqq M_\tau^{n+1} \frac{[\mathrm{mis}\, R(x, y)]^n}{(n!)^p},$$

onde segue che il nucleo $H(x, y)$ é dotato di nucleo risolvente $H^{-1}(x, y)$, per il quale, in $A(\tau) \times A(\tau)$, sussiste la limitazione

$$|H^{-1}(x, y)| \leqq M_\tau G_p [M_\tau \,\mathrm{mis}\, R(x, y)]. \quad \text{Ecc.}$$

VI. *Per ogni punto x di A, l'insieme $A(x)$ sia limitato e si abbia, in $A \times A \times B$ e per $y \leqq x$,*

$$K(x, y, u) \equiv H(x, y, u)\, u,$$

$H(x, y, u)$ designando una matrice quadrata d'ordine q, funzione del punto (x, y, u), continua in $A \times A \times B$, per la quale risulti, in ogni insieme $A(\tau) \times A(\tau) \times B$, per $y \leqq x$,

$$|H(x, y, u)| \leqq M_\tau,$$

e, comunque vi si prendano due punti (x, y, u) e (x, y, u'), con $y \leqq x$,

$$|H(x, y, u') - H(x, y, u)| \leqq L_\tau |u' - u|,$$

M_τ e L_τ designando due certi numeri non negativi. Se la funzione $u^{(0)}(x)$ e tutte quelle successivamente definite come soluzioni delle equazioni:

$$u^{(n+1)}(x) = f(x) + \int_{A(x)} H[x, y, u^{(n)}(y)]\, u^{(n+1)}(y)\, \mathrm{d}y, \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

appartengono alla classe $C(A, B)$, esiste una ed una sola soluzione dell'equazione (4_V), della classe medesima, avendosi

$$\lim_{n \to \infty} u^{(n)}(x) = u(x),$$

uniformemente in ogni insieme $A(\tau)$, e ivi la formola di maggiorazione

$$|u(x) - f(x)| \leqq M_\tau \int_{A(x)} G_p [M_\tau \,\mathrm{mis}\, R(x, y)]\, |f(y)|\, \mathrm{d}y.$$

DIMOSTRAZIONE. E'conseguenza di un lemma analogo a quello su cui si basa il teorema III [cfr. loc. cit. [2])].

---

[4]) Cfr. i miei Appunti d'Analisi Superiore [Napoli, Rondinella (1940)], p. 592.

Si osservi che all'ipotesi secondo la quale le funzioni della successione $\{u^{(n)}(x)\}$ devono appartenere alla classe $C(A, B)$, si può sostituire quella dell'appartenenza a tale classe della sola funzione iniziale $u^{(0)}(x)$ e, per ogni punto τ di A, all'insieme $A \times B$, quello definito dal verificarsi delle limitazioni

$$x \in A_\tau, \quad |u - f(x)| \leqq M_\tau \int_{A(x)} G_p[M_\tau \operatorname{mis} R(x, y)]\, |f(y)|\, \mathrm{d}y.$$

Considerando, per esempio, di nuovo, la funzione $K(x, y, u)$ del n. 4, sia A l'intervallo $(x_0, +\infty)$ dell'asse reale x e μ_τ un numero non superato da $|\varphi(x, y)|$, nel triangolo del piano (x, y), definito dal verificarsi delle limitazioni: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \tau$, $x_0 \leqq y \leqq x$. Il teorema IV si applica all'equazione integrale

$$u(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} K[x, y, u(y)]\, \mathrm{d}y,$$

nell'ipotesi $\alpha \leqq 0$ e stabilisce l'esistenza e l'unicità della sua soluzione, nonché, in ogni intervallo A_τ, la formola di maggiorazione:

$$|u(x)| \leqq F_\tau\, e^{\mu_\tau \operatorname{Max}(n, 1+|\alpha|)(x - x_0)},$$

essendo F_τ un numero non superato da $|f(x)|$ in A_τ, laddove il teorema VI stabilisse, per la stessa equazione, l'esistenza e l'unicità della soluzione, per $\alpha \leqq 1$, e la formola di maggiorazione, che é più ristretta della precedente

$$|u(x)| \leqq F_\tau\, e^{\mu_\tau (x - x_0)}.$$

Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, Roma (Italien)

(Eingegangen am 12. Dezember 1959)

HEINZ, E.
Math. Zeitschr. 74, 129–157 (1960)

Neue a-priori-Abschätzungen für den Ortsvektor einer Fläche positiver Gaußscher Krümmung durch ihr Linienelement

HERRN ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

ERHARD HEINZ[1])

Problemstellung

Ein bekanntes Resultat von H. WEYL und H. LEWY[2]) besagt, daß jede auf der Einheitskugel Σ vorgegebene analytische Metrik ds^2 positiver Gaußscher Krümmung durch eine reguläre Eifläche $\mathfrak{F}$ im dreidimensionalen Raume verwirklicht werden kann. (Genauer: Es gibt eine auf Σ erklärte Vektorfunktion $\mathfrak{x}$, die in den lokalen Koordinaten u, v von Σ zweimal stetig differenzierbar ist und der Gleichung $(d\mathfrak{x})^2 = ds^2$ genügt.)

In neuerer Zeit ist es L. NIRENBERG [23] und A. W. POGORELOW [24] gelungen, dieses Theorem auf den Fall nichtanalytischer Metriken zu erweitern. Wir wollen die Hauptpunkte der Beweise hier kurz hervorheben. Als wesentliches Hilfsmittel dienen beiden Autoren gewisse nichttriviale Ungleichungen für die mittlere Krümmung H von $\mathfrak{F}$, oder, was damit äquivalent ist, Abschätzungen für die zweiten Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}$. Die erste Ungleichung, die bei NIRENBERG [23] verwendet wird, rührt von H. WEYL her[3]) und lautet

$$H^2 \leqq \max_{\Sigma} \left(K - \frac{1}{4K} \Delta_2 K \right). \tag{1}$$

Dabei bedeutet K die Gaußsche Krümmung von $\mathfrak{F}$, und Δ_2 ist der dem Linienelement ds^2 zugeordnete Beltramische Differentialoperator zweiter Ordnung. Die entsprechende Ungleichung von POGORELOW [24] geht insofern über (1) hinaus, als sie sich auf berandete Flächen, nämlich konvexe Mützen $\mathfrak{F}$ mit ebenem Rand, bezieht. Sie lautet

$$|H| \leqq \frac{2\sqrt{\frac{M}{K_0}}\,(1+h)}{z \cos \varphi_0}\ ^4). \tag{2}$$

---

[1]) Diese Arbeit wurde teilweise von einem Kontrakt des Office of Naval Research in Stanford University unterstützt.

[2]) Vgl. WEYL [25], LEWY [21], ferner NIRENBERG [23] und POGORELOW [24]. Zusammenfassende Darstellungen bei EFIMOW [7] und BUSEMANN [2], vgl. auch die Note von A. WINTNER [26].

[3]) Vgl. WEYL [25], § 6, ferner NIRENBERG [23], § 10, CHERN [5] und A. WINTNER [27].

[4]) Vgl. POGORELOW [24], S. 74–79. Wegen einer Erweiterung dieser Ungleichung auf allgemeine Mützen siehe [13], Theorem 5.

Hierbei ist h die Höhe der Mütze, φ_0 der größte Winkel zwischen der Tangentialebene der Mütze und ihrer Basisebene, z der Abstand des Punktes von der Basisebene, K_0 das Minimum der Gaußschen Krümmung von $\mathfrak{F}$ und M eine Zahl, die vom Minimum der Diskriminante von ds^2 sowie der oberen Schranke der Ableitungen der Koeffizienten von ds^2 bis zur *vierten* Ordnung abhängt. Aus diesen Abschätzungen, sowie aus einem von L. NIRENBERG [22] herrührenden allgemeinen Theorem über nichtlineare elliptische Differentialgleichungen, ergibt sich die Lösung des Weylschen Einbettungsproblems für den Fall, daß die Koeffizienten von ds^2 *viermal* stetig differenzierbar sind[5]).

Es erhebt sich nun die Frage, ob eine reguläre Einbettung von ds^2 im dreidimensionalen Raume auch im Falle einer *dreimal* stetig differenzierbaren Metrik ds^2 möglich ist. Dazu wäre es ausreichend, eine den Ungleichungen (1) oder (2) analoge Abschätzung für H zu gewinnen, wo auf der rechten Seite nur die Ableitungen der Koeffizienten von ds^2 bis zur *dritten* Ordnung auftreten. Dies soll in der vorliegenden Arbeit ausgeführt werden. Darüber hinaus werden wir die Voraussetzung, daß $\mathfrak{F}$ eine geschlossene Fläche oder eine Mütze sein muß, fallen lassen und nur fordern, daß $\iint_{\mathfrak{F}} |H|\, do < \infty$ ausfällt.

Unser Hauptresultat (Satz 3) läßt sich folgendermaßen aussprechen:

VORAUSSETZUNGEN.

(I) *$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$ ist eine in einem Gebiet Ω der uv-Ebene erklärte, reelle, zweimal stetig differenzierbare Vektorfunktion mit*

$$(d\mathfrak{x})^2 = ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{3}$$

Dabei sind die Koeffizienten $E(u, v)$, $F(u, v)$ und $G(u, v)$ in Ω viermal stetig differenzierbar und genügen dort den Ungleichungen

$$|E|,\ |F|,\ |G| \leqq a, \tag{4}$$

$$|E_u|,\ \ldots,\ |G_v| \leqq a, \tag{5}$$

$$|E_{uu}|,\ \ldots,\ |G_{vv}| \leqq a, \tag{6}$$

$$|E_{uuu}|,\ \ldots,\ |G_{vvv}| \leqq a \tag{7}$$

und

$$EG - F^2 \geqq a^{-1} \tag{8}$$

mit einer festen positiven Zahl a.

(II) *Für die Gaußsche Krümmung $K(u, v)$ von ds^2 gilt die Ungleichung*

$$K(u, v) \geqq b > 0. \tag{9}$$

(III) *Es ist*

$$\iint_{\Omega} |H|\, do \leqq c < \infty, \tag{10}$$

[5]) Darüber hinaus beweist POGORELOW Differenzierbarkeitssätze für konvexe Flächenstücke (vgl. [24], S. 86). Wegen einer Neudarstellung der Pogorelowschen Beweise, die in ihrer ursprünglichen Form fünfmal stetige Differenzierbarkeit der Metrik ds^2 voraussetzen, sei auf BUSEMANN [2] verwiesen.

wobei H die mittlere Krümmung und $do = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ das Oberflächenelement der Fläche $\mathfrak{F}$: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ bedeuten.

BEHAUPTUNG. *Es sei Ω_ϱ $(\varrho > 0)$ die Teilmenge aller Punkte von Ω, deren Abstand vom Rande von Ω größer als ϱ ist, und ν eine reelle Zahl mit $0 < \nu < 1$. Dann gelten Abschätzungen der Form*

$$|\mathfrak{x}_{uu}|, \ldots, |\mathfrak{x}_{vv}| \leqq \tau_0(a, b, c, \varrho) < \infty \qquad ((u, v) \in \Omega_\varrho) \tag{11}$$

und

$$\left\{ \begin{array}{c} |\mathfrak{x}_{uu}(u_2, v_2) - \mathfrak{x}_{uu}(u_1, v_1)| \\ \vdots \\ |\mathfrak{x}_{vv}(u_2, v_2) - \mathfrak{x}_{vv}(u_1, v_1)| \end{array} \right\} \leqq \tau_1 \cdot \left(\sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2} \right)^\nu \tag{12}$$

$$((u_1, v_1) \in \Omega_\varrho, \quad (u_2, v_2) \in \Omega_\varrho)$$

mit

$$\tau_1 = \tau_1(a, b, c, \varrho, \nu) < \infty.$$

Aus diesem Resultat ergibt sich dann in § 4 dieser Arbeit die Lösung des Weylschen Einbettungsproblems für eine dreimal stetig differenzierbare Metrik ds^2 (Satz 4)[5a]).

Die Methoden, mit denen wir Satz 3 beweisen werden, sind mit denjenigen verwandt, die H. LEWY in seinen Untersuchungen über Monge-Ampèresche Differentialgleichungen und das Weylsche Problem benutzt hat ([*18*], [*19*], [*20*] und [*21*]). Sie eröffnen auch den Zugang zu weiteren Problemen in der Differentialgeometrie im Großen.

Zunächst betrachten wir in § 1 und § 2 eineindeutige Abbildungen $(u, v) \to (x, y)$, die nichtlinearen Systemen elliptischer Differentialgleichungen der Form

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = h_1(x, y)\,(x_u^2 + x_v^2) + h_2(x, y)\,(x_u\, y_u + x_v\, y_v) + \\ \qquad + h_3(x, y)\,(y_u^2 + y_v^2) + h_4(x, y)\,(x_u\, y_v - x_v\, y_u) \end{array} \right. \tag{13}$$

und

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta y = \tilde{h}_1(x, y)\,(x_u^2 + x_v^2) + \tilde{h}_2(x, y)\,(x_u\, y_u + x_v\, y_v) + \\ \qquad + \tilde{h}_3(x, y)\,(y_u^2 + y_v^2) + \tilde{h}_4(x, y)\,(x_u\, y_v - x_v\, y_u) \end{array} \right. \tag{14}$$

genügen. Solche Systeme spielen auch in den Arbeiten von H. LEWY eine fundamentale Rolle[6]). Es wird uns gelingen, unter sehr schwachen Regularitätsvoraussetzungen hinsichtlich der Koeffizienten $h_1(x, y), \ldots, \tilde{h}_4(x, y)$ sowohl die ersten Ableitungen von x und y nach *oben* als auch die Funktionaldeterminante $|x_u y_v - x_v y_u|$ *durch eine positive Zahl nach unten* abzuschätzen und so unsere früheren Resultate[7]) zu verallgemeinern (Satz 2). Dabei liegen in dem letzteren Problem die eigentlichen Schwierigkeiten. Indem wir Satz 2 auf die Darbouxschen Differentialgleichungen anwenden, denen die Variablen

[5a]) Zusatz bei der Korrektur vom 13. 7. 60: Ein neuer Beweis von Satz 4, der sich auf [*13*], Theorem 2, stützt, soll in einer späteren Arbeit gegeben werden. Dort wird auch der Fall einer zweimal stetig differenzierbaren Metrik ds^2 behandelt.

[6]) Siehe insbesondere [*19*], S. 373, [*20*] und [*21*], S. 106.

[7]) Siehe [*11*], Satz 3, sowie [*12*], Theorem 10 und Theorem 11.

u, v als Funktionen der konjugiert-isothermen Parameter α, β der Fläche $\mathfrak{F}$ genügen, erhalten wir in § 3 die gesuchten a-priori-Abschätzungen (11) und (12).

In der vorliegenden Arbeit wird von der Theorie der elliptischen Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen kein Gebrauch gemacht. Vielmehr stützen sich alle Beweise auf Satz 2. Es sei bemerkt, daß sich dieses Theorem auch auf die Gewinnung von a-priori-Abschätzungen bei einer großen Klasse Monge-Ampèrescher Gleichungen anwenden läßt, was an anderer Stelle ausgeführt werden soll.

§ 1. Lokales Verhalten

Hauptziel dieses Paragraphen ist die sinngemäße Übertragung des bekannten Satzes von HURWITZ über Folgen analytischer Funktionen[8]) auf eine Klasse von Abbildungen $(u, v) \to (x, y)$, die einem System elliptischer Differentialgleichungen der Form (13) und (14) genügen (Satz 1). Zum Beweis werden die folgenden drei Hilfssätze benötigt:

HILFSSATZ 1. VORAUSSETZUNGEN:

(I) *Die Funktionen* $f^{(k)}(w) = f^{(k)}(u, v)$ $(k = 1, 2, \ldots;\ w = u + iv)$ *sind für* $|w| < R$ *reell und zweimal stetig differenzierbar und genügen außerdem für* $|w| < R$ *der Differentialungleichung*

$$|f^{(k)}_{w\bar{w}}| \leqq M\left(|f^{(k)}_{w}| + |f^{(k)}|\right) \tag{1.1}$$

mit einer festen positiven, von k unabhängigen Zahl M.

(II) *Die Relationen*

$$f^{(k)}(w) \to f(w) \qquad (k \to \infty) \tag{1.2}$$

und

$$f^{(k)}_{w}(w) \to f_{w}(w) \qquad (k \to \infty) \tag{1.3}$$

gelten gleichmäßig für $|w| < R$.

(III) *Es ist*

$$f(0) = f_{w}(0) = 0. \tag{1.4}$$

BEHAUPTUNG. *Entweder ist* $f(w) \equiv 0$, *oder es gibt eine positive ganze Zahl* p *mit*

$$\lim_{\substack{w \to 0 \\ (w \neq 0)}} \frac{f_{w}(w)}{w^{p}} \neq 0. \tag{1.5}$$

BEWEIS. Dieser Hilfssatz ist eine unmittelbare Folge eines Resultates von P. HARTMAN und A. WINTNER[9]).

HILFSSATZ 2. *Es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz* 1 *erfüllt, und außerdem sei*

$$f^{(k)}_{w}(w) \neq 0 \tag{1.6}$$

für $k = 1, 2, \ldots$ *und* $|w| < R$. *Dann verschwindet die Grenzfunktion* $f(w) = \lim_{k \to \infty} f^{(k)}(w)$ *identisch für* $|w| < R$.

[8]) Vgl. z. B. CARATHÉODORY [3], S. 65.

[9]) Siehe [10], Theorem 1 und 2. Die Beweisidee geht auf CARLEMAN [4] zurück.

BEWEIS. Angenommen, es sei $f(w) \not\equiv 0$. Dann gibt es nach Hilfssatz 1 eine positive ganze Zahl p mit

$$\lim_{\substack{w \to 0 \\ (w \neq 0)}} \frac{f_w(w)}{w^p} = A \neq 0. \tag{1.7}$$

Man setze

$$\varphi(w) = A\, w^p. \tag{1.8}$$

Wegen (1.3) und (1.7) lassen sich dann eine positive Zahl r mit $r < R$ und eine positive ganze Zahl k_0 so bestimmen, daß für $|w| = r$ die Ungleichung

$$|f_w^{(k_0)}(w) - \varphi(w)| < |\varphi(w)| \tag{1.9}$$

erfüllt ist. Daraus folgt aber [10])

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{|w|=r} d \arg f_w^{(k_0)}(w) = \frac{1}{2\pi} \oint_{|w|=r} d \arg \varphi(w) = p > 0. \tag{1.10}$$

Also gibt es ein w_0 mit $|w_0| < r$ und $f_w^{(k_0)}(w_0) = 0$ im Widerspruch zu (1.6). Damit ist gezeigt, daß die Funktion $f(w)$ für $|w| < R$ identisch verschwindet, womit Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Um die nächsten Resultate übersichtlich zu formulieren, bedienen wir uns der folgenden

DEFINITION 1. *$\Gamma_0(M_0, M_1; D)$ ist die Menge aller komplexwertigen Funktionen $z(w) = x(u, v) + i\, y(u, v)$ $(w = u + i v)$ mit den folgenden Eigenschaften: $x = x(u, v)$ und $y = y(u, v)$ sind reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktionen in einem Gebiet D der w-Ebene und genügen dort den Differentialgleichungen*

$$\begin{cases} \Delta x = a(x, y)\,(x_u^2 + x_v^2) + b(x, y)\,(x_u y_u + x_v y_v) + \\ \qquad + c(x, y)\,(y_u^2 + y_v^2) + d(x, y)\,(x_u y_v - x_v y_u) \end{cases} \tag{1.11}$$

und

$$\begin{cases} \Delta y = \tilde{a}(x, y)\,(x_u^2 + x_v^2) + \tilde{b}(x, y)\,(x_u y_u + x_v y_v) + \\ \qquad + \tilde{c}(x, y)\,(y_u^2 + y_v^2) + \tilde{d}(x, y)\,(x_u y_v - x_v y_u). \end{cases} \tag{1.12}$$

Dabei sind die Koeffizienten $a(z) = a(x, y), \ldots, \tilde{d}(z) = \tilde{d}(x, y)$ $(z = x + i y)$ reell und für $|z| < \infty$ definiert. Außerdem gelten die Abschätzungen

$$|a(z)|, \ldots, |\tilde{d}(z)| \leqq M_0 \tag{1.13}$$

für $|z| < \infty$ und

$$\begin{cases} |\tilde{a}(z_2) - \tilde{a}(z_1)| \leqq M_1 |z_2 - z_1| \\ |(a(z_2) - \tilde{b}(z_2)) - (a(z_1) - \tilde{b}(z_1))| \leqq M_1 |z_2 - z_1| \\ |(b(z_2) - \tilde{c}(z_2)) - (b(z_1) - \tilde{c}(z_1))| \leqq M_1 |z_2 - z_1| \\ |c(z_2) - c(z_1)| \leqq M_1 |z_2 - z_1| \end{cases} \tag{1.14}$$

für $|z_1| < \infty$ und $|z_2| < \infty$, wobei M_0 und M_1 zwei feste positive Zahlen bedeuten.

[10]) Zu den hier verwendeten Fundamentaleigenschaften der Umlaufszahlen vgl. z. B. FENCHEL [8].

HILFSSATZ 3. *Die Funktion* $z(w)=x(u,v)+iy(u,v)$ *gehöre zu* $\Gamma_0(M_0,M_1;D)$ *und genüge in einer in* D *enthaltenen Kreisscheibe* $|w-w_0|\leqq\varrho$ *den Ungleichungen*

$$|z(w)-z_0|<\frac{1}{72M_0}\qquad(z_0=x_0+iy_0) \tag{1.15}$$

und

$$|z_u|+|z_v|\leqq K<\infty. \tag{1.16}$$

Ferner sei Θ *eine beliebige reelle Zahl. Dann gibt es eine für* $|\eta|<\frac{1}{72M_0}$ *zweimal stetig differenzierbare, reelle Funktion* $g(\eta)$ *mit den folgenden Eigenschaften*:

(I) *Es ist*

$$g(0)=g'(0)=0, \tag{1.17}$$

und es gelten die Ungleichungen

$$|g'(\eta)|\leqq 1 \tag{1.18}$$

und

$$|g''(\eta)|\leqq 72M_0 \tag{1.19}$$

für $|\eta|<\frac{1}{72M_0}$.

(II) *Die Funktion*

$$\begin{cases} f(w)=\cos\Theta\cdot\big(x(u,v)-x_0\big)+\sin\Theta\cdot\big(y(u,v)-y_0\big)- \\ \qquad -g\big(\cos\Theta\cdot(y(u,v)-y_0)-\sin\Theta\cdot(x(u,v)-x_0)\big) \end{cases} \tag{1.20}$$

genügt für $|w-w_0|<\varrho$ *der Differentialungleichung*

$$|f_{w\bar w}|\leqq(288KM_0+24K^2M_1)(|f_w|+|f|). \tag{1.21}$$

BEWEIS. Man setze

$$\xi(u,v)=\cos\Theta\cdot\big(x(u,v)-x_0\big)+\sin\Theta\cdot\big(y(u,v)-y_0\big) \tag{1.22}$$

und

$$\eta(u,v)=\cos\Theta\cdot\big(y(u,v)-y_0\big)-\sin\Theta\cdot\big(x(u,v)-x_0\big). \tag{1.23}$$

Dann genügen die Funktionen $\xi=\xi(u,v)$ und $\eta=\eta(u,v)$ für $w\in D$ den Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \Delta\xi=A(\xi,\eta)(\xi_u^2+\xi_v^2)+B(\xi,\eta)(\xi_u\eta_u+\xi_v\eta_v)+ \\ \qquad +C(\xi,\eta)(\eta_u^2+\eta_v^2)+D(\xi,\eta)(\xi_u\eta_v-\xi_v\eta_u) \end{cases} \tag{1.24}$$

und

$$\begin{cases} \Delta\eta=\widetilde{A}(\xi,\eta)(\xi_u^2+\xi_v^2)+\widetilde{B}(\xi,\eta)(\xi_u\eta_u+\xi_v\eta_v)+ \\ \qquad +\widetilde{C}(\xi,\eta)(\eta_u^2+\eta_v^2)+\widetilde{D}(\xi,\eta)(\xi_u\eta_v-\xi_v\eta_u) \end{cases} \tag{1.25}$$

mit

$$\begin{cases} A(\xi,\eta)=a(x,y)\cos^3\Theta+\big(\tilde a(x,y)+b(x,y)\big)\cos^2\Theta\sin\Theta+ \\ \qquad +\big(\tilde b(x,y)+c(x,y)\big)\cos\Theta\sin^2\Theta+\tilde c(x,y)\sin^3\Theta, \end{cases} \tag{1.26}$$

$$(1.27)\quad \begin{cases} B(\xi,\eta) = b(x,y)\cos^3\Theta + \\ \quad + \big(-2a(x,y) + \tilde{b}(x,y) + 2c(x,y)\big)\cos^2\Theta\sin\Theta + \\ \quad + \big(-2\tilde{a}(x,y) - b(x,y) + 2\tilde{c}(x,y)\big)\cos\Theta\sin^2\Theta - \\ \quad - \tilde{b}(x,y)\sin^3\Theta, \end{cases}$$

$$(1.28)\quad \begin{cases} C(\xi,\eta) = c(x,y)\cos^3\Theta + \big(\tilde{c}(x,y) - b(x,y)\big)\cos^2\Theta\sin\Theta + \\ \quad + \big(a(x,y) - \tilde{b}(x,y)\big)\cos\Theta\sin^2\Theta + \tilde{a}(x,y)\sin^3\Theta, \end{cases}$$

$$(1.29)\quad D(\xi,\eta) = d(x,y)\cos\Theta + \tilde{d}(x,y)\sin\Theta$$

und

$$(1.30)\quad \begin{cases} \widetilde{A}(\xi,\eta) = \tilde{a}(x,y)\cos^3\Theta - \big(a(x,y) - \tilde{b}(x,y)\big)\cos^3\Theta\sin\Theta - \\ \quad - \big(b(x,y) - \tilde{c}(x,y)\big)\cos\Theta\sin^2\Theta - c(x,y)\sin^3\Theta, \end{cases}$$

$$(1.31)\quad \begin{cases} \widetilde{B}(\xi,\eta) = \tilde{b}(x,y)\cos^3\Theta - \\ \quad - \big(2\tilde{a}(x,y) + b(x,y) - 2\tilde{c}(x,y)\big)\cos^2\Theta\sin\Theta + \\ \quad + \big(2a(x,y) - \tilde{b}(x,y) - 2c(x,y)\big)\cos\Theta\sin^2\Theta + \\ \quad + b(x,y)\sin^3\Theta, \end{cases}$$

$$(1.32)\quad \begin{cases} \widetilde{C}(\xi,\eta) = \tilde{c}(x,y)\cos^3\Theta - \big(\tilde{b}(x,y) + c(x,y)\big)\cos^2\Theta\sin\Theta + \\ \quad + \big(\tilde{a}(x,y) + b(x,y)\big)\cos\Theta\sin^2\Theta - a(x,y)\sin^3\Theta, \end{cases}$$

$$(1.33)\quad \widetilde{D}(\xi,\eta) = -d(x,y)\sin\Theta + \tilde{d}(x,y)\cos\Theta,$$

wobei die Größen x, y auf der rechten Seite von (1.26)–(1.33) durch die Variabeln ξ, η vermöge der Substitution

$$(1.34)\quad \begin{cases} x = x_0 + \xi\cos\Theta - \eta\sin\Theta \\ y = y_0 + \xi\sin\Theta + \eta\cos\Theta \end{cases}$$

auszudrücken sind. Aus (1.26)–(1.33) folgt

$$(1.35)\quad \begin{cases} A(\xi,\eta) - \widetilde{B}(\xi,\eta) = \big(a(x,y) - \tilde{b}(x,y)\big)\cos^3\Theta + \\ \quad + \big(3\tilde{a}(x,y) + 2\big(b(x,y) - \tilde{c}(x,y)\big)\big)\cos^2\Theta\sin\Theta + \\ \quad + \big(2\big(\tilde{b}(x,y) - a(x,y)\big) + 3c(x,y)\big)\cos\Theta\sin^2\Theta + \\ \quad + \big(\tilde{c}(x,y) - b(x,y)\big)\sin^3\Theta \end{cases}$$

und

$$(1.36)\quad \begin{cases} B(\xi,\eta) - \widetilde{C}(\xi,\eta) = \big(b(x,y) - \tilde{c}(x,y)\big)\cos^3\Theta + \\ \quad + \big(2\big(\tilde{b}(x,y) - a(x,y)\big) + 3c(x,y)\big)\cos^2\Theta\sin\Theta + \\ \quad + \big(2\big(\tilde{c}(x,y) - b(x,y)\big) - 3\tilde{a}(x,y)\big)\cos\Theta\sin^2\Theta + \\ \quad + \big(a(x,y) - \tilde{b}(x,y)\big)\sin^3\Theta. \end{cases}$$

Setzt man $\zeta = \xi + i\eta$, so ergeben sich für die Koeffizienten $A(\zeta) = A(\xi,\eta), \ldots, \widetilde{D}(\zeta) = \widetilde{D}(\xi,\eta)$ die folgenden Abschätzungen:

$$(1.37)\quad |A(\zeta)|, \ldots, |D(\zeta)| \leqq 12M_0 \qquad (|\zeta| < \infty)$$

und

$$(1.38)\quad \begin{cases} |\widetilde{A}(\zeta_2)-\widetilde{A}(\zeta_1)| \leqq 12M_1|\zeta_2-\zeta_1| \\ |(A(\zeta_2)-\widetilde{B}(\zeta_2))-(A(\zeta_1)-\widetilde{B}(\zeta_1))| \leqq 12M_1|\zeta_2-\zeta_1| \\ |(B(\zeta_2)-\widetilde{C}(\zeta_2))-(B(\zeta_1)-\widetilde{C}(\zeta_1))| \leqq 12M_1|\zeta_2-\zeta_1| \\ |C(\zeta_2)-C(\zeta_1)| \leqq 12M_1|\zeta_2-\zeta_1| \\ (|\zeta_1|<\infty,\ |\zeta_2|<\infty). \end{cases}$$

Man definiere nun die Funktion $\mathsf{X}=\mathsf{X}(\eta, g_0, g_1)$ durch die Gleichung

$$(1.39)\quad \begin{cases} \mathsf{X}(\eta,g_0,g_1) = -\widetilde{A}(g_0,\eta)\,g_1^3+(A(g_0,\eta)-\widetilde{B}(g_0,\eta))\,g_1^2+ \\ \qquad +(B(g_0,\eta)-\widetilde{C}(g_0,\eta))\,g_1+C(g_0,\eta). \end{cases}$$

Wegen (1.38) genügt X in jedem endlichen, abgeschlossenen Teilbereich von (η, g_0, g_1) einer Lipschitzbedingung, und aus (1.37) folgt die Abschätzung

$$(1.40)\quad |\mathsf{X}(\eta,g_0,g_1)| \leqq 72M_0$$

für $\quad |\eta|<\infty, \quad |g_0|<\infty$ und $|g_1|\leqq 1$.

Nach einem fundamentalen Existenzsatz gibt es eine für $|\eta|<\frac{1}{72M_0}$ zweimal stetig differenzierbare, reelle Lösung $g=g(\eta)$ der Differentialgleichung

$$(1.41)\quad g''(\eta)=\mathsf{X}(\eta,g(\eta),g'(\eta))$$

mit

$$(1.42)\quad g(0)=g'(0)=0$$

und

$$(1.43)\quad |g'(\eta)|\leqq 1\ ^{11}).$$

Hieraus folgt insbesondere

$$(1.44)\quad |g''(\eta)|\leqq 72M_0 \qquad \left(|\eta|<\frac{1}{72M_0}\right).$$

Wir betrachten nun die folgende reelle Funktion der Variablen u, v [12]:

$$(1.45)\quad f(w)=f(u,v)=\xi(u,v)-g\left(\eta(u,v)\right).$$

Wegen (1.15) ist $|\eta(u,v)|<\frac{1}{72M_0}\left(|w-w_0|<\varrho\right)$. Also ist $f(w)$ für $|w-w_0|<\varrho$ zweimal stetig differenzierbar, und es gilt

$$(1.46)\quad \begin{cases} \Delta f=\Delta\xi-g'(\eta)\,\Delta\eta-g''(\eta)\,(\eta_u^2+\eta_v^2) \\ \quad =[A(\xi,\eta)-g'(\eta)\,\widetilde{A}(\xi,\eta)]\,(\xi_u^2+\xi_v^2)+ \\ \qquad +[B(\xi,\eta)-g'(\eta)\,\widetilde{B}(\xi,\eta)]\,(\xi_u\eta_u+\xi_v\eta_v)+ \\ \qquad +[C(\xi,\eta)-g'(\eta)\,\widetilde{C}(\xi,\eta)-g''(\eta)]\,(\eta_u^2+\eta_v^2)+ \\ \qquad +[D(\xi,\eta)-g'(\eta)\,\widetilde{D}(\xi,\eta)]\,(\xi_u\eta_v-\xi_v\eta_u). \end{cases}$$

[11]) Siehe z. B. KAMKE [16], S. 124–126.

[12]) Zu diesem Schritt vergleiche man LEWY [20], insbes. S. 691.

Ersetzt man hierin die Größen ξ_u und ξ_v durch die Ausdrücke

$$\xi_u = f_u + g'(\eta)\,\eta_u \tag{1.47}$$

und

$$\xi_v = f_v + g'(\eta)\,\eta_v \tag{1.48}$$

und berücksichtigt (1.39) und (1.41), so erhält man für $f(w)$ die Differentialgleichung

$$\Delta f = P(f_u^2 + f_v^2) + Q(f_u\eta_u + f_v\eta_v) + R(\eta_u^2 + \eta_v^2) + S(f_u\eta_v - f_v\eta_u) \tag{1.49}$$

mit

$$P = A(\xi,\eta) - g'(\eta)\,\widetilde{A}(\xi,\eta)\,, \tag{1.50}$$

$$Q = B(\xi,\eta) + [2A(\xi,\eta) - \widetilde{B}(\xi,\eta)]\,g'(\eta) - 2\widetilde{A}(\xi,\eta)\,g'(\eta)^2, \tag{1.51}$$

$$\left\{\begin{aligned} R = &-[\widetilde{A}(\xi,\eta) - \widetilde{A}(g(\eta),\eta)]\,g'(\eta)^3 + \\ &+[(A(\xi,\eta) - \widetilde{B}(\xi,\eta)) - (A(g(\eta),\eta) - \widetilde{B}(g(\eta),\eta))]\,g'(\eta)^2 + \\ &+[(B(\xi,\eta) - \widetilde{C}(\xi,\eta)) - (B(g(\eta),\eta) - \widetilde{C}(g(\eta),\eta))]\,g'(\eta) + \\ &+[C(\xi,\eta) - C(g(\eta),\eta)] \end{aligned}\right. \tag{1.52}$$

und

$$S = D(\xi,\eta) - g'(\eta)\,\widetilde{D}(\xi,\eta)\,. \tag{1.53}$$

Wir wollen nun die rechte Seite von (1.49) abschätzen. Zunächst erhält man aus (1.16), (1.22), (1.23), (1.43), (1.47) und (1.48) die Ungleichungen

$$|\xi_u|, \ldots, |\eta_v| \leqq K \tag{1.54}$$

und

$$|f_u|,\quad |f_v| \leqq 2K \tag{1.55}$$

für $|w - w_0| < \varrho$.

Ferner ergeben sich aus den Darstellungen (1.50)–(1.53) unter Berücksichtigung der Ungleichungen (1.37), (1.38) und (1.43) die folgenden Abschätzungen für die Koeffizienten P, Q, R und S:

$$\left\{\begin{aligned} &|P|,\ |Q|,\ |S| \leqq 72\,M_0 \\ &\left(|\xi| < \infty,\ |\eta| < \frac{1}{72\,M_0}\right) \end{aligned}\right. \tag{1.56}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} &|R| \leqq 48\,M_1\,|\xi - g(\eta)| \\ &\left(|\xi| < \infty,\ |\eta| < \frac{1}{72\,M_0}\right). \end{aligned}\right. \tag{1.57}$$

Trägt man dies in (1.49) ein und beachtet (1.45), so entsteht

$$\left\{\begin{aligned} |\Delta f| &\leqq |P f_u + Q\eta_u + S\eta_v|\,|f_u| + \\ &\quad + |P f_v + Q\eta_v - S\eta_u|\,|f_v| + (\eta_u^2 + \eta_v^2)\,|R| \\ &\leqq 288\,K\,M_0(|f_u| + |f_v|) + 96\,K^2 M_1\,|f(w)|, \end{aligned}\right. \tag{1.58}$$

also

$$|f_{w\bar{w}}| \leqq (288 K M_0 + 24 K^2 M_1)(|f_w| + |f|) \tag{1.59}$$

für $|w - w_0| < \varrho$, womit **Hilfssatz 3** vollständig bewiesen ist.

Jetzt sind wir in der Lage, das Hauptziel dieses Paragraphen zu beweisen, nämlich

SATZ 1. *Es sei* $z^{(k)}(w) = x^{(k)}(u, v) + i y^{(k)}(u, v)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *eine Folge von Funktionen aus* $\Gamma_0(M_0, M_1; D)$ *mit* $\frac{\partial(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial(u, v)} \neq 0$ $(w \in D)$, *die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung gleichmäßig in jedem endlichen abgeschlossenen Teilbereich von* D *gegen eine in* D *einmal stetig differenzierbare Funktion* $z(w) = x(u, v) + i y(u, v)$ *konvergieren. Dann ist entweder*

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0 \quad (w \in D) \tag{1.60}$$

oder

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv 0 \quad (w \in D). \tag{1.61}$$

BEWEIS. Angenommen, die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ verschwindet in einem Punkt $w_0 \in D$. Dann gibt es eine reelle Zahl Θ mit

$$x_u \cos\Theta + y_u \sin\Theta = 0 \qquad (w = w_0) \tag{1.62}$$

und

$$x_v \cos\Theta + y_v \sin\Theta = 0 \qquad (w = w_0). \tag{1.63}$$

Ferner lassen sich auf Grund unserer Voraussetzungen zwei positive Zahlen ϱ und K so bestimmen, daß die Kreisscheibe $|w - w_0| \leqq \varrho$ zu D gehört und für $|w - w_0| \leqq \varrho$ und alle $k = 1, 2, 3, \ldots$ die Ungleichungen

$$\begin{cases} |z^{(k)}(w) - z_0^{(k)}| \leqq \frac{1}{1 + 72 M_0} \\ \left(z_0^{(k)} = z^{(k)}(w_0) = x_0^{(k)} + i y_0^{(k)}\right) \end{cases} \tag{1.64}$$

und

$$|z_u^{(k)}(w)| + |z_v^{(k)}(w)| \leqq K \tag{1.65}$$

erfüllt sind. Nach Hilfssatz 3 gibt es dann eine Folge reeller Funktionen $\{g_k(\eta)\}$, die für $|\eta| < \frac{1}{72 M_0}$ zweimal stetig differenzierbar sind und außerdem den folgenden Bedingungen genügen:

(I) Es ist

$$g_k(0) = g_k'(0) = 0, \tag{1.66}$$

und es gelten die Ungleichungen

$$|g_k'(\eta)| \leqq 1 \tag{1.67}$$

und

$$|g_k''(\eta)| \leqq 72 M_0 \tag{1.68}$$

für $|\eta| < \frac{1}{72 M_0}$

(II) Die reellen Funktionen

$$(1.69)\quad \begin{cases} f^{(k)}(w) = \cos\Theta\cdot\left(x^{(k)}(u,v) - x_0^{(k)}\right) + \sin\Theta\cdot\left(y^{(k)}(u,v) - y_0^{(k)}\right) - \\ \qquad - g_k\left(\cos\Theta\cdot\left(y^{(k)}(u,v) - y_0^{(k)}\right) - \sin\Theta\cdot\left(x^{(k)}(u,v) - x_0^{(k)}\right)\right) \end{cases}$$

sind für $|w-w_0|<\varrho$ erklärt und genügen dort der Differentialungleichung

$$(1.70)\qquad |f^{(k)}_{\bar{w}\bar{w}}| \leqq M\left(|f^{(k)}_{w}| + |f^{(k)}|\right)$$

mit

$$(1.71)\qquad M = 288\,K\,M_0 + 24\,K^2 M_1.$$

Da die Funktionaldeterminanten $\frac{\partial(x^{(k)},\,y^{(k)})}{\partial(u,\,v)}$ $(k=1,2,\ldots)$ in D nicht verschwinden, so ist

$$(1.72)\qquad f^{(k)}_{w}(w) \neq 0$$

für $|w-w_0|<\varrho$ und $k=1,2,\ldots$. Ferner entnimmt man aus (1.66)—(1.68) die Existenz einer Teilfolge $\{k_\nu\}$ der natürlichen Zahlen derart, daß die Funktionen $g_{k_\nu}(\eta)$ zusammen mit ihren ersten Ableitungen gleichmäßig in $|\eta| \leqq \frac{1}{72M_0}$ gegen eine für $|\eta| < \frac{1}{72M_0}$ einmal stetig differenzierbare Grenzfunktion $g(\eta)$ konvergieren, für die

$$(1.73)\qquad g(0) = g'(0) = 0$$

ausfällt. Setzt man also $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$ und

$$(1.74)\quad \begin{cases} f(w) = \cos\Theta\cdot\left(x(u,v) - x_0\right) + \sin\Theta\cdot\left(y(u,v) - y_0\right) - \\ \qquad - g\left(\cos\Theta\cdot\left(y(u,v) - y_0\right) - \sin\Theta\cdot\left(x(u,v) - x_0\right)\right), \end{cases}$$

so ist $f(w)$ für $|w-w_0|<\varrho$ einmal stetig differenzierbar, und die Relationen

$$(1.75)\qquad f^{(k_\nu)}(w) \to f(w) \qquad (\nu\to\infty)$$

und

$$(1.76)\qquad f^{(k_\nu)}_{w}(w) \to f_w(w) \qquad (\nu\to\infty)$$

gelten gleichmäßig für $|w-w_0| \leqq \varrho$. Aus (1.62), (1.63) und (1.73) folgt

$$(1.77)\qquad f(w_0) = f_w(w_0) = 0.$$

Hilfssatz 2 wird also anwendbar und liefert

$$(1.78)\qquad f(w) \equiv 0 \qquad \left(|w-w_0| \leqq \varrho\right).$$

Daraus, sowie aus (1.74), folgt aber

$$(1.79)\qquad \frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)} \equiv 0 \qquad \left(|w-w_0| \leqq \varrho\right)$$

und somit $\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)} \equiv 0$ in D, somit Satz 1 bewiesen ist.

§ 2. Abschätzung der Funktionaldeterminante

Wir stellen uns jetzt das Problem, unter geeigneten Normierungsbedingungen die Funktionaldeterminante $\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$ einer Abbildung $(u, v) \to (x, y)$ nach unten abzuschätzen, falls x und y einem System elliptischer Differentialgleichungen der Form (13) und (14) genügen. Die Überlegungen beruhen einerseits auf Satz 1 und andererseits auf der Kenntnis der a-priori-Schranken für die ersten Ableitungen von x und y, über die die nächsten beiden Hilfssätze Auskunft geben.

HILFSSATZ 4. *Die komplexwertige Funktion* $z = z(w) = x(u, v) + i\,y(u, v)$ *sei für* $|w - w_0| < \varrho$ *zweimal stetig differenzierbar und genüge der Differentialungleichung*

$$|\Delta z| \leqq \alpha\left(|z_u|^2 + |z_v|^2\right) \tag{2.1}$$

mit $0 \leqq \alpha < 1$. *Außerdem sei*

$$|z(w)| \leqq 1 \tag{2.2}$$

für $|w - w_0| < \varrho$. *Dann gibt es eine feste positive, nur von* α *abhängige Zahl* $k = k(\alpha)$ *mit*

$$\left(|z_u| + |z_v|\right)_{w = w_0} \leqq \frac{k(\alpha)}{\varrho}. \tag{2.3}$$

Für den Beweis dieses Hilfssatzes sei auf [12], Theorem 2, verwiesen [13]).

HILFSSATZ 5. *Es sei* Γ^* *eine Menge von komplexwertigen Funktionen* $z = z(w) = x(u, v) + i\,y(u, v)$, *die in der Kreisscheibe* $|w| < 1$ *zweimal stetig differenzierbar und außerdem für* $|w| \leqq 1$ *gleichgradig stetig sind. Ferner gelte für alle Funktionen* $z(w) \in \Gamma^*$ *die Differentialungleichung*

$$|\Delta z| \leqq \beta\left(|z_u|^2 + |z_v|^2\right) \tag{2.4}$$

mit einer positiven Zahl β. *Dann hat man für* $0 \leqq r < 1$ *und* $0 < r < 1$ *die Abschätzungen*

$$\text{Obere Grenze}_{\substack{|w| \leqq r \\ z(w) \in \Gamma^*}} \left(|z_u| + |z_v|\right) < \infty \tag{2.5}$$

und

$$\text{Obere Grenze}_{\substack{|w_1|,\ |w_2| \leqq r,\ w_1 \neq w_2 \\ z(w) \in \Gamma^*}} \frac{|z_u(w_2) - z_u(w_1)| + |z_v(w_2) - z_v(w_1)|}{|w_2 - w_1|^r} < \infty. \tag{2.6}$$

BEWEIS. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit der Funktionenmenge Γ^* gibt es eine positive, nur von β und r abhängige Zahl $\delta(\beta, r)$ mit $\delta(\beta, r) < 1 - r$, so daß die Ungleichung

$$|z(w_2) - z(w_1)| \leqq \frac{1}{2\beta} \tag{2.7}$$

---

[13]) Der Satz verliert seine Gültigkeit für $\alpha \geqq 1$ (vgl. [12], S. 230). Für den Beweis des folgenden Hilfssatzes reicht die weniger tiefliegende Behauptung aus, daß (2.3) für $0 \leqq \alpha < \alpha_0$ gilt, wobei α_0 eine feste positive Zahl bedeutet (vgl. [11], § 2).

für $|w_2-w_1|\leqq\delta(\beta,r)$ $(|w_1|,|w_2|\leqq 1)$ und alle Funktionen $z(w)\in\Gamma^*$ erfüllt ist. Es sei nun w_0 eine beliebige komplexe Zahl mit $|w_0|\leqq r$, und man setze

$$Z(w)=2\beta\left(z(w)-z(w_0)\right). \tag{2.8}$$

Offenbar ist die Funktion $Z(w)$ für $|w-w_0|<\delta(\beta,r)$ zweimal stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialungleichung

$$|\Delta Z|\leqq\tfrac{1}{2}\left(|Z_u|^2+|Z_v|^2\right). \tag{2.9}$$

Ferner ist

$$|Z(w)|\leqq 1 \qquad \left(|w-w_0|<\delta(\beta,r)\right). \tag{2.10}$$

Durch Anwendung von Hilfssatz 4 (mit $\alpha=\frac{1}{2}$, $\varrho=\delta(\beta,r)$) ergibt sich

$$\left(|Z_u|+|Z_v|\right)_{w=w_0}\leqq\frac{k(\frac{1}{2})}{\delta(\beta,r)}, \tag{2.11}$$

also

$$\left(|z_u|+|z_v|\right)_{w=w_0}\leqq\frac{k(\frac{1}{2})}{2\beta\cdot\delta(\beta,r)}, \tag{2.12}$$

womit die Ungleichung (2.5) bewiesen ist. Um (2.6) zu beweisen, setze man

$$\hat{Z}(w)=z(w)-z(0). \tag{2.13}$$

Wegen (2.4) und (2.12) hat man für $|w|\leqq\frac{1}{2}(1+r)$ die Abschätzungen

$$\left\{\begin{aligned}|\Delta\hat{Z}|&\leqq\beta\left(|z_u|^2+|z_v|^2\right)\\&\leqq\beta\cdot\left(\frac{k(\frac{1}{2})}{2\beta\cdot\delta\left(\beta,\frac{1+r}{2}\right)}\right)^2\end{aligned}\right. \tag{2.14}$$

und

$$|\hat{Z}(w)|\leqq\frac{k(\frac{1}{2})}{2\beta\cdot\delta\left(\beta,\frac{1+r}{2}\right)}. \tag{2.15}$$

Daraus folgt (2.6) nach einem bekannten potentialtheoretischen Satz [14]).

Definition 2. *$\Gamma_1(M_0,M_1)$ ist die Menge aller für $|w|<1$ zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $z(w)=x(u,v)+iy(u,v)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(I) *$z=z(w)$ bildet die Kreisscheibe $|w|\leqq 1$ eineindeutig und stetig auf die Kreisscheibe $|z|\leqq 1$ $(z=x+iy)$ ab, und es ist*

$$x_u y_v-x_v y_u\neq 0 \tag{2.16}$$

für $|w|<1$.

(II) *Die Funktionen $x=x(u,v)$ und $y=y(u,v)$ genügen für $|w|<1$ den partiellen Differentialgleichungen:*

$$\left\{\begin{aligned}\Delta x=&\,h_1(x,y)\,(x_u^2+x_v^2)+h_2(x,y)\,(x_u y_u+x_v y_v)+\\&+h_3(x,y)\,(y_u^2+y_v^2)+h_4(x,y)\,(x_u y_v-x_v y_u)\end{aligned}\right. \tag{2.17}$$

[14]) Siehe z. B. [12], Lemma 1.

und

$$\begin{cases} \Delta y = \tilde{h}_1(x,y)\,(x_u^2 + x_v^2) + \tilde{h}_2(x,y)\,(x_u y_u + x_v y_v) + \\ \qquad + \tilde{h}_3(x,y)\,(y_u^2 + y_v^2) + \tilde{h}_4(x,y)\,(x_u y_v - x_v y_u). \end{cases} \tag{2.18}$$

Dabei sind die Koeffizienten $h_1(x,y), \ldots, \tilde{h}_4(x,y)$ *für* $|z| \leqq 1$ *einmal stetig differenzierbare, reelle Funktionen, und es gelten für* $|z| \leqq 1$ *die Abschätzungen*

$$\sum_{\nu=1}^{4} \left(|h_\nu(x,y)| + |\tilde{h}_\nu(x,y)| \right) < M_0 < \infty \tag{2.19}$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{4} \left(\left| \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \omega_\nu}{\partial y} \right| \right) < M_1 < \infty \tag{2.20}$$

mit

$$\omega_1(x,y) = \tilde{h}_1(x,y), \tag{2.21}$$

$$\omega_2(x,y) = h_1(x,y) - \tilde{h}_2(x,y), \tag{2.22}$$

$$\omega_3(x,y) = h_2(x,y) - \tilde{h}_3(x,y) \tag{2.23}$$

und

$$\omega_4(x,y) = h_3(x,y). \tag{2.24}$$

Es gilt nun der folgende

HILFSSATZ 6. *Es sei* Γ_1^* *eine Teilmenge von Funktionen* $z(w)$ *aus* $\Gamma_1(M_0, M_1)$, *die für* $|w| \leqq 1$ *gleichgradig stetig sind. Dann gelten für* $0 \leqq r < 1$ *und* $0 < \nu < 1$ *die folgenden Abschätzungen*

$$\text{Obere Grenze}_{\substack{|w| \leqq r \\ z(w) \in \Gamma_1^*}} \left(|z_u| + |z_v| \right) < \infty, \tag{2.25}$$

$$\text{Obere Grenze}_{|w_1|,\ |w_2| \leqq r,\ w_1 \neq w_2,\ z(w) \in \Gamma_1^*} \frac{|z_u(w_2) - z_u(w_1)| + |z_v(w_2) - z_v(w_1)|}{|w_2 - w_1|^\nu} < \infty \tag{2.26}$$

und

$$\text{Untere Grenze}_{\substack{|w| \leqq r \\ z(w) \in \Gamma_1^*}} |x_u y_v - x_v y_u| > 0. \tag{2.27}$$

BEWEIS. Wegen (2.19) genügt jede Funktion $z(w) \in \Gamma_1^*$ der Differentialungleichung

$$|\Delta z| \leqq 2M_0 \left(|z_u|^2 + |z_v|^2 \right) \qquad (|w| < 1). \tag{2.28}$$

Hilfssatz 5 wird also anwendbar und liefert die Abschätzungen (2.25) und (2.26). Die Ungleichung (2.27) beweisen wir durch eine reductio ad absurdum. Angenommen, (2.27) sei falsch. Dann gibt es eine Punktfolge $\{w_k\}$ mit $|w_k| \leqq r$ und eine Funktionenfolge $\{z^{(k)}(w)\} \in \Gamma_1^*$ mit

$$\lim_{k \to \infty} \left(x_u^{(k)} y_v^{(k)} - x_v^{(k)} y_u^{(k)} \right)_{w = w_k} = 0. \tag{2.29}$$

Wegen (2.25), (2.26) und $|z(w)| \leqq 1$ $(|w| \leqq 1)$ gibt es eine Teilfolge $\{k_\nu\}$ der natürlichen Zahlen, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(I) Es ist

$$\lim_{\nu\to\infty} w_{k_\nu} = w^* \tag{2.30}$$

mit $|w^*| \leqq r < 1$.

(II) Die Funktionen $z^{(k_\nu)}(w)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ konvergieren zusammen mit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung gleichmäßig in jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $|w| \leqq R < 1$ gegen eine für $|w| < 1$ einmal stetig differenzierbare Grenzfunktion $z(w) = x(u, v) + i\,y(u, v)$. Daraus, sowie aus (2.29), entnimmt man die Gleichung

$$(x_u\, y_v - x_v\, y_u)_{w=w^*} = 0. \tag{2.31}$$

Offenbar ist $\Gamma_1(M_0, M_1) \subset \Gamma_0(M_0, M_1; D)$ mit $D = \{|w| < 1\}$[15]. Also ist Satz 1 auf die Funktionenfolge $\{z^{(k_\nu)}(w)\}$ anwendbar und liefert wegen (2.31) die Gleichung

$$x_u\, y_v - x_v\, y_u \equiv 0 \qquad (|w| < 1). \tag{2.32}$$

Wir wollen zeigen, daß dies unmöglich ist. Zunächst gibt es wegen

$$|z^{(k_\nu)}(w)| = 1 \qquad (|w| = 1) \tag{2.33}$$

und der gleichgradigen Stetigkeit der Funktionenmenge Γ_1^* eine positive Zahl ϱ mit $\varrho < 1$ und

$$|z^{(k_\nu)}(w)| > \tfrac{1}{2} \qquad (|w| \geqq \varrho;\ \nu = 1, 2, \ldots). \tag{2.34}$$

Also bilden die Funktionen $z = z^{(k_\nu)}(w)$ die Kreisscheibe $|w| < \varrho$ auf Gebiete Δ_ν ab, die die Kreisscheibe $|z| \leqq \frac{1}{2}$ im Innern enthalten. Daraus, sowie aus (2.16), folgt aber

$$\iint\limits_{|w|<\varrho} \left| \frac{\partial(x^{(k_\nu)}, y^{(k_\nu)})}{\partial(u, v)} \right| du\, dv = \iint\limits_{\Delta_\nu} dx\, dy \geqq \iint\limits_{|z|\leqq\frac{1}{2}} dx\, dy = \frac{\pi}{4} \tag{2.35}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots$. Durch Grenzübergang $(\nu \to \infty)$ entsteht

$$\iint\limits_{|w|<\varrho} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv \geqq \frac{\pi}{4}, \tag{2.36}$$

im Widerspruch zu (2.32). Damit ist Hilfssatz 6 in allen Teilen bewiesen.

DEFINITION 3. *$\Gamma_2(M_0, M_1, P)$ ist die Teilmenge aller komplexwertigen Funktionen $z(w)$ aus $\Gamma_1(M_0, M_1)$, für die*

$$z(0) = 0 \tag{2.37}$$

und

$$\iint\limits_{|w|<1} \left(|z_u|^2 + |z_v|^2\right) du\, dv \leqq P < \infty \tag{2.38}$$

ausfällt.

[15]) Man braucht nur

$$a(z) = \begin{cases} h_1(z) & (|z| \leqq 1) \\ h_1(1/\bar{z}) & (|z| > 1) \end{cases}, \quad \ldots, \quad \tilde{d}(z) = \begin{cases} \tilde{h}_4(z) & (|z| \leqq 1) \\ \tilde{h}_4(1/\bar{z}) & (|z| > 1) \end{cases}$$

zu setzen.

Nunmehr können wir das Hauptresultat dieses Paragraphen in folgender Form aussprechen:

SATZ 2 [16]). *Es sei* $0 \leqq r < 1$ *und* $0 < \nu < 1$. *Dann gibt es drei feste positive Zahlen* $\lambda_1 = \lambda_1(M_0, M_1, P, r)$, $\lambda_2 = \lambda_2(M_0, M_1, P, r, \nu)$ *und* $\lambda_3 = \lambda_3(M_0, M_1, P, r)$ *derart, daß für jede Funktion* $z(w) = x(u,v) + i\,y(u,v) \in \Gamma_2(M_0, M_1, P)$ *die Ungleichungen*

$$|z_u| + |z_v| \leqq \lambda_1(M_0, M_1, P, r) \qquad (|w| \leqq r), \tag{2.39}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} |z_u(w_2) - z_u(w_1)| + |z_v(w_2) - z_v(w_1)| \leqq \lambda_2(M_0, M_1, P, r, \nu)\ |w_2 - w_1|^\nu \\ (|w_1| \leqq r,\ |w_2| \leqq r) \end{array} \right. \tag{2.40}$$

und

$$|x_u\, y_v - x_v\, y_u| \geqq \lambda_3(M_0, M_1, P, r) \qquad (|w| \leqq r) \tag{2.41}$$

erfüllt sind [17]).

BEWEIS. Für jede Funktion $z = z(w) \in \Gamma_2(M_0, M_1, P)$ gilt die auf LEBESGUE [17] zurückgehende Abschätzung [18])

$$|z(w_2) - z(w_1)| \leqq 4 \sqrt{\frac{\pi P}{-\log|w_2 - w_1|}} \qquad (|w_2 - w_1| < 1;\ |w_1|, |w_2| \leqq 1). \tag{2.42}$$

Daraus folgt die gleichgradige Stetigkeit der Funktionenmenge $\Gamma_2(M_0, M_1, P)$. Anwendung von Hilfssatz 6 (mit $\Gamma_1^* = \Gamma_2(M_0, M_1, P)$) liefert die Behauptung.

§ 3. Differentialgeometrische Anwendungen (berandete Flächen)

Hauptziel dieses Paragraphen ist die Herleitung neuer a-priori-Abschätzungen für die zweiten Ableitungen des Ortsvektors einer Fläche positiver Gaußscher Krümmung durch ihr Linienelement. Für unsere Untersuchungen benötigen wir einige Grundformeln der Differentialgeometrie, die wir hier zur Bequemlichkeit des Lesers noch einmal anführen [19]). Dabei verwenden wir die in der Vektoralgebra üblichen Bezeichnungen [20]).

Unter einem regulären Flächenstück $\mathfrak{F}$ verstehen wir eine in einem Gebiet Ω der uv-Ebene definierte Vektorfunktion

$$\mathfrak{x}(u,v) = \big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big) \tag{3.1}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(I) $x(u,v)$, $y(u,v)$ und $z(u,v)$ sind reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktionen in Ω.

(II) Für $(u,v) \in \Omega$ ist

$$|\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v| > 0. \tag{3.2}$$

[16]) Dieses Theorem enthält Satz 3 aus [11], sowie Theorem 10 und Theorem 11 aus [12].

[17]) Auf Grund von Hilfssatz 5 und (2.28) sind die Größen λ_1 und λ_2 in Wahrheit von M_1 unabhängig.

[18]) Vgl. z.B. [12], Lemma 16.

[19]) Wegen ausführlicher Beweise sei z.B. auf BLASCHKE [1] verwiesen.

[20]) Vgl. z.B. BLASCHKE [1], § 1–2.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Flächennormale $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}(u, v)$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{N}=\frac{\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_v}{|\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_v|} \tag{3.3}$$

erklärt und stellt eine in Ω einmal stetig differenzierbare Vektorfunktion dar. Auf $\mathfrak{F}$ betrachten wir die beiden quadratischen Differentialformen

$$ds^2=(d\mathfrak{x})^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2 \tag{3.4}$$

(erste Fundamentalform) und

$$-d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{N}=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2 \tag{3.5}$$

(zweite Fundamentalform). Aus (3.2)—(3.5) folgt

$$E=\mathfrak{x}_u^2,\qquad F=\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v,\qquad G=\mathfrak{x}_v^2, \tag{3.6}$$

$$EG-F^2=|\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_v|^2>0 \tag{3.7}$$

und

$$L=\mathfrak{N}\,\mathfrak{x}_{uu},\qquad M=\mathfrak{N}\,\mathfrak{x}_{uv},\qquad N=\mathfrak{N}\mathfrak{x}_{vv}. \tag{3.8}$$

Das Oberflächenelement von $\mathfrak{F}$ ist

$$do=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \tag{3.9}$$

und die mittlere Krümmung H sowie die Gaußsche Krümmung K von $\mathfrak{F}$ sind durch die Ausdrücke

$$H=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)} \tag{3.10}$$

bzw.

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2} \tag{3.11}$$

erklärt

Für die zweiten Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}(u, v)$ und die ersten Ableitungen des Normalenvektors $\mathfrak{N}(u, v)$ hat man die Gauß-Weingartenschen Ableitungsgleichungen:

$$\begin{cases}\mathfrak{x}_{uu}=\left\{\begin{matrix}1&1\\1\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_u+\left\{\begin{matrix}1&1\\2\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_v+L\,\mathfrak{N}\\ \mathfrak{x}_{uv}=\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_u+\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_v+M\,\mathfrak{N}\\ \mathfrak{x}_{vv}=\left\{\begin{matrix}2&2\\1\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_u+\left\{\begin{matrix}2&2\\2\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_v+N\,\mathfrak{N}\end{cases} \tag{3.12}$$

und

$$\begin{cases}\mathfrak{N}_u=\dfrac{FM-GL}{EG-F^2}\,\mathfrak{x}_u+\dfrac{FL-EM}{EG-F^2}\,\mathfrak{x}_v\\ \mathfrak{N}_v=\dfrac{FN-GM}{EG-F^2}\,\mathfrak{x}_u+\dfrac{FM-EN}{EG-F^2}\,\mathfrak{x}_v.\end{cases} \tag{3.13}$$

Dabei sind $\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\}, \ldots, \left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\}$ die Christoffelschen Symbole

$$(3.14)\qquad \begin{cases} \left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\} = \dfrac{G E_u + F E_v - 2 F F_u}{2(EG - F^2)} \\ \left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{2E F_u - E E_v - F E_u}{2(EG - F^2)} \\ \left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\} = \dfrac{G E_v - F G_u}{2(EG - F^2)} \\ \left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{E G_u - F E_v}{2(EG - F^2)} \\ \left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\} = \dfrac{2G F_v - G G_u - F G_v}{2(EG - F^2)} \\ \left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{E G_v - 2 F F_v + F G_u}{2(EG - F^2)}. \end{cases}$$

Wir setzen jetzt voraus, daß der Ortsvektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ der Fläche $\mathfrak{F}$ in Ω dreimal stetig differenzierbar ist. Dann lauten die Integrabilitätsbedingungen für das System (3.12)–(3.13), also die Gauß-Codazzischen Gleichungen, folgendermaßen:

$$(3.15)\qquad \begin{cases} \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = K \\ \qquad = (EG - F^2)^{-2} \begin{cases} \begin{vmatrix} E & F & F_v - \frac{1}{2} G_u \\ F & G & \frac{1}{2} G_v \\ \frac{1}{2} E_u & F_u - \frac{1}{2} E_v & F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv} - \frac{1}{2} G_{uu} \end{vmatrix} - \\ \qquad - \begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2} E_v \\ F & G & \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u & 0 \end{vmatrix} \end{cases} \end{cases}$$

und

$$(3.16)\qquad \begin{cases} L_v - M_u = \left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\} L + \left(\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\}\right) M - \left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\} N \\ M_v - N_u = \left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\} L + \left(\left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}\right) M - \left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\} N. \end{cases}$$

(3.15) ist das Theorema Egregium von GAUSS, welches besagt, daß K durch die Funktionen E, F und G eindeutig bestimmt ist. Auch wenn keine Realisierung des Linienelements ds^2 durch eine reguläre Fläche $\mathfrak{F}$ im dreidimensionalen Raume vorliegt, bezeichnen wir den Ausdruck auf der rechten Seite von (3.15) als Gaußsche Krümmung der Differentialform ds^2.

Es sei nun $\mathfrak{F}$ ein reguläres Flächenstück positiver Gaußscher Krümmung. Wegen $LN - M^2 > 0$ lassen sich dann unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen an Stelle von (u, v) neue Variable (α, β) (isotherm-konjugierte

Parameter) so einführen, daß stets

$$-d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{N}=\lambda(d\alpha^2+d\beta^2)\qquad(\lambda\neq 0) \tag{3.17}$$

ausfällt. Wie DARBOUX zuerst erkannt hat, genügen die Funktionen $u(\alpha,\beta)$ und $v(\alpha,\beta)$ einem eigentümlichen System partieller Differentialgleichungen der Form (13) und (14) mit Koeffizienten $h_1,\ldots,\tilde{h}_4$, die nur von der *ersten* Fundamentalform der Fläche $\mathfrak{F}$ abhängen[21]). Dies ist der Ausgangspunkt unserer weiteren Überlegungen. Für unsere Zwecke ist es erforderlich, die Parameter (α,β) *im Großen* einzuführen, was im nächsten Hilfssatz geschehen soll.

HILFSSATZ 7. *Es sei* $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(u,v)\ \big((u,v)\in\Omega\big)$ *ein reguläres Flächenstück positiver Gaußscher Krümmung* $K(u,v)$. *Außerdem seien die Koeffizienten* $E(u,v)$, $F(u,v)$ *und* $G(u,v)$ *des Linienelementes* ds^2 *von* $\mathfrak{F}$ *für* $(u,v)\in\Omega$ *viermal stetig differenzierbar. Dann gibt es zu jeder in* Ω *enthaltenen Kreisscheibe* $(u-u_0)^2+(v-v_0)^2\leqq\varrho^2$ *ein Paar reeller Funktionen* $u=u(\alpha,\beta)$ *und* $v=v(\alpha,\beta)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(I) $u=u(\alpha,\beta)$ *und* $v=v(\alpha,\beta)$ *sind für* $\alpha^2+\beta^2<1$ *zweimal stetig differenzierbar und bilden die Kreisscheibe* $\alpha^2+\beta^2\leqq 1$ *eineindeutig und stetig auf die Kreisscheibe* $(u-u_0)^2+(v-v_0)^2\leqq\varrho^2$ *ab. Außerdem ist* $u(0,0)=u_0$, $v(0,0)=v_0$ *und*

$$u_\alpha v_\beta-u_\beta v_\alpha\neq 0 \tag{3.18}$$

für $\alpha^2+\beta^2<1$.

(II) $u=u(\alpha,\beta)$ *und* $v=v(\alpha,\beta)$ *genügen für* $\alpha^2+\beta^2<1$ *den partiellen Differentialgleichungen*

$$\begin{cases}\Delta u+\left(\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\1\end{smallmatrix}\right\}+\dfrac{K_u}{2K}\right)(u_\alpha^2+u_\beta^2)+\\ \quad+\left(2\left\{\begin{smallmatrix}1&2\\1\end{smallmatrix}\right\}+\dfrac{K_v}{2K}\right)(u_\alpha v_\alpha+u_\beta v_\beta)+\left\{\begin{smallmatrix}2&2\\1\end{smallmatrix}\right\}(v_\alpha^2+v_\beta^2)=0\end{cases} \tag{3.19}$$

und

$$\begin{cases}\Delta v+\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\2\end{smallmatrix}\right\}(u_\alpha^2+u_\beta^2)+\left(2\left\{\begin{smallmatrix}1&2\\2\end{smallmatrix}\right\}+\dfrac{K_u}{2K}\right)(u_\alpha v_\alpha+u_\beta v_\beta)+\\ \quad+\left(\left\{\begin{smallmatrix}2&2\\2\end{smallmatrix}\right\}+\dfrac{K_v}{2K}\right)(v_\alpha^2+v_\beta^2)=0.\end{cases} \tag{3.20}$$

(III) *Für* $\alpha^2+\beta^2<1$ *gelten die Darstellungen*

$$L=\sqrt{K}\sqrt{E\,G-F^2}\cdot\frac{v_\alpha^2+v_\beta^2}{u_\alpha v_\beta-u_\beta v_\alpha}, \tag{3.21}$$

$$M=-\sqrt{K}\sqrt{E\,G-F^2}\cdot\frac{u_\alpha v_\alpha+u_\beta v_\beta}{u_\alpha v_\beta-u_\beta v_\alpha} \tag{3.22}$$

und

$$N=\sqrt{K}\sqrt{E\,G-F^2}\cdot\frac{u_\alpha^2+u_\beta^2}{u_\alpha v_\beta-u_\beta v_\alpha}. \tag{3.23}$$

[21]) Siehe [6], § 725. Diese fundamentale Tatsache wurde bereits von H. LEWY bei der Lösung des Weylschen Problems für den Fall einer analytischen Metrik benutzt (s. [21], insbes. S. 106).

BEWEIS. Nach einem Theorem von L. NIRENBERG ([23], S. 349) ist der Ortsvektor $\mathfrak{x}(u, v)$ von $\mathfrak{F}$ dreimal stetig differenzierbar, und die dritten Ableitungen von $\mathfrak{x}(u, v)$ genügen in jedem endlichen, abgeschlossenen Teilbereich $\tilde{\Omega}$ von Ω einer Hölder-Bedingung. Somit sind auch die zweiten Fundamentalgrößen L, M und N von $\mathfrak{F}$ in Ω stetig differenzierbar und besitzen in $\tilde{\Omega}$ hölderstetige erste Ableitungen. Daraus, sowie aus $LN - M^2 > 0$, folgt die Existenz zweier reeller Funktionen $u = u(\alpha, \beta)$ und $v = v(\alpha, \beta)$, die

1. die Eigenschaften (I) besitzen,

2. für $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ den partiellen Differentialgleichungen

$$\Delta u = \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{N}{\sqrt{LN - M^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{M}{\sqrt{LN - M^2}}\right)\right](u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha) \tag{3.24}$$

und

$$\Delta v = \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L}{\sqrt{LN - M^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M}{\sqrt{LN - M^2}}\right)\right](u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha) \tag{3.25}$$

genügen und

3. die Gleichungen

$$\frac{L}{\sqrt{LN - M^2}} = \frac{v_\alpha^2 + v_\beta^2}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha}, \tag{3.26}$$

$$\frac{M}{\sqrt{LN - M^2}} = -\frac{u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha} \tag{3.27}$$

und

$$\frac{N}{\sqrt{LN - M^2}} = \frac{u_\alpha^2 + u_\beta^2}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha} \tag{3.28}$$

erfüllen[22]). Wendet man jetzt die Gauß-Codazzischen Gln. (3.15)–(3.16) an, so erhält man aus (3.24)–(3.28) die Behauptungen (II) und (III) unseres Hilfssatzes[23]). Damit ist Hilfssatz 7 vollständig bewiesen.

Unser nächstes Ziel besteht darin, das Dirichletsche Integral

$$\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2<1} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2 + u_\beta^2 + v_\beta^2)\, d\alpha\, d\beta$$

nach oben abzuschätzen. Es gilt der folgende

HILFSSATZ 8. *Es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz 7 erfüllt. Außerdem sei*

$$|E|,\ |F|,\ |G| \leqq \eta^+ < \infty, \tag{3.29}$$

$$EG - F^2 \geqq \eta^- > 0 \tag{3.30}$$

und

$$K \geqq \varkappa > 0 \tag{3.31}$$

[22]) Siehe [13], Lemma 2.

[23]) Zu diesem letzten Schritt des Beweises vgl. [13], S. 39–42.

für $(u, v) \in \Omega$. *Dann gilt für die in Hilfssatz 7 erklärten Abbildungsfunktionen* $u = u(\alpha, \beta)$ *und* $v = v(\alpha, \beta)$ *die Ungleichung*

$$\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2<1} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2 + u_\beta^2 + v_\beta^2)\, d\alpha\, d\beta \leqq \frac{4\eta^+}{\eta^- \sqrt{\varkappa}} \cdot \iint\limits_{\mathfrak{F}} |H|\, do. \tag{3.32}$$

Beweis. Zunächst entnimmt man aus (3.10) und aus den Darstellungen (3.21)–(3.23) für die mittlere Krümmung H von $\mathfrak{F}$ den Ausdruck

$$H = \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{E(u_\alpha^2 + u_\beta^2) + 2F(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + G(v_\alpha^2 + v_\beta^2)}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha}. \tag{3.33}$$

Es sei nun R eine beliebige positive Zahl mit $R < 1$, und $\mathfrak{G}$ sei das bei der Abbildung $(\alpha, \beta) \to (u, v)$ entstehende Bildgebiet der Kreisscheibe $\alpha^2 + \beta^2 < R^2$. Dann erhält man aus (3.33) die Gleichung

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}} |H|\, do = \tfrac{1}{2} \iint\limits_{\alpha^2+\beta^2<R^2} \sqrt{K}\,[E(u_\alpha^2 + u_\beta^2) + 2F(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + G(v_\alpha^2 + v_\beta^2)]\, d\alpha\, d\beta. \tag{3.34}$$

Ferner gilt wegen (3.29)–(3.31) für $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ die Abschätzung

$$\begin{cases} \sqrt{K}\,[E(u_\alpha^2 + u_\beta^2) + 2F(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + G(v_\alpha^2 + v_\beta^2)] \\ \qquad \geqq \dfrac{\eta^- \sqrt{\varkappa}}{2\eta^+} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2 + u_\beta^2 + v_\beta^2). \end{cases} \tag{3.35}$$

Trägt man diese in (3.34) ein, so entsteht

$$\begin{cases} \displaystyle\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2<R^2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2 + u_\beta^2 + v_\beta^2)\, d\alpha\, d\beta \\ \displaystyle \leqq \frac{4\eta^+}{\eta^- \sqrt{\varkappa}} \iint\limits_{\mathfrak{G}} |H|\, do \leqq \frac{4\eta^+}{\eta^- \sqrt{\varkappa}} \iint\limits_{\Omega} |H|\, do = \frac{4\eta^+}{\eta^- \sqrt{\varkappa}} \iint\limits_{\mathfrak{F}} |H|\, do. \end{cases} \tag{3.36}$$

Durch Grenzübergang ($R \to 1$) ergibt sich schließlich (3.32), womit unser Hilfssatz bewiesen ist.

Aus den letzten beiden Hilfssätzen und den Resultaten von § 2 erhält man die gesuchten a-priori-Abschätzungen für die zweiten Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ einer Fläche durch ihre erste Fundamentalform. Dabei ziehen wir beliebige reguläre Flächenstücke $\mathfrak{F}$ in Betracht, deren Gaußsche Krümmung positiv ist und für die $\iint\limits_{\mathfrak{F}} |H|\, do < \infty$ ausfällt. Unser Resultat läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Satz 3. Voraussetzungen:

(I) $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ $((u, v) \in \Omega)$ *ist der Ortsvektor eines regulären Flächenstückes* $\mathfrak{F}$ *mit dem Linienelement*

$$ds^2 = (d\mathfrak{x})^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2. \tag{3.37}$$

Dabei sind die Funktionen $E(u, v)$, $F(u, v)$ und $G(u, v)$ in Ω viermal stetig differenzierbar und genügen dort den Ungleichungen

$$|E|,\ |F|,\ |G| \leqq a, \tag{3.38}$$

$$|E_u|,\ \ldots,\ |G_v| \leqq a, \tag{3.39}$$

$$|E_{uu}|,\ \ldots,\ |G_{vv}| \leqq a, \tag{3.40}$$

$$|E_{uuu}|,\ \ldots,\ |G_{vvv}| \leqq a \tag{3.41}$$

und

$$EG - F^2 \geqq a^{-1} \tag{3.42}$$

mit einer festen positiven Konstanten a.

(II) *Für die Gaußsche Krümmung $K(u, v)$ von ds^2 gilt die Ungleichung*

$$K(u, v) \geqq b > 0 \qquad \big((u, v) \in \Omega\big). \tag{3.43}$$

(III) *Es ist*

$$\iint\limits_{\mathfrak{F}} |H|\, do \leqq c < \infty, \tag{3.44}$$

wobei H die mittlere Krümmung von $\mathfrak{F}$ bedeutet.

BEHAUPTUNG. *Für $\varrho > 0$ und $0 < \nu < 1$ gelten Abschätzungen der Form*

$$|\mathfrak{x}_{uu}|,\ \ldots,\ |\mathfrak{x}_{vv}| \leqq \tau_0(a, b, c, \varrho) < \infty \qquad \big((u, v) \in \Omega_\varrho\big) \tag{3.45}$$

und

$$\left\{\begin{array}{c} |\mathfrak{x}_{uu}(u_2, v_2) - \mathfrak{x}_{uu}(u_1, v_1)| \\ \vdots \\ |\mathfrak{x}_{vv}(u_2, v_2) - \mathfrak{x}_{vv}(u_1, v_1)| \end{array}\right\} \leqq \tau_1 \cdot \Big(\sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}\Big)^\nu \tag{3.46}$$

$$\big((u_1, v_1) \in \Omega_\varrho,\ (u_2, v_2) \in \Omega_\varrho\big)$$

mit $\tau_1 = \tau_1(a, b, c, \varrho, \nu) < \infty$.

BEWEIS. Es sei (u_0, v_0) ein beliebiger Punkt in Ω_ϱ, und es sei $(\alpha, \beta) \to (u, v)$ die in Hilfssatz 7 erklärte Abbildung. Die Funktionen

$$\xi(\alpha, \beta) = \frac{u(\alpha, \beta) - u_0}{\varrho} \tag{3.47}$$

und

$$\eta(\alpha, \beta) = \frac{v(\alpha, \beta) - v_0}{\varrho} \tag{3.48}$$

führen dann die Kreisscheibe $\alpha^2 + \beta^2 \leqq 1$ eineindeutig und stetig in die Kreisscheibe $\xi^2 + \eta^2 \leqq 1$ über, und es gilt $\xi(0, 0) = \eta(0, 0) = 0$ sowie $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\alpha, \beta)} \neq 0$ $(\alpha^2 + \beta^2 < 1)$. Außerdem gelten auf Grund von (3.19) und (3.20) die Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\xi = h_1(\xi, \eta)\,(\xi_\alpha^2 + \xi_\beta^2) + h_2(\xi, \eta)\,(\xi_\alpha \eta_\alpha + \xi_\beta \eta_\beta) + \\ \qquad + h_3(\xi, \eta)\,(\eta_\alpha^2 + \eta_\beta^2) + h_4(\xi, \eta)\,(\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha) \end{array}\right. \tag{3.49}$$

und

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\eta = \tilde{h}_1(\xi, \eta)\,(\xi_\alpha^2 + \xi_\beta^2) + \tilde{h}_2(\xi, \eta)\,(\xi_\alpha \eta_\alpha + \xi_\beta \eta_\beta) + \\ \qquad + \tilde{h}_3(\xi, \eta)\,(\eta_\alpha^2 + \eta_\beta^2) + \tilde{h}_4(\xi, \eta)\,(\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha) \end{array}\right. \tag{3.50}$$

mit

$$(3.51)\qquad \begin{cases} h_1(\xi,\eta) = -\varrho\left(\left\{\begin{matrix}1&1\\1\end{matrix}\right\} + \dfrac{K_u}{2K}\right) \\ h_2(\xi,\eta) = -\varrho\left(2\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\} + \dfrac{K_v}{2K}\right) \\ h_3(\xi,\eta) = -\varrho\left\{\begin{matrix}2&2\\1\end{matrix}\right\} \\ h_4(\xi,\eta) = 0 \end{cases}$$

und

$$(3.52)\qquad \begin{cases} \tilde{h}_1(\xi,\eta) = -\varrho\left\{\begin{matrix}1&1\\2\end{matrix}\right\} \\ \tilde{h}_2(\xi,\eta) = -\varrho\left(2\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\} + \dfrac{K_u}{2K}\right) \\ \tilde{h}_3(\xi,\eta) = -\varrho\left(\left\{\begin{matrix}2&2\\2\end{matrix}\right\} + \dfrac{K_v}{2K}\right) \\ \tilde{h}_4(\xi,\eta) = 0. \end{cases}$$

Aus (3.51) und (3.52) folgt

$$(3.53)\qquad \begin{cases} \omega_1(\xi,\eta) = \tilde{h}_1(\xi,\eta) = -\varrho\left\{\begin{matrix}1&1\\2\end{matrix}\right\} \\ \omega_2(\xi,\eta) = h_1(\xi,\eta) - \tilde{h}_2(\xi,\eta) = \varrho\left(2\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}1&1\\1\end{matrix}\right\}\right) \\ \omega_3(\xi,\eta) = h_2(\xi,\eta) - \tilde{h}_3(\xi,\eta) = \varrho\left(\left\{\begin{matrix}2&2\\2\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}\right) \\ \omega_4(\xi,\eta) = h_3(\xi,\eta) = -\varrho\left\{\begin{matrix}2&2\\1\end{matrix}\right\}\ ^{24}). \end{cases}$$

Berücksichtigt man die Gln. (3.14)—(3.15) und macht von den Abschätzungen (3.38)—(3.43) Gebrauch, so erhält man aus (3.51)—(3.53) für $\xi^2+\eta^2 \leqq 1$ die Ungleichungen

$$(3.54)\qquad \sum_{\nu=1}^{4}\left(|h_\nu(\xi,\eta)| + |\tilde{h}_\nu(\xi,\eta)|\right) < M_0 = M_0(a,b,\varrho) < \infty$$

und

$$(3.55)\qquad \sum_{\nu=1}^{4}\left(\left|\frac{\partial\omega_\nu}{\partial\xi}\right| + \left|\frac{\partial\omega_\nu}{\partial\eta}\right|\right) < M_1 = M_1(a,\varrho) < \infty.$$

Ferner hat man wegen Hilfssatz 8 die Abschätzung

$$(3.56)\qquad \begin{cases} \displaystyle\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2<1} (\xi_\alpha^2+\eta_\alpha^2+\xi_\beta^2+\eta_\beta^2)\,d\alpha\,d\beta \\ \quad = \dfrac{1}{\varrho^2}\displaystyle\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2<1} (u_\alpha^2+v_\alpha^2+u_\beta^2+v_\beta^2)\,d\alpha\,d\beta \\ \quad \leqq \dfrac{4a^2}{\varrho^2\sqrt{b}}\displaystyle\iint\limits_{\mathfrak{F}} |H|\,do \leqq \dfrac{4a^2c}{\varrho^2\sqrt{b}} = P = P(a,b,c,\varrho) < \infty. \end{cases}$$

[24]) In den Ausdrücken auf den rechten Seiten von (3.51)—(3.53) sind die Größen u, v durch die Variablen ξ, η mit Hilfe der Substitution $u = u_0 + \varrho\xi$, $v = v_0 + \varrho\eta$ auszudrücken.

Hieraus schließt man, daß die Funktion

$$\zeta(\gamma) = \xi(\alpha, \beta) + i\,\eta(\alpha, \beta) \qquad (\gamma = \alpha + i\beta) \tag{3.57}$$

zur Klasse $\Gamma_2(M_0, M_1, P)$ gehört (vgl. Definition 3). Ferner gelten wegen (3.21)—(3.23) für $|\gamma| < 1$ die Darstellungen

$$L = \sqrt{K}\,\sqrt{E\,G - F^2} \cdot \frac{\eta_\alpha^2 + \eta_\beta^2}{\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha}, \tag{3.58}$$

$$M = -\sqrt{K}\,\sqrt{E\,G - F^2} \cdot \frac{\xi_\alpha \eta_\alpha + \xi_\beta \eta_\beta}{\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha} \tag{3.59}$$

und

$$N = \sqrt{K} \cdot \sqrt{E\,G F^2 -} \cdot \frac{\xi_\alpha^2 + \xi_\beta^2}{\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha}, \tag{3.60}$$

und aus (3.38)—(3.42) entnimmt man eine Ungleichung der Form

$$K(u, v) \leqq k(a) < \infty \qquad \big((u, v) \in \Omega\big). \tag{3.61}$$

Setzt man $\gamma = 0$ und wendet Satz 2 auf die Abbildung $\gamma \to \zeta(\gamma)$ an, so erhält man aus (3.58)—(3.60) für $(u, v) \in \Omega_\varrho$ die Abschätzungen

$$|L|, \ldots, |N| \leqq \tau_0'(a, b, c, \varrho) \tag{3.62}$$

mit

$$\tau_0'(a, b, c, \varrho) = \sqrt{k(a)} \cdot a \cdot \frac{\lambda_1(M_0, M_1, P, 0)^2}{\lambda_3(M_0, M_1, P, 0)} < \infty. \tag{3.63}$$

Jetzt sei (u_1, v_1) ein beliebiger Punkt in Ω_ϱ mit $(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 \leqq \frac{\varrho^2}{4}$, und es sei $\gamma_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ derjenige Punkt der Kreisscheibe $|\gamma| \leqq 1$, der durch die Abbildung $(\alpha, \beta) \to (u, v)$ in den Punkt (u_1, v_1) übergeführt wird. Wendet man Satz 2 an und berücksichtigt die Tatsache, daß die Funktionenmenge $\Gamma_2(M_0, M_1, P)$ für $|\gamma| \leqq 1$ gleichgradig stetig ist, so erhält man Ungleichungen der Form

$$|\gamma_1| \leqq R^+(a, b, c, \varrho) < 1 \tag{3.64}$$

und

$$|\gamma_1| \leqq R^-(a, b, c, \varrho) \cdot \sqrt{(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2} \tag{3.65}$$

mit

$$R^-(a, b, c, \varrho) < \infty. \tag{3.66}$$

Aus den Darstellungen (3.58)—(3.60) sowie den Abschätzungen (3.38)—(3.42) und (3.64)—(3.66) ergeben sich dann durch abermalige Anwendung von Satz 2 die Ungleichungen

$$\left\{ \begin{array}{c} |L(u_1, v_1) - L(u_0, v_0)| \\ \vdots \\ |N(u_1, v_1) - N(u_0, v_0)| \end{array} \right\} \leqq \tau_1' \cdot \left(\sqrt{(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2}\right)^\nu \tag{3.67}$$

mit

$$0 < \nu < 1$$

und

$$\tau_1' = \tau_1'(a, b, c, \varrho, \nu) < \infty. \tag{3.68}$$

Wendet man jetzt die Gaußschen Ableitungsgleichungen (3.12) an, so erhält man aus (3.62) und (3.67) die gesuchten Abschätzungen (3.45) und (3.46), womit Satz 3 vollständig bewiesen ist.

§ 4. Differentialgeometrische Anwendungen (geschlossene Flächen)

In diesem Paragraphen lösen wir das Weylsche Einbettungsproblem für den Fall einer dreimal stetig differenzierbaren Metrik ds^2 (Satz 4). Wir beginnen zunächst mit einigen allgemeinen Bemerkungen über geschlossene Flächen[25]).

Es sei Σ eine kompakte, zweidimensionale, analytische Mannigfaltigkeit. Dann verstehen wir unter einer regulären geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ eine reelle, auf Σ erklärte Vektorfunktion $\mathfrak{x}=(x, y, z)$, die in den lokalen Koordinaten (u, v) von Σ zweimal stetig differenzierbar ist und außerdem der Bedingung $|\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v| > 0$ genügt. Im folgenden setzen wir stets Σ als orientierbar voraus. Dann sind der Normalenvektor $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{F}$ und folglich auch die Krümmungsgrößen K und H eindeutig durch die Gln. (3.3) bzw. (3.10)—(3.11) definiert.

Für unsere späteren Überlegungen benötigen wir eine auf Minkowski zurückgehende Integralformel, die wir zur Bequemlichkeit des Lesers hier noch einmal beweisen.

Hilfssatz 9. *Für jede reguläre, geschlossene, orientierbare Fläche $\mathfrak{F}$ gilt die Gleichung*

$$\iint_{\mathfrak{F}} H\, do = -\iint_{\mathfrak{F}} (\mathfrak{x}\,\mathfrak{N})\, K\, do. \tag{4.1}$$

Beweis[26]). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß der Ortsvektor $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{F}$ auf Σ dreimal stetig differenzierbar ist. Dann stellt

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}\, d\mathfrak{N}) = (\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{N}_u)\, du + (\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{N}_v)\, dv \tag{4.2}$$

ein invariantes Differential auf Σ dar, und es gilt die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{N}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{N}_u) = 2(\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}_u\,\mathfrak{N}_v) - \{(\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{N}_v\,\mathfrak{N}) - (\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{N}_u\,\mathfrak{N})\}. \tag{4.3}$$

Durch Anwendung der Weingartenschen Ableitungsgleichungen folgt

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{N}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{N}_u) = 2\{K(\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}) + H\}\,|\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v|. \tag{4.4}$$

Integriert man (4.4) über Σ, so erhält man die gesuchte Integralformel (4.1), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Von nun an setzen wir stets voraus, daß Σ der Einheitskugel $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ homöomorph ist und daß die Gaußsche Krümmung K von $\mathfrak{F}$ überall positiv ausfällt. Dann gilt bekanntlich die Gleichung

$$\iint_{\Sigma} K\, do = 4\pi, \tag{4.5}$$

[25]) Vgl. dazu H. Hopf [15], Kap. II.

[26]) Vgl. dazu Herglotz [14].

und nach einem Theorem von HADAMARD [9][27]) ist $\mathfrak{F}$ eine Eifläche, d.h. K ist positiv, und $\mathfrak{F}$ ist Rand eines konvexen Körpers. Unser nächstes Ziel besteht darin, den Ortsvektor $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{F}$ durch das Linienelement ds^2 abzuschätzen. Zu diesem Zweck überdecken wir Σ durch ein zulässiges System von Parameterumgebungen Σ_k $(k=1, \ldots, N)$, die jeweils den Kreisscheiben

$$\Omega_k = \{|w_k| < 1\} \qquad (w_k = u_k + i\, v_k)$$

homöomorph sind. In jedem Parametergebiet Ω_k erscheint dann der Ortsvektor $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{F}$ als eine gewöhnliche Vektorfunktion $\mathfrak{x}_k(w_k) = \mathfrak{x}_k(u_k, v_k)$, und für zwei Variable $w_k \in \Omega_k$ und $w_l \in \Omega_l$, die denselben Punkt auf Σ repräsentieren, gelten die Gleichungen

$$\mathfrak{x}_k(u_k, v_k) = \mathfrak{x}_l(u_l, v_l) \tag{4.6}$$

und

$$\begin{cases} ds^2 = (d\mathfrak{x}_k)^2 = E_k(u_k, v_k)\, du_k^2 + 2F_k(u_k, v_k)\, du_k\, dv_k + G_k(u_k, v_k)\, dv_k^2 \\ \quad = (d\mathfrak{x}_l)^2 = E_l(u_l, v_l)\, du_l^2 + 2F_l(u_l, v_l)\, du_l\, dv_l + G_l(u_l, v_l)\, dv_l^2. \end{cases} \tag{4.7}$$

Um unsere Resultate übersichtlich zu formulieren, bedienen wir uns der in der Funktionalanalysis üblichen Bezeichnungen. Wir sagen, der Vektor $\mathfrak{x}$ bzw. die Metrik ds^2 sei auf Σ p-mal stetig differenzierbar, wenn die Funktionen $\mathfrak{x}_k(u, v)$ $(k=1, \ldots, N)$ bzw. die Koeffizienten $E_k(u, v), \ldots, G_k(u, v)$ $(k=1, \ldots, N)$ für $|w|<1$ p-mal stetig differenzierbar sind. In diesem Fall erklären wir die Normen $\|\mathfrak{x}\|_p$, $\|\mathfrak{x}\|_{p+\nu}$ $(0<\nu<1)$ und $\|ds^2\|_p$ durch die Gleichungen

$$\|\mathfrak{x}\|_p = \sum_{k=1}^{N} \sum_{m+n \le p} \text{Obere Grenze}_{|w|<1} \left| \frac{\partial^{m+n} \mathfrak{x}_k}{\partial u^m\, \partial v^n} \right|, \tag{4.8}$$

$$\|\mathfrak{x}\|_{p+\nu} = \|\mathfrak{x}\|_p + \sum_{k=1}^{N} \sum_{m+n=p} \text{Obere Grenze}_{\substack{|w'|,\,|w''|<1 \\ w' \neq w''}} \frac{\left| \frac{\partial^p \mathfrak{x}_k}{\partial u^m\, \partial v^n}(w'') - \frac{\partial^p \mathfrak{x}_k}{\partial u^m\, \partial v^n}(w') \right|}{|w'' - w'|^\nu} \tag{4.9}$$

und

$$\|ds^2\|_p = \sum_{k=1}^{N} \sum_{m+n \le p} \text{Obere Grenze}_{|w|<1} \left(\left| \frac{\partial^{m+n} E_k}{\partial u^m\, \partial v^n} \right| + \cdots + \left| \frac{\partial^{m+n} G_k}{\partial u^m\, \partial v^n} \right| \right). \tag{4.10}$$

Mit diesen so erklärten Normen bilden die auf Σ definierten Vektoren $\mathfrak{x}$ und Metriken ds^2 Banachsche Räume. Nunmehr können wir unsere a-priori-Abschätzungen folgendermaßen formulieren:

HILFSSATZ 10. *Es sei $\mathfrak{F}$ eine reguläre Eifläche mit einer viermal stetig differenzierbaren Metrik $ds^2 = (d\mathfrak{x})^2$. Außerdem gelten die Abschätzungen*

$$\|ds^2\|_3 \le \alpha, \tag{4.11}$$

$$E_k G_k - F_k^2 \ge \alpha^{-1} \qquad (k = 1, \ldots, N) \tag{4.12}$$

und

$$K \ge \alpha^{-1} \tag{4.13}$$

[27]) Weitere Beweise bei HOPF [15], Kap. IV.

mit einer festen positiven Zahl α. Dann gibt es einen konstanten Vektor $\mathfrak{y}$ derart, daß für $0<\nu<1$ die Ungleichung

$$\|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}\|_{2+\nu}\leqq \Phi(\alpha,\nu)<\infty \tag{4.14}$$

erfüllt ist.

Beweis. Zunächst folgt aus (4.11) die Existenz eines konstanten Vektors $\mathfrak{y}$ mit

$$\|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}\|_1\leqq c_0(\alpha)<\infty. \tag{4.15}$$

Ferner läßt sich eine positive Zahl $R<1$ so bestimmen, daß die Parameterumgebungen Σ_k' $(k=1,\ldots,N)$, die den Kreisscheiben $\Omega_k'=\{|w_k|<R\}$ $(k=1,\ldots,N)$ entsprechen, Σ vollständig überdecken. Die Behauptung (4.14) ist bewiesen, wenn es gelingt, Abschätzungen der Form

$$|D^2\mathfrak{x}_k(w)|\leqq \varphi_0(\alpha)<\infty \qquad (k=1,\ldots,N;\ |w|<R) \tag{4.16}$$

und

$$\begin{cases} |D^2\mathfrak{x}_k(w'')-D^2\mathfrak{x}_k(w')|\leqq \varphi_1(\alpha,\nu)\,|w''-w'|^\nu \\ (k=1,\ldots,N;\ |w'|,|w''|<R;\ 0<\nu<1) \end{cases} \tag{4.17}$$

mit $\varphi_1(\alpha,\nu)<\infty$ herzuleiten. Dabei bedeutet $D^2\mathfrak{x}_k$ die Gesamtheit aller partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $\mathfrak{x}_k$. Es seien $\mathfrak{E}_k$ $(k=1,\ldots,N)$ die den Parameterumgebungen Σ_k entsprechenden Flächenstücke auf $\mathfrak{E}$. Wegen Hilfssatz 9 ist dann

$$\begin{cases} \iint\limits_{\mathfrak{E}_k}|H|\,do\leqq\iint\limits_{\mathfrak{E}}|H|\,do=\left|\iint\limits_{\mathfrak{E}}H\,do\right|=\left|\iint\limits_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{x}-\mathfrak{y},\mathfrak{N})\,K\,do\right| \\ \qquad\leqq\iint\limits_{\mathfrak{E}}|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|\,K\,do\leqq\operatorname*{Max}_{\Sigma}|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|\cdot\iint\limits_{\Sigma}K\,do. \end{cases} \tag{4.18}$$

Daraus, sowie aus (4.5) und (4.15), folgt

$$\iint\limits_{\mathfrak{E}_k}|H|\,do\leqq 4\pi\,c_0(\alpha)<\infty \qquad (k=1,\ldots,N). \tag{4.19}$$

Wendet man jetzt auf die Vektorfunktionen $\mathfrak{x}_k(u,v)$ $(k=1,\ldots,N)$ Satz 3 mit $a=\alpha$, $b=\alpha^{-1}$, $c=4\pi c_0(\alpha)$ und $\varrho=1-R$ an, so erhält man die gesuchten Abschätzungen (4.16) und (4.17), womit unser Hilfssatz vollständig bewiesen ist.

Wir sind jetzt in der Lage, das Hauptziel dieses Paragraphen zu beweisen, nämlich

Satz 4. *Es sei ds^2 ein auf der Einheitskugel Σ vorgegebenes, dreimal stetig differenzierbares Linienelement, welches überall positiv-definit ist und positive Gaußsche Krümmung besitzt. Dann gibt es eine reguläre Eifläche $\mathfrak{E}$ mit $(d\mathfrak{x})^2=ds^2$. Außerdem ist $\|\mathfrak{x}\|_{2+\nu}<\infty$ für $0<\nu<1$.*

Beweis. Da ds^2 auf Σ dreimal stetig differenzierbar ist, so gibt es eine Folge analytischer Metriken ds_n^2 [28]) mit

$$\|ds_n^2-ds^2\|_3\to 0 \qquad (n\to\infty). \tag{4.20}$$

[28]) D. h. Metriken ds_n^2 mit Koeffizienten $E_k^{(n)}(u,v)$, $F_k^{(n)}(u,v)$ und $G_k^{(n)}(u,v)$ $(k=1,\ldots,N)$, die für $u^2+v^2<1$ analytisch sind.

Dann lassen sich zwei positive Zahlen n_0 und α so bestimmen, daß für $n \geqq n_0$ die Ungleichungen

$$\|d s_n^2\|_3 \leqq \alpha, \tag{4.21}$$

$$E_k^{(n)} G_k^{(n)} - F_k^{(n)2} \geqq \alpha^{-1} \qquad (k = 1, \ldots, N) \tag{4.22}$$

und

$$K^{(n)} \geqq \alpha^{-1} \tag{4.23}$$

erfüllt sind[29]). Nach dem Theorem von WEYL-LEWY[30]) existiert dann eine Folge regulärer Eiflächen $\{\mathfrak{F}_n\}$ mit

$$(d\mathfrak{x}^{(n)})^2 = d s_n^2. \tag{4.24}$$

Wendet man jetzt Hilfssatz 10 an, so entnimmt man aus (4.21)—(4.24) die Existenz einer Folge konstanter Vektoren $\{\mathfrak{y}^{(n)}\}$, so daß für $n \geqq n_0$ und $0 < \nu < 1$ die Ungleichung

$$\|\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{y}^{(n)}\|_{2+\nu} \leqq \Phi(\alpha, \nu) < \infty \tag{4.25}$$

erfüllt ist. Man setze $\mathfrak{z}^{(n)} = \mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{y}^{(n)}$. Dann wird

$$(d\mathfrak{z}^{(n)})^2 = d s_n^2 \tag{4.26}$$

und

$$\|\mathfrak{z}^{(n)}\|_{2+\nu} < \Phi(\alpha, \nu). \tag{4.27}$$

Wegen (4.27) gibt es eine Teilfolge $\{n_j\}$ der natürlichen Zahlen und eine auf Σ zweimal stetig differenzierbare Vektorfunktion $\mathfrak{z}$ mit

$$\|\mathfrak{z}^{(n_j)} - \mathfrak{z}\|_2 \to 0 \qquad (j \to \infty). \tag{4.28}$$

Daraus, sowie aus (4.27), folgt

$$\|\mathfrak{z}\|_{2+\nu} \leqq \Phi(\alpha, \nu) < \infty \tag{4.29}$$

für $0 < \nu < 1$. Setzt man nun $n = n_j$ in (4.26) und geht zur Grenze $(j \to \infty)$ über, so entsteht

$$(d\mathfrak{z})^2 = d s^2, \tag{4.30}$$

womit Satz 4 vollständig bewiesen ist.

Literatur

[1] BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, I. Berlin: Springer 1930. — [2] BUSEMANN, H.: Convex Surfaces. New York: Interscience Publishers 1958. — [3] CARATHÉODORY, C.: Conformal Representation. Cambridge 1952. — [4] CARLEMAN, T.: Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre a deux variables. Comptes Rendus Paris **197**, 471—474 (1933). — [5] CHERN, S. S.: Some new characterizations of the Euclidean sphere. Duke Math. J. **12**, 279—290 (1945). — [6] DARBOUX, G.: Théorie générale des surfaces, III. Paris 1894. — [7] EFIMOV, N. W.: Flächenverbiegung

[29]) $K^{(n)}$ ist die Gaußsche Krümmung von $d s_n^2$.

[30]) Siehe S. 129 dieser Arbeit.

im Großen (mit einem Nachtrag von E. REMBS und K. P. GROTEMEYER). Berlin: Akademie-Verlag 1957. — [8] FENCHEL, W.: Elementare Beweise und Anwendungen einiger Fixpunktsätze. Mat. Tidsskr. (B) 66–87 (1932.) — [9] HADAMARD, J.: Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique. J. de Math. pures et appl. **3**, 331–387 (1897). — [10] HARTMAN, P., and A. WINTNER: On the local behavior of solutions of nonparabolic partial differential equations. Amer. J. Math. **75**, 449–476 (1953). — [11] HEINZ, E.: Über gewisse elliptische Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendung auf die Monge-Ampèresche Gleichung. Math. Annalen **131**, 411–428 (1956). — [12] HEINZ, E.: On certain nonlinear elliptic differential equations and univalent mappings. J. d'Analyse Math. **5**, 197–271 (1956/57). — [13] HEINZ, E.: On elliptic Monge-Ampère equations and WEYL's embedding problem. J. d'Analyse Math. **7**, 1–52 (1959). — [14] HERGLOTZ, G.: Über die Starrheit der Eiflächen. Abhandlungen math. Sem. Univ. Hamburg **15**, 127–129 (1943). — [15] HOPF, H.: Lectures on Differential Geometry in the Large. Applied Math. and Stat. Laboratory, Stanford University, Stanford, California 1956. — [16] KAMKE, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930. — [17] LEBESGUE, H.: Sur le problème de DIRICHLET. Rend. del Circ. Mat. di Palermo **24**, 371–402 (1907). — [18] LEWY, H.: A priori limitations for solutions of Monge-Ampère equations. I. Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 417–434 (1935). — [19] LEWY, H.: A priori limitations for solutions of Monge-Ampère equations. II. Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 365–374 (1937). — [20] LEWY, H.: On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 689–692 (1936). — [21] LEWY, H.: On the existence of a closed surface realizing a given Riemannian metric. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **24**, Nr. 2, 104–106 (1938). — [22] NIRENBERG, L.: On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity. Comm. Pure and Appl. Math. **6**, 103–156 (1953). — [23] NIRENBERG, L.: The Weyl and Minkowski Problems in Differential Geometry in the Large. Comm. Pure and Appl. Math. **6**, 337–394 (1953). — [24] POGORELOW, A. W.: Die Verbiegung konvexer Flächen. Berlin: Akademie-Verlag 1957. — [25] WEYL, H.: Über die Bestimmung einer geschlossenen Fläche durch ihr Linienelement. Vierteljahrsschr. naturforsch. Ges. Zürich **61**, 40–72 (1916), wiederabgedruckt in Selecta HERMANN WEYL, Basel u. Stuttgart, 148–178 (1956). — [26] WINTNER, A.: On WEYL's imbedding problem. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **42**, Nr. 3, 157–160 (1956). — [27] WINTNER, A.: On WEYL's identity in the differential geometry of surfaces. Ann. di Mat. Pura ed Appl. Ser. IV, **41**, 257–268 (1956).

Dept. of Math., Stanford University, Stanford, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 29. Dezember 1959)

COLLATZ, L.
Math. Zeitschr. 74, 158–166 (1960)

Monotone Operatoren bei Anfangswertaufgaben von Differentialgleichungen

Herrn ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

LOTHAR COLLATZ

In der praktischen Analysis benutzt man zur angenäherten Lösung einer in einem Banachschen Raum gegebenen Gleichung $u = Tu$ häufig Iterationsverfahren, bei denen man, ausgehend von einem Element $u_{(0)}$ oder von zwei Elementen $u_{(0)}, u_{\langle 0\rangle}$ weitere Elemente nach

$$(1) \qquad u_{(n+1)} = Tu_{(n)}, \quad u_{\langle n+1\rangle} = Tu_{\langle n\rangle} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

bestimmt. Im Reellen beobachtet man dabei oft die Erscheinungen monotonen oder alternierenden Verhaltens der Näherungsfolgen, vgl. [1], [3], [8], [9]. In diesen Fällen hat man dann sofort eine exakte Einschließungsaussage für die gesuchte Lösung. Es mag daher berechtigt erscheinen, nach möglichst allgemeinen Problemklassen zu fragen, bei welchen ein solch einfacher Einschließungssatz gilt. In [3] wurden die Sätze auf Randwertaufgaben angewandt, daher sollen hier hauptsächlich Anfangswertaufgaben betrachtet werden.

Es sei erwähnt, daß sich mit etwas mehr Rechenaufwand Einschließungsaussagen auch in dem Falle gewinnen lassen, daß der Operator T die Summe oder Differenz zweier monotoner Operatoren ist (J. SCHRÖDER [11]).

1. Monotone Operatoren

$w_1, \ldots, w_m$ seien (gesuchte) Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ in einem Bereich D des x_k Raumes R_n; in Vektorschreibweise sei $w = (w_1, \ldots, w_m)$ und $x, \xi, \ldots$ Punkte von R_n.

I. Es sei eine Integraltransformation T gegeben, die jedem Vektor w aus einem Bereich $\mathfrak{D}$ einen Vektor $v = (v_1, \ldots, v_m) = Tw$ zuordnet nach

$$(2) \qquad v_j(x) = z_j(x) + \int_{B_{x,j}} \varphi_j\left(\xi, w_k(\xi)\right) G_j(x, \xi)\, d\xi \qquad (j = 1, \ldots, m).$$

z_j, φ_j und G_j sind gegebene Funktionen ihrer Elemente, über die außer der Voraussetzung der Existenz des Integrals in (2) noch weitere Voraussetzungen getroffen werden. $B_{x,j}$ sind noch genauer anzugebende, möglicherweise vom jeweils betrachteten Punkte x abhängige, in D liegende Bereiche. Bei Randwertaufgaben wird $B_{x,j}$ gewöhnlich das gesamte Grundgebiet bedeuten und dann nicht von x abhängen. Bei Anfangswertaufgaben sei etwa B_0 der Durchschnitt von D mit der Hyperebene $x_1 = 0$ und es seien auf B_0 die Werte $\bar{u}_j$

für u_j vorgeschrieben. Alle vorkommenden Größen seien reell. Gefragt wird nach den Fixpunkten der Transformation T, d. h. nach Lösungen $u=(u_1, \ldots, u_m)$ von

$$u = T u. \tag{3}$$

Zur Lösung wird das Iterationsverfahren (1) benutzt. Zur Anwendung der allgemeinen Sätze wird in dem Raum $\mathfrak{R}$ der Vektoren w eine Halbordnung betrachtet. Es sei für gewisse Vektoren $w, \tilde{w}$ (mit den Komponenten $w_j, \tilde{w}_j$) sinnvoll, $w \geqq \tilde{w}$ zu schreiben, und zwar mögen die Indizes $1, \ldots, m$ in zwei Klassen K_1, K_2 eingeteilt sein und es möge $w \geqq \tilde{w}$ bedeuten [1])

$$w_i \geqq \tilde{w}_i \text{ im gewöhnlichen Sinne für } i \in K_1$$
$$w_i' \leqq \tilde{w}_i' \text{ im gewöhnlichen Sinne für } i' \in K_2.$$

Der Operator T heißt [1], [5], [6], [8] monoton $\left\{\begin{matrix}\text{nichtfallend}\\ \text{nichtwachsend}\end{matrix}\right\}$, falls $\left\{\begin{matrix}Tw \geqq T\tilde{w}\\ Tw \leqq T\tilde{w}\end{matrix}\right\}$ gilt für $w \geqq \tilde{w}$ und $w, \tilde{w} \in \mathfrak{D}$.

Weiter werden Normen benötigt: Für die Punkte x, ξ von D sei ein Abstand $|x-\xi|$ definiert, und für die Vektoren w aus R genügt hier als Norm die einfache Maximal-Betragsnorm:

$$\|w\| = \sum_{\nu=1}^{n} \sup_{B} |w_\nu|, \tag{4}$$

wobei B ein fester beschränkter echter oder unechter Teil von D sei. Mit dieser Norm bilden die Vektoren w in B einen Banachschen Raum.

Nun wird weiter vorausgesetzt:

II. Es sei $G_j(x, \xi) \geqq 0$ für $x \in D$, $\xi \in D$. Es seien φ_i nach den u_k partiell differenzierbare Funktionen und es gelte (bei G_j und bei den Ableitungen der φ_i mögen die Zeichen $\geqq 0$, $\leqq 0$ die gewöhnliche Bedeutung haben):

IIa) $\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \geqq 0$, für $i, k = 1, \ldots, m$; dann ist T monoton nichtfallend

oder

IIb) $\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \leqq 0$ für $i, k = 1, \ldots, m$; dann ist T monoton nichtwachsend

oder

IIc) $\left.\begin{matrix}\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \geqq 0, & \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial u_i'} \leqq 0\\ \dfrac{\partial \varphi_k'}{\partial u_i} \leqq 0, & \dfrac{\partial \varphi_k'}{\partial u_i'} \geqq 0\end{matrix}\right\}$ für $\begin{matrix}i, k \in K_1\\ i', k' \in K_2\end{matrix}$; dann ist T monoton nichtfallend

oder

IId) $\left.\begin{matrix}\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \leqq 0, & \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial u_i'} \geqq 0\\ \dfrac{\partial \varphi_k'}{\partial u_i} \geqq 0, & \dfrac{\partial \varphi_k'}{\partial u_i'} \leqq 0\end{matrix}\right\}$ für $\begin{matrix}i, k \in K_1\\ i', k' \in K_2\end{matrix}$; dann ist T monoton nichtwachsend.

[1]) Gleichwertig damit wäre es, $w \geqq \tilde{w}$ als $w_i \geqq \tilde{w}_i$ für $i \in K_1$ und $-w_i' \geqq -\tilde{w}_i'$ für $i' \in K_2$ zu definieren.

Die Voraussetzungen über die Ableitungen können auch durch Monotoniebedingungen ersetzt werden, z.B. statt $\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \geqq 0$ kann vorausgesetzt werden, daß die Funktion φ_k in der Veränderlichen u_i monoton nicht fällt.

2. Anwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes

Sind w, $\tilde{w}$ zwei Vektoren aus R mit $w \leqq \tilde{w}$, so bezeichnet das „Intervall" $\langle w, \tilde{w} \rangle$, die stets konvexe und abgeschlossene Menge aller Vektoren y aus R mit $w \leqq y \leqq w$. Nun mögen überdies $w, \tilde{w}$ zu $\mathfrak{D}$ gehören.

III. Vom Operator T wird nun vorausgesetzt, daß er ein solches Intervall $\langle w, \tilde{w} \rangle$ in eine kompakte Menge abbildet. Eine Menge $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{R}$ heißt kompakt, wenn jede unendliche Teilmenge von $\mathfrak{S}$ ein Häufungselement besitzt, welches zwar nicht notwendig zu $\mathfrak{S}$, aber zu $\mathfrak{R}$ gehören soll. Für verschiedene Typen von Randwertaufgaben ist in [3] gezeigt worden, daß diese Voraussetzung erfüllt ist; daß sie aber auch bei vielen Klassen von Anfangswertaufgaben gilt, kann man so einsehen: Alle Funktionen w_k, z_j, φ_j, G_j seien stetig. Es sei nun B ein beschränkter fester abgeschlossener Teilbereich von D mit dem Inhalt F_0. Für $x, \xi \in B$ sind alle G_j beschränkt. Es sei dort $|G_j| \leqq G_0$. Jedem Punkte $x \in B$ sind bereiche $B_{x,j}$, die in B liegen, mit den Inhalten $F_{x,j}$ zugeordnet und es hängen $F_{x,j}$ stetig von x ab. Bei zwei gegebenen Funktionen $w, \tilde{w}$ ist auch φ_j für alle y aus $\langle w, \tilde{w} \rangle$ beschränkt, es gelte $|\varphi_j| \leqq \Phi_0$, wobei Φ_0 von w und $\tilde{w}$ abhängt. Ferner sei $|z_j| \leqq Z_0$ in B. Die Elemente Ty sind gleichmäßig beschränkt, denn nach (2) ist $|v_j| \leqq Z_0 + F_0 \Phi_0 G_0$. Ferner sind sie gleichgradig stetig; denn für zwei Punkte $x, x' \in B$ gilt

$$v_j(x) - v_j(x') = z_j(x) - z_j(x') + \int\limits_{B_{x,j}} \varphi_j\left(\xi, w_k(\xi)\right) \left[G_j(x,\xi) - G_j(x',\xi)\right] d\xi - \\ - \int\limits_{B_{x',j} - B_{x,j}} \varphi_j\left(\xi, u_k(\xi)\right) G_j(x',\xi)\, d\xi,$$

$$|v_j(x) - v_j(x')| \leqq |z_j(x) - z_j(x')| + \Phi_0 \int\limits_{B_{x,j}} |G_j(x,\xi) - G_j(x',\xi)|\, d\xi + \\ + \Phi_0 G_0 |F_{x',j} - F_{x',j}|.$$

Auf der rechten Seite geht für $x' \to x$ jeder der 3 Terme einzeln gegen Null, da z_j, $F_{x,j}$, G_j innerhalb des abgeschlossenen beschränkten Bereiches B, also auch in $B_{x,j}$ stetig, also sogar gleichmäßig stetig sind. Man kann nun aber aus einer gleichmäßig beschränkten und gleichgradig stetigen Funktionenmenge eine gleichmäßig, also im Sinne der Norm (4) gegen ein Element aus R konvergente Folge auswählen.

Ferner ist der Operator T stetig, wie sich unmittelbar aus der Stetigkeit von φ_j ergibt.

IV. Es sei gelungen, nach dem Iterationsverfahren (1) Elemente $u_{(0)}$, $u_{(1)}$, $u_{\langle 0 \rangle}$, $u_{\langle 1 \rangle}$ mit den Eigenschaften aufzustellen:

IV A. Wenn der Operator T monoton nichtfallend ist, sei

$$u_{(0)} \leqq u_{\langle 0 \rangle}, \quad u_{(0)} \leqq u_{(1)}, \quad u_{\langle 1 \rangle} \leqq u_{\langle 0 \rangle}. \tag{5}$$

IV B. Wenn T monoton nichtwachsend ist, sei

$$u_{(0)} \leqq u_{\langle 0\rangle}, \quad u_{(0)} \leqq u_{\langle 1\rangle}, \quad u_{(1)} \leqq u_{\langle 0\rangle}. \tag{6}$$

Dann bildet T die Menge $\langle u_{(0)}, u_{\langle 0\rangle}\rangle$ in sich ab.

Es sei nämlich y ein Element mit $u_{(0)} \leqq y \leqq u_{\langle 0\rangle}$, dann gilt im Falle IV A

$$u_{(0)} \leqq u_{(1)} = T u_{(0)} \leqq T y \leqq T u_{\langle 0\rangle} = u_{\langle 1\rangle} \leqq u_{\langle 0\rangle} \tag{7}$$

und im Falle IV B gilt

$$u_{(0)} \leqq u_{\langle 1\rangle} = T u_{\langle 0\rangle} \leqq T y \leqq T u_{(0)} = u_{(1)} \leqq u_{\langle 0\rangle}, \tag{8}$$

d.h. Ty gehört wieder der Menge $\langle u_{(0)}, u_{\langle 0\rangle}\rangle$ an.

Nun ist der Schaudersche Fixpunktsatz anwendbar [7], [4]: Wenn ein stetiger Operator T eine konvexe abgeschlossene Menge $\mathfrak{M}$ eines Banachschen Raumes in sich abbildet und $T\,\mathfrak{M}$ kompakt ist, so besitzt T in $\mathfrak{M}$ einen Fixpunkt u mit $Tu = u$. Als Menge $\mathfrak{M}$ kann im vorliegenden Falle die Menge $\langle u_{(0)}, u_{\langle 0\rangle}\rangle$ genommen werden, und es gilt daher nach [8], [3] der

Satz. *Unter den Voraussetzungen* I *bis* IV *besitzt der Operator* T *in der Menge* $\langle u_{(0)}, u_{\langle 0\rangle}\rangle$ *eine Lösung* u *der Gl.* (3) *und es gilt im Falle* IV A *des monoton nichtfallenden Operators*

$$u_{(0)} \leqq u_{(1)} \leqq u_{(2)} \leqq \cdots \leqq u \leqq \cdots \leqq u_{\langle 2\rangle} \leqq u_{\langle 1\rangle} \leqq u_{\langle 0\rangle} \tag{9}$$

und im Falle IV B *des monoton nichtwachsenden Operators*

$$u_{(0)} \leqq u_{\langle 1\rangle} \leqq u_{(2)} \leqq u_{\langle 3\rangle} \leqq \cdots \leqq u \leqq \cdots \leqq u_{(3)} \leqq u_{\langle 2\rangle} \leqq u_{(1)} \leqq u_{\langle 0\rangle}. \tag{10}$$

Im Falle IV A *konvergieren die* $u_{(n)}$ *und die* $u_{\langle n\rangle}$ *für* $n \to \infty$ *gegen die Lösung* u, *im Falle* IV B *ist diese Konvergenz nur unter Zusatzvoraussetzungen bewiesen* [3].

Es sollen nun einige Klassen von Anfangswertaufgaben betrachtet werden, bei denen man die Voraussetzungen I bis III bequem nachprüfen kann. Die Voraussetzung IV ist eine Angelegenheit der Erfahrung dessen, der eine bestimmte vorgelegte Aufgabe zu behandeln hat. Die Formulierung der Voraussetzungen ist oben bereits so getroffen worden, daß es sich erübrigt, hier im Text die Bedingungen I bis III in jedem einzelnen Falle nachzuprüfen.

3. Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

Die Anfangswertaufgabe

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{11}$$

$$y^{(\nu)}(x_0) = y_0^{(\nu)} \quad \text{für } \nu = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{12}$$

kann in mannigfacher Weise auf eine Form (2) gebracht werden. Man kann den Vektor w mit den Komponenten $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)$ einführen und kann für die Ableitungen die Formeln verwenden

$$y^{(q)}(x) = \sum_{r=0}^{s} y_0^{(q+r)} \frac{(x-x_0)^r}{r!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^s}{s!}\, y^{(q+s+1)}(\xi)\, d\xi, \tag{13}$$

$$y^{(q)}(x) = \sum_{r=0}^{n-q-1} y_0^{(q+r)} \frac{(x-x_0)^r}{r!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-q-1}}{(n-q-1)!}\, f\big(\xi, y(\xi), \ldots, y^{(n-1)}(\xi)\big)\, d\xi. \tag{14}$$

Dabei geht (14) aus (13) hervor, indem man für $s=n-q-1$ im Integral die Differentialgleichung (11) benutzt. Für y und jede Ableitung kann jeweils eine der Gln. (13) und (14) ausgewählt werden. Man hat somit insgesamt $n!$ verschiedene Möglichkeiten. Ferner kann man jeweils auf 2^n verschiedene Weise die Klasseneinteilung mit K_1, K_2 vornehmen und die Bedeutung von $w \gtrless \tilde{w}$ nach Nr. 1 festlegen, so daß insgesamt $n!\ 2^n$ Möglichkeiten entstehen, von denen freilich nur ein Teil in eines der Schemata IIa bis IId paßt.

Für die folgende Diskussion ist es zweckmäßig, die verschiedenen Möglichkeiten durch eine einfache Symbolik zu charakterisieren. Die Festlegung des Operators erfolge durch ein Symbol aus n Zeichen (Zahlen oder der Buchstabe f) in Klammern eingeschlossen, wobei sich das k-te Zeichen auf die Integrationsformel für $y^{(k-1)}$ bezieht und eine Zahl p bedeutet, daß für $y^{(k-1)}$ die Formel (13) mit $s=p$, und der Buchstabe f bedeutet, daß für $y^{(k-1)}$ die Formel (14) zu verwenden ist, z.B. soll $(1, 0, f)$ bedeuten, daß für y selbst Formel (13) mit $q=0$, $s=1$ benutzt wird. An letzter Stelle in einem solchen Symbol steht stets f, an vorletzter Stelle kann nur f oder 0 stehen usw. Ein zweites Symbol besteht aus n Zeichen ($>$ oder $<$), wobei das an k-ter Stelle stehende Zeichen angibt: „$>$“ soll in der Definition $y^{(k-1)} \geqq \tilde{y}^{(k-1)}$ und „$<$“ soll $y^{(k-1)} \leqq \tilde{y}^{(k-1)}$ bedeuten.

Es mögen nun die Fälle $n=2, 3, 4$ etwas genauer betrachtet werden, wobei noch zur Abkürzung

$$Y_k = \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}, \quad y = y^{(0)} \tag{15}$$

gesetzt wird.

4. Differentialgleichungen zweiter, dritter und vierter Ordnung

$n=2$. Es kommt in der Differentialgleichung $y''=f(x, y, y')$ entscheidend auf die Vorzeichen von

$$Y_0 = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{und} \quad Y_1 = \frac{\partial f}{\partial y'}$$

Tabelle für $n=2$

Voraussetzungen über die Vorzeichen der Ableitungen von f	Definition des Operators T	Definition der Bedeutung von $w \gtrless \tilde{w}$	fällt unter	Dann ist der Operator T monoton, und zwar
$Y_0 \geqq 0, Y_1 \geqq 0$	(f, f)	$(>, >)$	IIa	nichtfallend
	$(0, f)$	$(>, >)$	IIa	nichtfallend
$Y_0 \geqq 0, Y_1 \leqq 0$	$(0, f)$	$(>, <)$	IId	nichtwachsend
$Y_0 \leqq 0, Y_1 \leqq 0$	(f, f)	$(>, >)$	IIb	nichtwachsend

an. In drei von den möglichen vier Fällen (Y_0, Y_1 nichtpositiv oder nichtnegativ) gibt es teilweise verschiedene Möglichkeiten, die Voraussetzungen II zu erfüllen. (Es erschien nicht nötig, alle Möglichkeiten aufzuführen. Es liegen auch noch nicht genügend Erfahrungen vor, um sagen zu können, welche Möglichkeit jeweils für einen vorliegenden Fall am meisten zu empfehlen ist.) Das Schema ist zur bequemeren Anwendbarkeit geordnet nach den Vorzeichen von Y_0, Y_1.

Daß der Fall $Y_0 \leqq 0$, $Y_1 \geqq 0$ nicht auftritt, liegt in der Natur der Sache; denn in diesem Falle können kompliziertere Erscheinungen auftreten, wie man an dem Beispiel $y'' = -y + y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ sehen kann. Die Definition $(0, f)$ lautet hier für den Operator T, wenn $y' = z$ gesetzt wird:

$$T\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^x \begin{pmatrix} z(\xi) \\ -y(\xi) + z(\xi) \end{pmatrix} d\xi .$$

Ausgehend von $u_{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhält man als Folge der Iterierten

$$u_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \end{pmatrix}, \quad u_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2!}x^2 \\ -x - & \frac{1}{2!}x^2 \end{pmatrix}, \quad u_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2!}x^2 & -\frac{1}{3!}x^3 \\ -x - & \frac{1}{2!}x^2 & \end{pmatrix}$$

allgemein

$$u_{(n)} = \begin{pmatrix} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu \frac{1}{\nu!} x^\nu \\ \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu \frac{1}{\nu!} x^\nu \end{pmatrix}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{6n} &= \alpha_{6n+5} = \beta_{6n+4} = \beta_{6n+5} = 1 \\ \alpha_{6n+1} &= \alpha_{6n+4} = \beta_{6n} = \beta_{6n+3} = 0 \\ \alpha_{6n+2} &= \alpha_{6n+3} = \beta_{6n+1} = \beta_{6n+2} = -1 \end{aligned}\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Es sind etwa im Intervall $0 < x \leqq 1$ jeweils y_{6n}, y_{6n+1}, y_{6n+5} größer und y_{6n+2}, y_{6n+3}, y_{6n+4} kleiner als die Lösung $y(x)$ der Anfangswertaufgabe, die durch $y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \frac{1}{\nu!} x^\nu$ gegeben ist und natürlich auch elementar ausdrückbar ist. Dieses Verhalten paßt nicht zu den Erscheinungen des monoton nichtfallenden oder nichtwachsenden Operators. Aber bei der Ordnungsdefinition $(>>)$ ist die dritte Potenz von T ein monoton nichtwachsender und die sechste Potenz ein monoton nichtfallender Operator. Es sei etwa T^3 angegeben:

$$T^3\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}x^2 \\ -x - & \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} + \int_0 \int \int \begin{pmatrix} -y \\ -z \end{pmatrix} (dx)^3 .$$

$n = 3$ und $n = 4$. Bei Differentialgleichungen höherer Ordnung gewinnt der Fall IId an Bedeutung, wie die Tabelle in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ deutlich zeigt. Es ist natürlich auch hier nicht zu erwarten, daß alle 2^n Vorzeichen-Kombinationen von $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ in die Schemata IIa bis IId passen; ich hoffe aber, in den Tabellen alle bei $n = 3$ und $n = 4$ erfaßbaren Fälle aufgeführt zu haben. Dabei kann in den Spalten „Definition des Operators", wenn in einer Spalte mehrere Symbole untereinander stehen und

Tabelle für $n = 3$

Voraussetzungen über die Vorzeichen der Ableitungen von f			Definition des Operators T	Definition der Bedeutung von $w \gtrsim \tilde{w}$	fällt unter	Dann ist der Operator T monoton und zwar
Y_0	Y_1	Y_2				
$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\left(\binom{0}{1}_f, \binom{0}{f}, f\right)$	$> > >$	IIa	nichtfallend
$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\left(\binom{1}{f}, 0, f\right)$	$> > <$	IId	nichtwachsend
$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\left(\binom{0}{1}_f, f, f\right)$	$> < <$	IId	nichtwachsend
$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\left(\binom{0}{f}, 0, f\right)$	$> < >$	IId	nichtwachsend
$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq 0$	(f, f, f)	$> > >$	IIb	nichtwachsend

durch eine Klammer zusammengefaßt sind, ein beliebiges dieser Symbole genommen werden, z. B. kann in der fünften Spalte der Tabelle $n = 4$ beim

Tabelle für $n = 4$

Voraussetzungen über die Vorzeichen der Ableitungen von f				Definition des Operators T	Definition der Bedeutung von $w \gtrsim \tilde{w}$	fällt unter	Dann ist der Operator T monoton und zwar
Y_0	Y_1	Y_2	Y_3				
$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\left(\binom{0}{1}_2, \binom{0}{1}_f, \binom{0}{f}, f\right)$	$> > > >$	IIa	nichtfallend
$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$(2, 1, 0, f)$	$> > > <$	IId	nichtwachsend
$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\left(\binom{1}{2}, \binom{0}{1}, f, f\right)$	$> > < >$	IId	nichtwachsend
$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\left(\binom{0}{2}, \binom{0}{f}, 0, f\right)$	$> < > <$	IId	nichtwachsend
$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq 0$	$(2, f, f, f)$	$> < < <$	IId	nichtwachsend
$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\left(\binom{0}{1}_f, 1, 0, f\right)$	$> < < >$	IId	nichtwachsend
$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\left(\binom{0}{f}, \binom{0}{1}, f, f\right)$	$> < > >$	IId	nichtwachsend
$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\left(\binom{1}{f}, \binom{0}{f}, 0, f\right)$	$> > < >$	IId	nichtwachsend
$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq 0$	(f, f, f, f)	$> > > >$	IIb	nichtwachsend

ersten Falle, in welchem alle $Y_j \geqq 0$ sind, $(2, 0, 0, f)$, $(2, f, 0, f)$ usw. gewählt werden.

5. Anfangswertaufgaben bei hyperbolischen Differentialgleichungen

Es werde die Anfangswertaufgabe zugrunde gelegt, vgl. [2], [10]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = f(x, y, w, p, q) \text{ in } D, \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} w &= g(s) \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= h(s) \end{aligned}\right\} \text{ auf } \Gamma.$$

Es bedeutet $p = \frac{\partial w}{\partial x}$, $q = \frac{\partial w}{\partial y}$ und Γ sei eine etwa mittels des Parameters s durch $x = x(s)$, $y = y(s)$ für $s_0 \leqq s \leqq s_1$ mit $\frac{\partial x}{\partial s} > 0$, $\frac{\partial y}{ds} < 0$ gegebene Kurve. Dann ist auf Γ auch q bekannt; u sei der Vektor mit den Komponenten w, p, q. Es sei D der dreieckartige, von Γ und den beiden Geraden $x = x(s_1)$, $y = y(s_0)$ begrenzte Bereich und P ein Punkt im Innern von D. Man kann auch hier auf verschiedene Weise ein System der Form (2) aufstellen. Es mögen A und B die Schnittpunkte der durch P parallel zur y-Achse bzw. zur x-Achse gelegten Geraden mit der Kurve Γ bedeuten und B_x sei der durch diese Geraden und Γ begrenzte Bereich. Von verschiedenen Möglichkeiten, einen Operator T mit $u^* = Tu$ und eine Ordnungsbeziehung zu definieren, seien hier nur einige herausgegriffen. Wohl die bekannteste Art der Festlegung des Operators T ist die folgende:

$$w^*(x, y) = \iint_{B_x} f\big(\xi, \eta, w(\xi, \eta), p(\xi, \eta), q(\xi, \eta)\big)\, d\xi\, d\eta, \tag{17}$$

$$p^*(x, y) = \int_A^P f(\xi, y, w, p, q)\, d\xi, \qquad q^*(x, y) = \int_B^P f(x, \eta, w, p, q)\, d\eta. \tag{18}$$

Dabei ist angenommen, daß man zuvor die Anfangsbedingungen homogen gemacht hat. Die Voraussetzungen III sind hier, wie man unmittelbar sieht, erfüllt. Für zwei Vektoren $u, \tilde{u}$ mit den Komponenten w, p, q bzw. $\tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{q}$ möge $u \geqq \tilde{u}$ bedeuten: $w \geqq \tilde{w}$, $p \geqq \tilde{p}$, $q \geqq \tilde{q}$; der Operator T ist monoton nicht fallend, wenn in D $\frac{\partial f}{\partial w}, \frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial q} \geqq 0$ sind, und monoton nicht wachsend, wenn diese partiellen Ableitungen $\leqq 0$ sind. Man kann aber auch einen Operator T statt durch (17), (18) definieren durch

$$\left\{\begin{aligned} w^*(x, y) &= w(A) + \int_A^P p(\xi, y)\, d\xi, \qquad p^*(x, y) = p(A) + \int_A^P f\, d\xi, \\ q^*(x, y) &= q(A) + \int_B^P f\, d\eta, \end{aligned}\right. \tag{19}$$

wobei man jetzt vorher nicht auf homogene Anfangsbedingungen zu transformieren braucht. Gilt nun z. B. $\frac{\partial f}{\partial w} \geqq 0$, $\frac{\partial f}{\partial p} \leqq 0$, $\frac{\partial f}{\partial q} \leqq 0$ in D, so kann man $u \geqq \tilde{u}$ definieren durch

$$w \geqq \tilde{w}, \qquad p \leqq \tilde{p}, \qquad q \leqq \tilde{q}$$

und T ist dann ein monoton nichtwachsender Operator.

BEISPIEL. Vorgelegt sei die Anfangswertaufgabe

$$w_{xy} = \tfrac{1}{2} + w + w_x w_y$$
$$w = w_x = w_y = 0 \quad \text{für} \quad s = 0 \quad \text{mit} \quad s = x + y - 1 .$$

Hier können w und seine Ableitungen als Funktionen von s aufgefaßt werden; dann lautet die Iterationsvorschrift:

$$T\begin{pmatrix} w \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^* \\ p^* \\ q^* \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad w^* = \int_0^s p(\sigma)\, d\sigma, \quad p^* = q^* = \int_0^s (\tfrac{1}{2} + w + p\, q)\, d\sigma;$$

für

$$u_0 = \begin{pmatrix} a\, s^2 \\ b\, s \\ b\, s \end{pmatrix} \quad \text{wird} \quad T u_0 = u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} b\, s^2 \\ \frac{1}{2} s + \frac{a + b^2}{3} s^3 \\ \text{,,} \qquad\qquad \text{,,} \end{pmatrix}.$$

Der Kürze halber werde u_j, $\hat{u}_j$ an Stelle von $u_{(j)}$, $u_{\langle j \rangle}$ geschrieben. T ist hier ein monoton nichtfallender Operator. Macht man für $\hat{u}_0$ einen gleichen Ansatz, nur mit Konstanten $\hat{a}$, $\hat{b}$ an Stelle von a, b, so sind die Voraussetzungen $u_0 \leqq u_1 \leqq \hat{u}_1 \leqq \hat{u}_0$ z.B. für $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $\hat{a} = \frac{1}{2}$, $\hat{b} = 1$ erfüllt für $0 \leqq s \leqq 1$. Es existiert also eine Lösung der Anfangswertaufgabe im Streifen $0 \leqq s \leqq 1$ und diese Lösung u genügt der Einschließung $u_1 \leqq u \leqq \hat{u}_1$. Die Schranken sind noch recht grob, lassen sich aber natürlich durch Verwendung genauerer Ansätze (etwa mit Polynomen höheren Grades) leicht verbessern.

Literatur

[1] COLLATZ, L.: Aufgaben monotoner Art. Arch. d. Math. **3**, 366–376 (1952). — [2] COLLATZ, L.: Fixed-point theorems and monotonic operators for initial-value problems. Proc. Symposium on Numerical treatment of partial differential equations with real characteristics, Roma 1959, pp. 56–63. — [3] COLLATZ, L., u. J. SCHRÖDER: Einschließen der Lösungen von Randwertaufgaben. Numer. Math. **1**, 61–72 (1959). — [4] DUNFORD, N., and J. SCHWARTZ: Linear Operators, Vol. I. 858 S. New York 1958. — [5] KOLODNER, J. J.: Functional equations involving transformations of "bounded variation". Proc. Internat. Math. Congr. Amsterdam, 1954, Vol. II, pp. 127–128. — [6] KOLODNER, J. J.: On equations and inequalities involving operators of bounded variation (erscheint demnächst). — [7] SCHAUDER, J.: Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. Studia Math. **2**, 171–182 (1930). — [8] SCHRÖDER, J.: Anwendung funktionalanalytischer Methoden zur numerischen Behandlung von Gleichungen. Z. angew. Math. Mech. **36**, 260–261 (1956). — [9] SCHRÖDER, J.: Vom Defekt ausgehende Fehlerabschätzungen bei Differentialgleichungen. Arch. Rat. Mech. Analysis **3**, 219–228 (1959). — [10] SCHRÖDER, J.: Fehlerabschätzungen bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Arch. Rat. Mech. Analysis **2**, 367–392 (1959). — [11] SCHRÖDER, J.: Anwendung von Fixpunktsätzen bei der numerischen Behandlung nichtlinearer Gleichungen in halbgeordneten Räumen. Erscheint in Arch. Rat. Mech. Analysis.

Hamburg, Universität, Institut für Angewandte Mathematik

(Eingegangen am 14. Januar 1960)

HEUSER, H.
Math. Zeitschr. 74, 167—185 (1960)

Zur Eigenwerttheorie einer Klasse symmetrischer Operatoren

Herrn ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

HARRO HEUSER

Es sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum, der nicht vollständig zu sein braucht. Wir betrachten in dieser Arbeit Operatoren A auf $\mathfrak{H}$, d. h. lineare Transformationen, die $\mathfrak{H}$ in sich abbilden, mit der folgenden Eigenschaft:

(E) *Ist die (komplexe) Zahl $\lambda \neq 0$ kein Eigenwert von A, so bildet der Operator $A - \lambda I$ den Raum $\mathfrak{H}$ auf sich ab.*

Hierbei verstehen wir unter I wie üblich die identische Transformation. Die durch diese Eigenschaft (E) definierte Operatorklasse $\{A\}$ ist eine Verallgemeinerung der in [2], [6], [7] betrachteten Klassen. Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß A nicht als beschränkt vorausgesetzt wird. Die Vorteile einer solchen „algebraischen" Definition einer Operatorklasse für die Anwendungen sind in [6] hervorgehoben.

Im folgenden sei $\overline{\mathfrak{H}}$ ein vollständiger Hilbert-Raum, in dem $\mathfrak{H}$ dicht liegt [1]. Mit anderen Worten: Wir betten $\mathfrak{H}$ in seine Abschließung $\overline{\mathfrak{H}}$ ein. Das gibt uns die Möglichkeit, die Theorie der symmetrischen Operatoren A, die (E) genügen, auf die Betrachtung ihrer Erweiterungen in $\overline{\mathfrak{H}}$ zu stützen und uns so der Hilfsmittel der Spektraltheorie selbstadjungierter linearer Transformationen zu vergewissern. Einleitend bringen wir einen einfachen Hilfssatz, auf den wir uns in dieser Arbeit häufig zu berufen haben.

Hilfssatz 1. *Besitzt der symmetrische Operator A auf $\mathfrak{H}$ die Eigenschaft* (E), *so existiert die Resolvente $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ für jedes λ mit $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ und ist auf ganz $\mathfrak{H}$ definiert und beschränkt.*

Beweis. Wegen der Symmetrie von A sind alle Eigenwerte von A reell. Ist $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, so existiert also $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ und ist wegen (E) genau auf $\mathfrak{H}$ definiert. Die Beschränktheit von R_λ folgt aus [5], Theorem 4.14.

Es erhebt sich nun zuerst die Frage, ob A selbstadjungiert oder wenigstens abgeschlossen ist [2]. Der folgende Satz zeigt, daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist.

SATZ 1. *Besitzt der symmetrische Operator A auf $\mathfrak{H}$ die Eigenschaft* (E) *und hat A in $\overline{\mathfrak{H}}$ eine abgeschlossene symmetrische Erweiterung A', die ebenfalls* (E) *genügt, so ist A' auf ganz $\overline{\mathfrak{H}}$ definiert und A selbst beschränkt.*

[1] Eine solche Abschließung $\overline{\mathfrak{H}}$ existiert immer. Siehe etwa [8], S. 110.

[2] Zur Definition dieser Begriffe s. etwa [4], S. 310 bzw. 299.

Beweis. Es sei $\mathfrak{S}' \supseteq \mathfrak{S}$ der Definitionsbereich von A', i die imaginäre Einheit. Nach Hilfssatz 1 existiert $R_i' = (A' - iI)^{-1}$ auf ganz $\mathfrak{S}'$ und ist beschränkt. Weil A' abgeschlossen ist, ist auch R_i' abgeschlossen. Aus der Beschränktheit und Abgeschlossenheit von R_i' folgt, daß der Definitionsbereich $\mathfrak{S}'$ von R_i' abgeschlossen ist. Da $\mathfrak{S}$, erst recht also $\mathfrak{S}'$ dicht in $\overline{\mathfrak{S}}$ liegt, ist also $\mathfrak{S}' = \overline{\mathfrak{S}}$. A' ist also auf ganz $\overline{\mathfrak{S}}$ definiert und daher nach dem Satz von HELLINGER-TOEPLITZ[3]) beschränkt. Erst recht ist also A selbst beschränkt.

Das folgende einfache Beispiel, das wir auch später noch benötigen werden, zeigt, daß ein symmetrischer Operator, der (E) genügt, durchaus unbeschränkt sein kann. $\overline{\mathfrak{S}}_0$ sei der spezielle (vollständige) Hilbert-Raum der komplexen Zahlenfolgen $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ mit $\sum_1^\infty |\alpha_n|^2 < \infty$, $\mathfrak{S}_0$ das Teilsystem aller abbrechenden Zahlenfolgen (also derjenigen Folgen, bei denen nur endlich viele Glieder von Null verschieden sind). $\mathfrak{S}_0$ ist ein unvollständiger Hilbert-Raum, der dicht in $\overline{\mathfrak{S}}_0$ liegt. Man prüft leicht nach, daß die Diagonalmatrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

einen Operator A auf $\mathfrak{S}$ darstellt, der (E) genügt; die λ_n sind genau die Eigenwerte von A. Sind sie reell, so ist A offenbar auch symmetrisch. Wählt man z. B. $\lambda_n = n$, so ist A ersichtlich unbeschränkt.

Wir führen noch ein weiteres Beispiel eines symmetrischen Operators mit (E) an, das uns später von Nutzen sein wird.

Es sei $\mathfrak{C}$ die Menge aller reellen Zahlen. Wir ordnen jedem $\alpha \in \mathfrak{C}$ eine komplexe Zahl ξ_α zu, und zwar so, daß höchstens abzählbar viele ξ_α von Null verschieden sind und die Quadratsumme $\sum |\xi_\alpha|^2$ konvergiert. Die Menge aller dieser Zuordnungen oder Belegungen $\{\xi_\alpha\}$ bildet — wenn man die linearen Verknüpfungen und das innere Produkt in üblicher Weise erklärt — einen vollständigen Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ mit den Punkten $x = \{\xi_\alpha\}$. Die Elemente $e_\beta = \{\xi_\alpha | \xi_\beta = 1,\ \xi_\alpha = 0 \text{ für } \alpha \neq \beta\}$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{L}$ sei irgendeine beschränkte und abgeschlossene Menge reeller Zahlen λ. Jedem $\beta \in \mathfrak{C}$ ordnen wir ein $\lambda_\beta \in \mathfrak{L}$ zu, wobei wir die ganze Menge $\mathfrak{L}$ aufbrauchen wollen. Nun definieren wir einen Operator A auf $\mathfrak{H}$ durch die Vorschrift

$$A\,x = \sum_{\beta \in \mathfrak{C}} \lambda_\beta (x, e_\beta)\, e_\beta .$$

A ist symmetrisch, und die Eigenwerte von A sind genau die Zahlen λ_β, die zugehörigen Eigenlösungen die Elemente e_β. Man überzeugt sich leicht davon, daß für jede Zahl $\mu \notin \mathfrak{L}$ und jedes $h \in \mathfrak{H}$ die Gleichung $(A - \mu I)\, x = h$ durch das Element

$$x = \sum \frac{1}{\mu} \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\beta - \mu} (h, e_\beta)\, e_\beta - \frac{1}{\mu} h$$

gelöst wird. A besitzt also die Eigenschaft (E).

[3]) Siehe [4], S. 295.

Wenn auch nach Satz 1 A im allgemeinen nicht selbstadjungiert sein wird, so zeigt doch der folgende Satz, daß A jedenfalls immer *wesentlich selbstadjungiert* ist; dabei heißt eine dicht auf $\mathfrak{S}$ definierte lineare Transformation A wesentlich selbstadjungiert, wenn $A^* = A^{**}$ ist, d.h. wenn ihre adjungierte Transformation selbstadjungiert ist.

Satz 2. *Besitzt der auf $\mathfrak{S} \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$ definierte symmetrische Operator A die Eigenschaft* (E), *so ist A wesentlich selbstadjungiert, und die selbstadjungierte lineare Transformation A^* ist die einzige symmetrische abgeschlossene Erweiterung von A.*

Beweis. Nach Hilfssatz 1 gehören die Halbebenen $\operatorname{Im}\lambda > 0$ und $\operatorname{Im}\lambda < 0$ zur Resolventenmenge von A, so daß A ein reelles Spektrum besitzt. Nach [5], Theorem 4.17 ist daher A wesentlich selbstadjungiert, d.h. es ist

$$A^* = A^{**}. \tag{1}$$

Da A^* also selbstadjungiert, insbesondere also maximalsymmetrisch ist[4], und da andererseits jede symmetrische abgeschlossene Erweiterung von A auch eine symmetrische Erweiterung von A^{**} ist[5], folgt aus (1), daß A^* die einzige symmetrische abgeschlossene Erweiterung von A ist.

Wir untersuchen nun die Beziehungen zwischen dem Spektrum von A und dem Spektrum von A^*, um dann mittels der Spektralzerlegung von A^* Rückschlüsse auf das Spektrum von A zu ziehen. Dabei benutzen wir die folgenden Abkürzungen, wobei T eine beliebige lineare Transformation sei:

$Sp(T)$ = Spektrum von T,
$RSp(T)$ = Residualspektrum von T,
$PSp(T)$ = Punktspektrum von T (= Menge der Eigenwerte von T),
$KSp(T)$ = kontinuierliches Spektrum von T,
$Rm(T)$ = Resolventenmenge von T,
$\mathfrak{N}(T)$ = Kern von T, d.h. die Menge aller Elemente x mit $Tx = 0$.

Die hier aufgeführten spektraltheoretischen Begriffe sind z.B. in [5], S. 128f. definiert.

Satz 3. *A sei ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{S} \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$ mit der Eigenschaft* (E). *Dann ist $Sp(A)$ reell, abgeschlossen und nicht leer und es gelten die folgenden Beziehungen:*

(a) $Sp(A) = Sp(A^*)$,
(b) $RSp(A) - \{0\} = RSp(A^*) = \emptyset$[6],
(c) $PSp(A) - \{0\} = PSp(A^*) - \{0\}$,
(d) $KSp(A) = KSp(A^*)$.

---

[4]) Siehe [4], S. 304.
[5]) Siehe [4], S. 304 und 307.
[6]) Das Minuszeichen bedeutet die Bildung der Restmenge, $\emptyset$ die leere Menge.

Beweis. Da $A^*=A^{**}$ die kleinste abgeschlossene Erweiterung von A ist[7]), gilt nach [5], Theorem 4.9:

$$\begin{aligned} Sp(A) &= Sp(A^*), \\ PSp(A) &\subseteq PSp(A^*), \\ KSp(A) &\supseteq KSp(A^*). \end{aligned} \tag{2}$$

Mit der ersten Zeile von (2) ist (a) bewiesen und gleichzeitig die Behauptung über $Sp(A)$ zu Anfang des Satzes 3, da wegen der Selbstadjungiertheit von A^* das Spektrum von A^* reell, abgeschlossen und nicht leer ist. Das Residualspektrum von A kann höchstens die Null enthalten, weil für $\lambda \neq 0$ der Operator $A-\lambda I$ wegen (E) entweder keine Inverse oder eine auf $\mathfrak{S}$, also dicht auf $\overline{\mathfrak{S}}$ definierte Inverse besitzt. Ferner ist $RSp(A^*)$ nach [5], Theorem 5.11 leer, da A^* selbstadjungiert ist. Damit ist auch (b) bewiesen. Da A^* nur reelle Eigenwerte haben kann, folgt wegen (b) aus [5], Theorem 4.15, daß jeder von Null verschiedene Eigenwert von A^* auch Eigenwert von A ist. Zusammen mit der zweiten Zeile von (2) folgt daraus die Behauptung (c). Da Punktspektrum und kontinuierliches Spektrum einer linearen Transformation punktfremd sind, wegen (b)

$$Sp(A)-\{0\} = \big(PSp(A)-\{0\}\big) \cup \big(KSp(A)-\{0\}\big)$$

ist und diese Formel wegen $RSp(A^*)=\emptyset$ auch gilt, wenn man in ihr überall A durch A^* ersetzt, folgt aus (a) und (c), daß

$$KSp(A)-\{0\} = KSp(A^*)-\{0\} \tag{3}$$

ist. Ist nun $0 \in KSp(A^*)$, so ist nach der letzten Zeile von (2) auch $0 \in KSp(A)$. Ist umgekehrt $0 \in KSp(A)$, so liegt nach (a) 0 jedenfalls in $Sp(A^*)$, und wegen $RSp(A^*)=\emptyset$ folgt daraus nach [5], Theorem 4.15, daß $0 \in KSp(A^*)$ ist. Aus diesen Bemerkungen ergibt sich mit (3) die Behauptung (d) unseres Satzes.

Da A^* eine Erweiterung von A ist, wird für einen Eigenwert λ von A im allgemeinen $\mathfrak{N}(A-\lambda I) \subseteq \mathfrak{N}(A^*-\lambda I)$ sein. Von besonderem Interesse ist der Fall, wo diese Ungleichung in Wirklichkeit eine Gleichheit ist. Der folgende Satz macht darüber eine genaue Aussage.

Satz 4. *A sei ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{S} \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$ und besitze die Eigenschaft* (E). *Genau dann gilt für einen von Null verschiedenen Eigenwert λ von A die Gleichung $\mathfrak{N}(A-\lambda I)=\mathfrak{N}(A^*-\lambda I)$, wenn $\mathfrak{N}(A-\lambda I)$ ein (vollständiger) Hilbert-Raum ist und gleichzeitig das Bild $(A-\lambda I)\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{S}$ unter $A-\lambda I$ dicht in dem orthogonalen Komplement zu $\mathfrak{N}(A-\lambda I)$ in $\mathfrak{S}$ liegt.*

Der Beweis zerfällt in zwei Teile. Zuerst nehmen wir an, daß die Beziehung $\mathfrak{N}(A-\lambda I)=\mathfrak{N}(A^*-\lambda I)$ gilt. Daraus folgt sofort, daß $\mathfrak{N}(A-\lambda I)$ ein vollständiger Hilbert-Raum ist; denn offenbar ist $\mathfrak{N}(A^*-\lambda I)$ wegen der Abgeschlossenheit von A^* ein solcher. Nach [8], S. 116, Theorem 3 gibt es daher

[7]) Siehe [4], S. 304.

zu $\mathfrak{N}(A-\lambda I)$ ein orthogonales Komplement $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{S}$, so daß $\mathfrak{S}=\mathfrak{N}(A-\lambda I)+\mathfrak{C}$ ist. Da A symmetrisch, $\mathfrak{N}(A-\lambda I)$ invariant unter A und $\mathfrak{C}$ orthogonal zu $\mathfrak{N}(A-\lambda I)$ ist, ist $\mathfrak{C}$ invariant unter A. Es sei A' die Einschränkung von A auf $\mathfrak{C}$. Wir denken uns $\mathfrak{C}$ in seine Abschließung $\overline{\mathfrak{C}}\subseteq\overline{\mathfrak{S}}$ eingebettet und bilden zu A' die adjungierte Transformation $(A')^*$, die wegen der Symmetrie von A' eine Erweiterung von A' ist. λ ist kein Eigenwert von A', weil eine Eigenlösung e von A' zu λ einerseits in $\mathfrak{C}$, andererseits aber auch in $\mathfrak{N}(A-\lambda I)$ liegen müßte, da sie auch Eigenlösung von A zu λ wäre. λ kann auch nicht im Residualspektrum von A' liegen, weil sonst nach [5], Theorem 4.15 λ ein Eigenwert von $(A')^*$ wäre (beachte hierbei die Realität von λ!), jede zugehörige Eigenlösung aber einerseits in $\overline{\mathfrak{C}}$, andererseits in $\mathfrak{N}(A^*-\lambda I)$ liegen müßte, da A^* eine Erweiterung von $(A')^*$ ist; dies ist jedoch unmöglich, da $\overline{\mathfrak{C}}$ orthogonal zu $\mathfrak{N}(A-\lambda I)$, auf Grund unserer Voraussetzung also auch orthogonal zu $\mathfrak{N}(A^*-\lambda I)$ ist. λ kann also nur dem kontinuierlichen Spektrum oder der Resolventenmenge von A' angehören. In beiden Fällen liegt $(A'-\lambda I)\mathfrak{C}$ dicht in $\overline{\mathfrak{C}}$, erst recht also liegt dann $(A-\lambda I)\mathfrak{S}$ dicht in $\mathfrak{C}$.

Nun nehmen wir umgekehrt an, daß $\mathfrak{N}(A-\lambda I)$ ein vollständiger Hilbert-Raum ist und $(A-\lambda I)\mathfrak{S}$ dicht in dem orthogonalen Komplement $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{N}(A-\lambda I)$ in $\mathfrak{S}$ liegt. Es sei s^* ein Element des Definitionsbereiches $\mathfrak{S}^*$ von A^*. Da A nach Satz 2 wesentlich selbstadjungiert ist, gibt es nach [5], Theorem 4.17 und Theorem 2.10 zu s^* eine Folge $s_n\in\mathfrak{S}$ derart, daß

$$s_n\to s^*,\qquad A s_n\to t\quad\text{und}\quad t=A^*s^*$$

ist. Somit konvergiert auch

$$(A-\lambda I)s_n\to(A^*-\lambda I)s^*.$$

s_n können wir in der Form

$$s_n=k_n+c_n\quad\text{mit}\quad k_n\in\mathfrak{N}(A-\lambda I),\qquad c_n\in\mathfrak{C}$$

darstellen, und da $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{N}(A-\lambda I)$ orthogonal ist, gilt

$$||s_n-s_m||^2=||k_n-k_m||^2+||c_n-c_m||^2.$$

Daraus folgt wegen der Konvergenz der s_n, daß

$$k_n\to k,\qquad c_n\to c$$

konvergiert, wobei k in $\mathfrak{N}(A-\lambda I)$ liegt, da dieses System vollständig ist, während $c\in\overline{\mathfrak{C}}$ ist. Da nach Voraussetzung $(A-\lambda I)\mathfrak{S}$ dicht in $\mathfrak{C}$, also auch dicht in $\overline{\mathfrak{C}}$ liegt, gibt es eine Folge $x_n\in\mathfrak{S}$, so daß $c=\lim(A-\lambda I)x_n$ ist. Damit haben wir gefunden, daß ein beliebiges $s^*\in\mathfrak{S}^*$ sich in der Form

$$s^*=k+\lim(A-\lambda I)x_n\quad\text{mit}\quad k\in\mathfrak{N}(A-\lambda I),\qquad x_n\in\mathfrak{S}$$

darstellen läßt. Ist $s^* = k^* \in \mathfrak{R}(A^* - \lambda I)$, so erhalten wir also

$$k^* - k = \lim (A - \lambda I)\, x_n = \lim (A^* - \lambda I)\, x_n. \tag{4}$$

Da nun $\mathfrak{R}(A - \lambda I) \subseteq \mathfrak{R}(A^* - \lambda I)$ ist, liegt $k^* - k$ in $\mathfrak{R}(A^* - \lambda I)$; dieser Raum ist aber orthogonal zu dem Bildbereich von $A^* - \lambda I$, also auch orthogonal zu dessen Abschließung, da A^* selbstadjungiert und λ reell ist. Daraus folgt mit (4), daß $k^* - k = 0$ ist. Also ist $k^* \in \mathfrak{R}(A - \lambda I)$. Zusammen mit der eben erwähnten Ungleichung $\mathfrak{R}(A - \lambda I) \subseteq \mathfrak{R}(A^* - \lambda I)$ ergibt sich daraus die behauptete Gleichung $\mathfrak{R}(A - \lambda I) = \mathfrak{R}(A^* - \lambda I)$.

Im Anschluß an die genauen Bedingungen des Satzes 4 wollen wir nun eine hinreichende Bedingung für das Bestehen der Gleichung $\mathfrak{R}(A - \lambda I) = \mathfrak{R}(A^* - \lambda I)$ angeben. Wir benötigen dazu den Begriff der *schwachen Abgeschlossenheit* eines Operators, den wir zuerst definieren wollen.

Ein Operator T auf $\mathfrak{S} \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$ heißt schwach abgeschlossen, wenn aus

$$s_n \to \bar{s} \qquad (s_n \in \mathfrak{S},\ \bar{s} \in \overline{\mathfrak{S}})$$

und

$$T s_n \to t \in \mathfrak{S}$$

folgt, daß $\bar{s} \in \mathfrak{S}$ und $T\bar{s} = t$ ist.

Satz 5. *A sei ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{S} \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$ und erfülle* (E). *Dann ist $A - \lambda I$ für jede Zahl $\lambda \neq 0$, die kein Eigenwert von A ist, schwach abgeschlossen. Ist $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von A und $A - \lambda I$ schwach abgeschlossen, so ist $\mathfrak{R}(A - \lambda I) = \mathfrak{R}(A^* - \lambda I)$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{S}^* \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$ der Definitionsbereich der nach Satz 2 selbstadjungierten linearen Transformation A^* und $\lambda \neq 0$. $\{s_n\}$ sei eine Folge von Elementen aus $\mathfrak{S}$, die gegen $\bar{s} \in \overline{\mathfrak{S}}$ konvergiert und gleichzeitig konvergiere

$$(A - \lambda I)\, s_n = (A^* - \lambda I)\, s_n \to t \in \mathfrak{S}.$$

Aus der Abgeschlossenheit von A^* folgt, daß

$$\bar{s} \in \mathfrak{S}^* \quad \text{und} \quad (A^* - \lambda I)\, \bar{s} = t \tag{5}$$

ist. λ sei kein Eigenwert von A. Dann gibt es wegen (E) ein $s \in \mathfrak{S}$ mit

$$(A - \lambda I)\, s = t. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt $(A^* - \lambda I)(\bar{s} - s) = 0$. Da nach Satz 3 λ auch kein Eigenwert von A^* ist, folgt aus dieser Gleichung $\bar{s} - s = 0$, also $\bar{s} \in \mathfrak{S}$. Zusammen mit der zweiten Beziehung in (5) ergibt sich daraus die erste Behauptung unseres Satzes.

Es sei nun $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von A und $A - \lambda I$ sei schwach abgeschlossen. k^* sei ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}(A^* - \lambda I)$. Da $k^* \in \mathfrak{S}^*$ ist, gibt es wegen der wesentlichen Selbstadjungiertheit von A nach [5], Theorem

4.17 und Theorem 2.10 eine Folge $s_n \in \mathfrak{S}$, so daß

$$s_n \to k^* \quad \text{und} \quad A s_n \to A^* k^* = \lambda k^*$$

konvergiert. Also konvergiert $(A-\lambda I)s_n \to 0$, wegen der schwachen Abgeschlossenheit von $A-\lambda I$ ist also $k^* \in \mathfrak{S}$ und $(A-\lambda I)k^* = 0$, d.h. k^* liegt in $\mathfrak{N}(A-\lambda I)$. Damit ist unsere Behauptung bewiesen, wenn man noch die schon mehrfach erwähnte Ungleichung $\mathfrak{N}(A-\lambda I) \subseteqq \mathfrak{N}(A^*-\lambda I)$ beachtet.

Wir werden nun einen Hilfssatz formulieren und beweisen, der uns in die Lage setzen wird, Aussagen über die Struktur des Spektrums von A, über die Existenz von Eigenwerten und über die Entwicklung gewisser Elemente aus $\mathfrak{S}$ nach Eigenlösungen zu machen.

Hilfssatz 2. *Es sei A ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{S} \subseteqq \overline{\mathfrak{S}}$, der die Eigenschaft* (E) *besitzt. E_λ sei die Spektralschar des selbstadjungierten Operators A^*. Dann ist für jede reelle Zahl ξ und für jedes Element $s \in \mathfrak{S}$, das in der Form $(A-\xi I)^2 x = s$ dargestellt werden kann, die Funktion $(E_\lambda s, s)$ in ξ differenzierbar, und ihre Ableitung ist dort gleich Null.*

Wir zerlegen den Beweis in mehrere Schritte.

(a) Zunächst bemerken wir, daß nach Satz 2 die Transformation A^* selbstadjungiert ist und daher eine Spektralschar E_λ besitzt. Ist ζ eine beliebige komplexe Zahl mit $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$, so gilt

$$(A^*-\zeta I)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda-\zeta}\, d E_\lambda\,^{8}).$$

Ist $s \in \mathfrak{S}$, so existiert wegen (E) $R_\zeta s = (A-\zeta I)^{-1} s = (A^*-\zeta I)^{-1} s$, und es ist

$$(R_\zeta s, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda-\zeta}\, d(E_\lambda s, s), \tag{7}$$

somit, wenn wir $\zeta = \alpha + i\beta$ setzen und beachten, daß $(E_\lambda s, s)$ reell ist,

$$v(\alpha,\beta) = \operatorname{Im}(R_\zeta s, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{(\lambda-\alpha)^2+\beta^2}\, d(E_\lambda s, s). \tag{8}$$

Wir erinnern noch daran, daß $(E_\lambda s, s)$ eine nicht-abnehmende Funktion von λ ist. Die hier benutzten Tatsachen über Spektralscharen und Spektralzerlegung findet man in [4] und [5].

(b) Wir zeigen nun: Ist $s \neq 0$, so ist $v(\alpha,\beta)$ für $\beta > 0$ eine positive Potentialfunktion. Nach [5], Theorem 4.12 ist nämlich $((A^*-\zeta I)^{-1} s, s) = (R_\zeta s, s)$ eine in der oberen und unteren Halbebene reguläre Funktion, da A^* selbstadjungiert ist. $v(\alpha,\beta)$ ist also in diesen beiden Halbebenen eine Potential-

[8]) Siehe [4], S. 346.

funktion. Mit $R_\zeta s = t$ erhält man

$$(R_\zeta s, s) = \big(t, (A - \alpha I - i\beta I)\, t\big) = \big(t, (A - \alpha I)\, t\big) + i\beta (t, t).$$

Da $\big(t, (A - \alpha I) t\big)$ wegen der Realität von α und der Symmetrie von A reell ist, ist also $v(\alpha, \beta) = \beta (t, t)$. Da schließlich für $s \neq 0$ auch $t \neq 0$ ist, folgt aus dieser Gleichung, daß für $\beta > 0$ in der Tat $v(\alpha, \beta) > 0$ ist. Die Behauptung (b) hätte man mit Hilfe einfacher Sätze aus der Theorie des Poisson-Stieltjesschen Integrals und einfacher Grenzwertbeziehungen für Spektralscharen auch aus der Darstellung (8) herleiten können.

(c) Wir beweisen nun die folgende Aussage: Ist $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$, so gilt die Beziehung

$$(9) \qquad (R_\zeta s, s) = \big((A - \xi I)\, x, s\big) + (\zeta - \xi)\, (x, s) + (\zeta - \xi)^2\, (R_\zeta x, s),$$

wenn $x, s \in \mathfrak{S}$ durch die Gleichung

$$(10) \qquad (A - \xi I)^2\, x = s$$

miteinander verbunden sind.

Denn offenbar gilt für zwei beliebige Zahlen ζ_1, ζ_2 die Identität

$$(A - \zeta_1 I)^2 = (A - \zeta_2 I)\, (A - \zeta_1 I) + (\zeta_2 - \zeta_1)\, (A - \zeta_2 I) + (\zeta_2 - \zeta_1)^2 I.$$

Diese Identität wenden wir für $\zeta_1 = \xi$, $\zeta_2 = \zeta$ mit $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ auf das durch (10) bestimmte Element x an und erhalten so die Gleichung

$$(11) \qquad s = (A - \zeta I)\, (A - \xi I)\, x + (\zeta - \xi)\, (A - \zeta I)\, x + (\zeta - \xi)^2\, x.$$

Wegen $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ können wir nach Hilfssatz 1 die Resolvente R_ζ auf (11) anwenden und erhalten, indem wir noch mit s skalar multiplizieren, die behauptete Identität (9).

(d) Wir zeigen nun folgendes: Ist ξ eine reelle Zahl und $s \in \mathfrak{S}$ in der Form (10) gegeben, ist ferner $\zeta = \alpha + i\beta$ und $\beta > 0$, so strebt $v(\alpha, \beta) = \operatorname{Im}(R_\zeta s, s)$ gegen 0 für $\zeta \to \xi$ im Winkelraum $\mathfrak{W}$: $|\alpha - \xi| \leqq \beta$ [9].

Wegen $\operatorname{Im} \zeta = \beta > 0$ gilt nach [5], Theorem 4.14 und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für den in (9) auftretenden Ausdruck $(R_\zeta x, s)$ die Abschätzung

$$|(R_\zeta x, s)| \leqq \frac{\|x\| \cdot \|s\|}{\beta}.$$

Damit ergibt sich die Abschätzung

$$|(\zeta - \xi)\, (x, s) + (\zeta - \xi)^2\, (R_\zeta x, s)| \leqq 6 \|x\| \cdot \|s\| \cdot \beta \quad \text{für} \quad \zeta \in \mathfrak{W}.$$

[9] Diese Bemerkung wurde von WIELANDT [7] bewiesen und benutzt, um die Existenz von Eigenwerten finiter symmetrischer Operatoren zu zeigen.

Mit der Gl. (9) folgt daraus die Grenzwertbeziehung

$$(12) \qquad (R_\zeta s, s) \to \big((A - \xi I)\, x, s\big) \quad \text{für} \quad \zeta \to \xi \quad \text{in} \quad \mathfrak{W}.$$

Da wegen der Realität von ξ der Operator $A - \xi I$ symmetrisch ist, ergibt sich aus (10) die Gleichung

$$\big((A - \xi I)\, x, s\big) = \big((A - \xi I)\, x, (A - \xi I)^2 x\big) = \big((A - \xi I)^3 x, x\big).$$

Das letzte Glied dieser Gleichungskette ist wegen der Symmetrie von $(A - \xi I)^3$ reell, also ist auch $\big((A - \xi I)\, x, s\big)$ reell. Daher folgt aus (12), daß in der Tat $v(\alpha, \beta) \to 0$ für $\zeta \to \xi$ in $\mathfrak{W}$.

(e) Für den letzten Schritt unseres Beweises benutzen wir einen Satz aus [3] über Potentialfunktionen, die in der oberen Halbebene positiv und durch die Darstellung (8) gegeben sind: Strebt $v(\alpha, \beta) \to \varkappa$ wenn $(\alpha, \beta) \to (\xi, 0)$ auf zwei verschiedenen Strahlen, die in der oberen Halbebene verlaufen und in $(\xi, 0)$ einmünden, so existiert die Ableitung der Integratorfunktion $(E_\lambda s, s)$ in ξ und ist gleich $\varkappa/\pi$. Nach (d) erfüllt $v(\alpha, \beta) = \mathrm{Im}\,(R_\zeta s, s)$ die Konvergenzbedingung dieses Satzes, wenn s von Null verschieden und in der Form (10) gegeben ist, und zwar ist $\varkappa = 0$. Damit ist die Behauptung des Hilfssatzes 2 im Falle $s \neq 0$ bewiesen. Für $s = 0$ ist sie jedoch wegen $(E_\lambda s, s) \equiv 0$ trivial.

Satz 6. *Es sei A ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{S} \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$, der die Eigenschaft* (E) *besitzt. Dann besteht $KSp(A) - \{0\}$ genau aus den von Null verschiedenen Häufungspunkten von Eigenwerten von A, die selbst keine Eigenwerte sind.*

Beweis. Weil nach Satz 3 das Spektrum von A abgeschlossen und $RSp(A) - \{0\} = \emptyset$ ist, gehört jeder von Null verschiedene Häufungspunkt von Eigenwerten von A, der selbst kein Eigenwert ist, zu $KSp(A) - \{0\}$. Für den Nachweis, daß umgekehrt jeder Punkt aus $KSp(A) - \{0\}$ Häufungspunkt von Eigenwerten ist, genügt es, da nach Satz 3 das Spektrum von A reell ist, folgendes zu zeigen: jedes offene Intervall (λ_1, λ_2) der reellen Achse, das weder 0 noch einen Eigenwert von A enthält, gehört zur Resolventenmenge von A. Dies ergibt sich jedoch sehr leicht aus Hilfssatz 2. Denn wegen (E) läßt sich für beliebiges $\xi \in (\lambda_1, \lambda_2)$ jedes Element s aus $\mathfrak{S}$ in der Form (10) darstellen, also besitzt die Funktion $(E_\lambda s, s)$ für jedes $s \in \mathfrak{S}$ in (λ_1, λ_2) eine verschwindende Ableitung. Für zwei beliebige Zahlen α_1, α_2 aus (λ_1, λ_2) und für jedes $s \in \mathfrak{S}$ ist also $(E_{\alpha_1} s, s) = (E_{\alpha_2} s, s)$. Daraus folgt, daß die Projektionsoperatoren E_{α_1} und E_{α_2} übereinstimmen. Also ist E_λ auf dem Intervall (λ_1, λ_2) konstant, und daraus folgt nach der bekannten Charakterisierung des Spektrums durch die Spektralschar [10], daß (λ_1, λ_2) zur Resolventenmenge von A^*, nach Satz 3 daher auch zur Resolventenmenge von A gehört.

Satz 7. *Ein von Null verschiedener symmetrischer Operator A mit der Eigenschaft* (E) *besitzt mindestens einen von Null verschiedenen Eigenwert.*

[10] Siehe [5], Definition 5.2 und Theorem 5.11.

Andernfalls würden nämlich nach Satz 6 die Intervalle $0<\lambda<+\infty$ und $-\infty<\lambda<0$ zu $Rm(A)$, nach Satz 3 also auch zu $Rm(A^*)$ gehören, wären also Konstanzintervalle der Spektralschar E_λ von A^*. Weil nach [5], Theorem 5.6 für die Spektralschar einer selbstadjungierten linearen Transformation die Limesbeziehungen

$$E_\lambda \to I \quad \text{für} \quad \lambda \to +\infty, \qquad E_\lambda \to 0 \quad \text{für} \quad \lambda \to -\infty$$

gelten, wäre in unserem Falle also $E_\lambda = I$ für positive λ und $E_\lambda = 0$ für negative λ. Aus der Spektraldarstellung

$$A^* = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda$$

folgt dann $A^* = 0$, also auch $A = 0$, im Gegensatz zu unserer Voraussetzung.

Obwohl Satz 7 die Existenz von Eigenwerten von A verbürgt, werden die zugehörigen Eigenlösungen im allgemeinen nicht ausreichen, um jedes Element der Form $A\,s$ in eine Fourier-Reihe nach Eigenlösungen zu entwickeln. Betrachten wir das folgende Beispiel! Es sei $\mathfrak{G}$ ein vollständigerHilbert-Raum und G ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{G}$, der keine Eigenwerte besitzt. $\mathfrak{H}$ sei der vollständige Hilbert-Raum, den wir im zweiten Beispiel im Anfang dieser Arbeit einführten, und H sei der in diesem Beispiel A genannte Operator, wobei die dort figurierende Menge $\mathfrak{L}$ gleich $Sp(G)$ gewählt werde [11]). Der Raum $\mathfrak{S}$ wird nun definiert als der Produktraum $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$, d. h. als die Menge der Paare $\{g, h\}$. Mit der natürlichen Definition der linearen Verknüpfungen und mit

$$[\{g_1, h_1\}, \{g_2, h_2\}] = (g_1, g_2) + (h_1, h_2)$$

als innerem Produkt ist $\mathfrak{S}$ ein vollständiger Hilbert-Raum. Definieren wir den Operator A durch die Vorschrift

$$A\{g, h\} = \{G\,g, H\,h\},$$

so ist A offenbar ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{S}$, der die Eigenschaft (E) besitzt. Die Eigenwerte von A sind genau die Eigenwerte von H, die Eigenlösungen sind genau die Paare $\{0, e\}$, wobei e die Eigenlösungen von H durchläuft. Da jede Reihe der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \{0, e_n\}$ in dem Teilraum der Paare $\{0, h\}$ liegt, kann kein Element der Form $A\{g, 0\} \neq 0$ in eine Reihe nach Eigenlösungen von A entwickelt werden.

Andererseits kann es vorkommen, daß bei gegebenem symmetrischen Operator A mit (E) zwar eine Entwicklung nach Eigenlösungen von A^*, nicht jedoch nach Eigenlösungen von A allein möglich ist. Um uns bei der

[11]) $Sp(G)$ ist eo ipso abgeschlossen und, da G nach dem schon früher zitierten Satz von HELLINGER-TOEPLITZ beschränkt ist, auch beschränkt. Damit erfüllt $Sp(G)$ die Anforderungen, die an die Menge $\mathfrak{L}$ gestellt wurden.

Formulierung eines derartigen Entwicklungssatzes unabhängig von der adjungierten Transformation A^* zu machen, geben wir zunächst die folgende Definition:

A sei ein symmetrischer Operator mit der Eigenschaft (E) *auf* $\mathfrak{S} \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$, $\lambda \neq 0$ *sei ein Eigenwert von* A. *Dann heißt ein Element* e *aus* $\overline{\mathfrak{S}} - \mathfrak{S}$ *generalisierte Eigenlösung von* A *zum Eigenwert* λ, *wenn es eine Folge von Elementen* s_n *aus* $\mathfrak{S}$ *so gibt, daß*

$$s_n \to e \quad \textit{und} \quad (A - \lambda I)\, s_n \to 0$$

strebt für $n \to \infty$.

Offenbar sind die generalisierten Eigenlösungen von A genau die Eigenlösungen von A^* zu Eigenwerten $\neq 0$, die keine Eigenlösungen von A sind. Konstruiert man zu jedem Eigenwert $\lambda \neq 0$ von A eine Orthonormalbasis des (vollständigen) Raumes $\mathfrak{R}(A^* - \lambda I)$ und faßt man diese Basen zusammen, so erhält man, da A^* selbstadjungiert ist, ein Orthonormalsystem aus Eigenlösungen und generalisierten Eigenlösungen von A, das wir *generalisiertes Eigensystem* von A nennen und mit $\mathfrak{E}$ bezeichnen wollen.

Wir wollen nun zwei Sätze aussprechen und beweisen, die zeigen, daß unter gewissen Voraussetzungen eine Entwicklung von As nach dem System $\mathfrak{E}$ möglich ist.

Satz 8. *A sei ein symmetrischer Operator auf* $\mathfrak{S}$, *der* (E) *genügt und höchstens abzählbar viele Eigenwerte besitzt*[12]). *Dann kann jedes Element des Bildbereiches von A nach orthonormalen Eigenlösungen und generalisierten Eigenlösungen von A zu Eigenwerten $\neq 0$ entwickelt werden, d.h. für jedes $s \in \mathfrak{S}$ gilt*

$$A\, s = \sum_{e \in \mathfrak{E}} (A\, s, e)\, e = \sum_{e \in \mathfrak{E}} \lambda (s, e)\, e; \tag{13}$$

hierbei ist $\mathfrak{E}$ das oben definierte Orthonormalsystem.

Beweis. Für jedes $s \in \mathfrak{S}$ ist

$$(A\, s, s) = (A^* s, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\,(E_\lambda s, s)\,, \tag{14}$$

wobei E_λ wie früher die Spektralschar der selbstadjungierten linearen Transformation A^* bedeutet. Die höchstens abzählbar vielen Eigenwerte von A zusammen mit 0 bilden eine bezüglich $(E_\lambda s, s)$ meßbare Menge; das Komplement dieser Menge in $-\infty < \lambda < \infty$ ist also ebenfalls bezüglich $(E_\lambda s, s)$ meßbar, und zwar ist sein Maß Null, weil in jedem seiner Punkte die Ableitung von $(E_\lambda s, s)$ verschwindet, wie aus Hilfssatz 2 zusammen mit (E) sofort folgt. Das Integral in (14) reduziert sich also auf die Summe $\sum \lambda \sigma_\lambda$, wobei $\sigma_\lambda = \left((E_\lambda - E_{\lambda - 0})\, s, s\right)$ ist und λ die von Null verschiedenen Eigenwerte von A durchläuft. Da $(E_\lambda - E_{\lambda - 0})\, s$ die orthogonale Projektion von s auf $\mathfrak{R}(A^* - \lambda I)$, also $\sigma_\lambda = \sum (s, e)\,(e, s)$ ist, wobei e in $\mathfrak{E} \cap \mathfrak{R}(A^* - \lambda I)$ liegt, finden wir schließlich

$$(A\, s, s) = \sum_{e \in \mathfrak{E}} \lambda (s, e)\, (e, s) = \sum_{e \in \mathfrak{E}} \lambda |(s, e)|^2 \tag{15}$$

[12]) Dieser Fall ist immer gegeben, wenn $\mathfrak{S}$ separabel ist.

für jedes $s \in \mathfrak{S}$. Also ist

$$A\,s = \sum \lambda (s, e)\, e = \sum (s, \lambda\, e)\, e = \sum (s, A^*\, e)\, e = \sum (A\, s, e)\, e,$$

womit die Entwicklung (13) bewiesen ist. Die Gl. (15) ist das *Hauptachsentheorem* für den Operator A.

Der Fall, daß man in einer Entwicklung der Form (13) keine generalisierten Eigenlösungen benötigt, ist insbesondere bei den *finiten Operatoren* [13]) gegeben. Dabei nennen wir einen Operator A auf $\mathfrak{S}$ *finit*, wenn für jede komplexe Zahl $\lambda \neq 0$ die Dimension von $\mathfrak{N}(A - \lambda I)$ endlich ist und mit der Dimension des Quotientensystems $\mathfrak{S}/(A - \lambda I)\,\mathfrak{S}$ übereinstimmt. Ist A symmetrisch und finit, so kann man offenbar $\mathfrak{S}$ in der Form

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{N}(A - \lambda I) + (A - \lambda\, I)\,\mathfrak{S} \tag{16}$$

in orthogonale Komplemente zerlegen, wobei der Kern $\mathfrak{N}(A - \lambda I)$ wegen seiner endlichen Dimension ein (vollständiger) Hilbert-Raum ist, und die symmetrischen finiten Operatoren lassen sich durch eine solche Zerlegbarkeit charakterisieren. Es folgt aus diesen Bemerkungen, daß A die Eigenschaft (E) besitzt und den Bedingungen des Satzes 4 genügt, so daß für alle Eigenwerte $\neq 0$ von A die Kerne $\mathfrak{N}(A - \lambda I)$ und $\mathfrak{N}(A^* - \lambda I)$ übereinstimmen. Das Eigensystem $\mathfrak{E}$ von A enthält also nur Eigenlösungen von A. Der folgende Satz zeigt, daß für symmetrische finite Operatoren die Elemente As nach dem Eigensystem $\mathfrak{E}$ entwickelt werden können.

Satz 9 [14]). *Es sei A ein symmetrischer finiter Operator auf $\mathfrak{S}$. Dann besteht für jedes Element s aus $\mathfrak{S}$ die Entwicklung*

$$A\,s = \sum_{e \in \mathfrak{E}} (A\,s, e)\, e = \sum_{e \in \mathfrak{E}} \lambda (s, e)\, e \tag{17}$$

nach orthonormalen Eigenlösungen von A.

Beweis. Für jedes Element s aus $\mathfrak{S}$ gilt die Darstellung (14). $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ seien die (höchstens abzählbar vielen) Eigenwerte von A, in denen die Funktion $(E_\lambda s, s)$ einen Sprung macht: $\left((E_{\lambda_n} - E_{\lambda_n - 0})\, s, s\right) \neq 0$. An allen anderen Stellen ist $(E_\lambda s, s)$ stetig. Ist $\lambda_0 \neq 0$ ein Eigenwert, der mit keinem der obigen Eigenwerte λ_n übereinstimmt, so ist daher $(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 - 0})\, s = 0$, und da $(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 - 0})\, s$ die orthogonale Projektion von s auf den Eigenraum $\mathfrak{N}(A^* - \lambda_0 I)$ darstellt, bedeutet dies, daß s orthogonal zu $\mathfrak{N}(A^* - \lambda_0 I)$, also auch orthogonal zu $\mathfrak{N}(A - \lambda_0 I)$ ist. Die Zerlegung (16) lehrt dann, daß $s = (A - \lambda_0 I)\, w$ mit einem

---

[13]) Symmetrische finite Operatoren wurden in [7] eingeführt und im Anschluß daran in [2] weiter untersucht.

[14]) Dieser Satz wurde – ebenso wie ein Existenzsatz für Eigenwerte symmetrischer finiter Operatoren – zuerst in [7] bewiesen. Unser Beweis zeigt darüber hinaus, daß die Endlichkeitsvoraussetzung für die Dimension von $\mathfrak{N}(A - \lambda I)$ für den Entwicklungssatz unerheblich ist, wenn man nur die Zerlegung (16) beibehält. Allerdings können dann in der Entwicklung (17) auch generalisierte Eigenlösungen von A auftreten, und zwar wegen Satz 4 nur dann, wenn $\mathfrak{N}(A - \lambda I)$ unvollständig ist.

$w \in \mathfrak{S}$ ist, und darüber hinaus, da man w gemäß derselben Zerlegung in der Form $w = k + (A - \lambda_0 I)x$ $(k \in \mathfrak{N}(A - \lambda_0 I),\ x \in \mathfrak{S})$ darstellen kann, daß sogar $s = (A - \lambda_0 I)^2 x$ gilt. Nach Hilfssatz 2 besitzt daher $(E_\lambda s, s)$ in λ_0 eine verschwindende Ableitung. Ist $\xi \neq 0$ eine reelle Zahl, die mit keinem der Eigenwerte von A übereinstimmt, so ist wiederum nach (16) $s = (A - \xi I)^2 x$, und somit besitzt $(E_\lambda s, s)$ auch in ξ eine verschwindende Ableitung. Daraus folgt wie beim Beweis des Satzes 8, daß die Integraldarstellung (14) sich auf die Reihe

$$(A s, s) = \sum_{e_n \in \mathfrak{E}} \lambda_n (s, e_n)(e_n, s) = \sum_{e_n \in \mathfrak{E}} \lambda_n |(s, e_n)|^2$$

reduziert, die das *Hauptachsentheorem für symmetrische finite Operatoren* ausdrückt. Daraus folgt dann sofort die im Satz 9 behauptete Darstellung. Die Elemente e_n sind allesamt Eigenlösungen von A, wie wir schon oben bemerkten.

Wir wollen nun die beiden Klassen von Operatoren, die wir in den Sätzen 8 und 9 betrachtet haben, mit Hilfe ihrer Entwicklungssätze charakterisieren.

Satz 10. *Der Operator A sei auf $\mathfrak{S} \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$ definiert, sei symmetrisch und besitze höchstens abzählbar viele Eigenwerte. Dann sind die folgenden Bedingungen zusammen notwendig und hinreichend dafür, daß A die Eigenschaft* (E) *besitzt:*

(a) *Für jede komplexe Zahl $\zeta \neq 0$, die kein Eigenwert von A ist, ist $A - \zeta I$ schwach abgeschlossen.*

(b) *Für jedes $s \in \mathfrak{S}$ gilt die Entwicklung* (13) *mit einem orthonormalen System $\mathfrak{E}$ von Eigenlösungen und generalisierten Eigenlösungen von A* [15].

(c) *Für jede reelle Zahl $\mu \neq 0$, die Häufungspunkt von Eigenwerten von A ist ohne selbst Eigenwert zu sein, konvergiert die Reihe $\sum \left(\frac{1}{\lambda_n - \mu}\right)^2 |(s, e_n)|^2$ bei beliebigem $s \in \mathfrak{S}$; e_n durchläuft dabei $\mathfrak{E}$, λ_n die zugehörigen Eigenwerte.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen (a) und (b) ist durch die Sätze 5 und 8 bereits dargetan. Ist $\mu \neq 0$ ein Häufungspunkt von Eigenwerten und selbst kein Eigenwert, so ist nach Satz 3 μ auch kein Eigenwert der selbstadjungierten linearen Transformation A^*, also existiert $(A^* - \mu I)^{-1}$ und ist wegen (E) jedenfalls auf $\mathfrak{S}$ definiert. Nach [4], S. 342 und 346 konvergiert also das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - \mu}\right)^2 d(E_\lambda s, s)$ für jedes $s \in \mathfrak{S}$. Wegen Satz 8 reduziert sich dieses Integral gerade auf die in (c) auftretende Reihe. Damit ist auch die Notwendigkeit von (c) bewiesen.

Nun bleibt noch zu zeigen, daß die Bedingungen (a), (b), (c) auch hinreichend sind. Den Beweis hierfür zerlegen wir in mehrere Schritte.

(α) Wir zeigen zuerst, daß A wesentlich selbstadjungiert ist. Nach [5], Theorem 4.16 und 4.17 genügt es nachzuweisen, daß die zu A adjungierte

[15] Wir hatten generalisierte Eigenlösungen zunächst nur für symmetrische Operatoren mit (E) eingeführt. Aber sie lassen sich natürlich für beliebige symmetrische Operatoren einführen, und man sieht dann sofort, daß eine generalisierte Eigenlösung von A zu λ eine Eigenlösung von A^* zu λ ist.

Transformation A^* keine Eigenwerte ζ mit $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$ besitzt. Es sei t ein Element aus dem Definitionsbereich $\mathfrak{E}^* \supseteq \mathfrak{E}$ von A^* und $s \in \mathfrak{E}$. Dann ist wegen (b)

$$(s, A^* t) = (A s, t) = \sum \lambda (s, e)(e, t),$$

also

$$(A^* t, s) = \overline{(s, A^* t)} = \sum \lambda (t, e)(e, s) = \left(\sum \lambda (t, e)\, e, s\right)$$

für jedes $s \in \mathfrak{E}$, und da $\mathfrak{E}$ dicht in $\bar{\mathfrak{E}}$ liegt, folgt daraus

$$A^* t = \sum \lambda (t, e)\, e. \tag{18}$$

Es sei nun $\zeta \neq 0$ ein Eigenwert von A^*, e^* eine zugehörige Eigenlösung. Dann folgt aus (18)

$$\zeta e^* = A^* e^* = \sum \lambda (e^*, e)\, e,$$

$$\zeta (e^*, e^*) = \sum \lambda |(e^*, e)|^2,$$

woraus sich wegen $(e^*, e^*) \neq 0$ und der Realität der Eigenwerte unmittelbar die Realität von ζ ergibt. Also ist A in der Tat wesentlich selbstadjungiert.

(β) Ist $s_n^* \in \mathfrak{E}^*$, $\zeta \neq 0$ und gilt

$$s_n^* \to x^*, \qquad (A^* - \zeta I)\, s_n^* \to s \in \mathfrak{E}, \tag{19}$$

so ist $x^* \in \mathfrak{E}$ und $(A - \zeta I)\, x^* = s$.

Da nämlich A^* und somit auch $A^* - \zeta I$ abgeschlossen ist, folgt aus (19) zunächst, daß $x^* \in \mathfrak{E}^*$ und

$$(A^* - \zeta I)\, x^* = s \tag{20}$$

ist. Da A nach (α) wesentlich selbstadjungiert ist, gibt es zu $x^* \in \mathfrak{E}^*$ eine Folge $s_n \in \mathfrak{E}$, so daß

$$s_n \to x^*, \qquad (A - \zeta I)\, s_n \to t \tag{21}$$

konvergiert und $(A^* - \zeta I)\, x^* = t$ ist[16]). Wegen (20) ist daher $t = s \in \mathfrak{E}$ und daraus folgt mit (21) und (a) weiter, daß $x^* \in \mathfrak{E}$ ist, womit wir (β) bewiesen haben.

(γ) Es sei $\mu \neq 0$ kein Eigenwert von A und s ein beliebiges Element aus $\mathfrak{E}$. Dann ist die Gleichung

$$(A - \mu I)\, x = s \tag{22}$$

stets durch ein $x \in \mathfrak{E}$ auflösbar.

Wir setzen die Lösung x der Gl. (22) gemäß dem bekannten Auflösungsverfahren für Funktionalgleichungen der Gestalt (22) in der Form

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\mu} \frac{1}{\lambda_n - \mu} (s, e_n)\, e_n - \frac{1}{\mu} s \tag{23}$$

[16]) Siehe [5], Theorem 4.17 und Theorem 2.10.

an [17]); e_n durchläuft dabei das System $\mathfrak{E}$ aus (b), λ_n durchläuft die zugehörigen Eigenwerte. Wir zeigen zunächst, daß die Reihe in (23) konvergiert, so daß unser Ansatz sinnvoll ist. Ist μ kein Häufungspunkt von Eigenwerten, so ist die Folge der Zahlen $\frac{\lambda_n}{\mu}\cdot\frac{1}{\lambda_n-\mu}$ beschränkt, und daraus folgt die Konvergenz unserer Reihe nach bekannten Schlüssen. Ist μ ein Häufungspunkt von Eigenwerten, so konvergiert wegen (c) jedenfalls die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n-\mu}\right)^2|(A\,s,e_n)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n-\mu}\right)^2|(s,A^*e_n)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n-\mu}\right)^2|(s,e_n)|^2,$$

also auch die Reihe in (23). Entwickelt man nun $A\,s$ gemäß (b) in die Reihe $A\,s=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\lambda_\alpha(s,e_\alpha)e_\alpha$, so überzeugt man sich durch eine kurze Rechnung davon, daß $(A^*-\mu I)\,s_n^*\to s$ strebt, wobei

$$s_n^*=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\lambda_\alpha}{\mu}\,\frac{1}{\lambda_\alpha-\mu}\,(s,e_\alpha)\,e_\alpha-\frac{1}{\mu}\,s$$

gesetzt ist. s_n^* wird wegen des eventuellen Auftretens generalisierter Eigenlösungen in $\mathfrak{S}^*$ liegen, aber nach (β) liegt der Grenzwert x der Folge s_n^* in $\mathfrak{S}$ und genügt der Gl. (22). Damit ist aber bewiesen, daß A die Eigenschaft (E) besitzt.

Satz 11. *Die folgenden Bedingungen sind zusammen notwendig und hinreichend dafür, daß ein auf $\mathfrak{S}\subseteqq\overline{\mathfrak{S}}$ definierter symmetrischer Operator A finit ist:*

(a) *Für jede komplexe Zahl $\zeta\neq 0$ ist $A-\zeta I$ schwach abgeschlossen.*

(b) *Alle von Null verschiedenen Eigenwerte von A haben endliche Vielfachheit.*

(c) *Für jedes $s\in\mathfrak{S}$ gilt die Entwicklung* (17) *mit einem orthonormalen System $\mathfrak{E}$ von Eigenlösungen von A.*

(d) *Ist $\mu\neq 0$ ein Häufungspunkt von Eigenwerten von A und $s\in\mathfrak{S}$ orthogonal zu $\mathfrak{N}(A-\mu I)$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n-\mu}\right)^2|(s,e_n)|^2$, wobei e_n alle Eigenlösungen aus $\mathfrak{E}$ mit $(s,e_n)\neq 0$ und nur diese durchläuft; λ_n sind die zugehörigen Eigenwerte* [18]).

Wir beweisen zunächst, daß diese Bedingungen notwendig sind. Da A als finiter Operator die Eigenschaft (E) besitzt, ist $A-\zeta I$ nach Satz 5 jedenfalls für alle Zahlen $\zeta\neq 0$ schwach abgeschlossen, die keine Eigenwerte von A sind. Nun sei $\zeta\neq 0$ ein Eigenwert von A und es strebe

$$s_n\to\bar{s}\quad(s_n\in\mathfrak{S}),\qquad(A-\zeta I)\,s_n\to t\in\mathfrak{S}. \tag{24}$$

Aus (24) folgt wegen der Abgeschlossenheit von A^*, daß

$$\bar{s}\in\mathfrak{S}^*\quad\text{und}\quad(A^*-\zeta I)\,\bar{s}=t \tag{25}$$

[17]) Siehe etwa [4], S. 233.

[18]) λ_n kann also niemals mit μ übereinstimmen, so daß $\frac{1}{\lambda_n-\mu}$ für alle n definiert ist.

ist. Nun besitzt t nach (16) die Zerlegung

$$t = k + (A - \zeta I)\, s \quad \text{mit} \quad k \in \mathfrak{N}(A - \zeta I), \qquad s \in \mathfrak{S}.$$

Daraus folgt mit (25), daß

$$(A^* - \zeta I)(\bar{s} - s) = k \tag{26}$$

ist. Da aber der Bildbereich der symmetrischen Transformation A^* orthogonal zu $k \in \mathfrak{N}(A - \zeta I)$ ist, ergibt sich aus (26), daß $k = 0$, also $\bar{s} - s = k^* \in \mathfrak{N}(A^* - \zeta I)$ ist. Da nach Satz 4 die Kerne $\mathfrak{N}(A^* - \zeta I)$ und $\mathfrak{N}(A - \zeta I)$ übereinstimmen, folgt, daß $k^* \in \mathfrak{S}$, also auch $\bar{s} = k^* + s$ ein Element aus $\mathfrak{S}$ ist, was zusammen mit (25) die schwache Abgeschlossenheit von $A - \zeta I$ ergibt.

(b) folgt unmittelbar aus der Definition der Finitheit, (c) gilt nach Satz 9. Ist die Zahl μ in (d) selbst kein Eigenwert von A, so beweist man (d) ganz entsprechend wie (c) in Satz 10. Für den Fall, daß μ ein Eigenwert ist, benötigen wir einen Hilfssatz, der auch an sich von Interesse ist und den wir gleich etwas allgemeiner formulieren wollen, als in diesem Zusammenhang nötig ist.

Hilfssatz 3. *Ist $\mathfrak{S}$ zerlegt in orthogonale Komplemente $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, also*

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2, \qquad \mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2 = \{0\} \tag{27}$$

und ist $\mathfrak{U}_1$ invariant unter dem symmetrischen finiten Operator A, so ist die Einschränkung A' von A auf $\mathfrak{U}_1$ ebenfalls ein symmetrischer finiter Operator.

Den Beweis des Hilfssatzes verschieben wir auf später, um unsere gegenwärtige Darstellung nicht zu unterbrechen. Ist $\mu \neq 0$ ein Eigenwert von A, so haben wir in $\mathfrak{S} = \mathfrak{N}(A - \mu I) + (A - \mu I)\,\mathfrak{S}$ eine Zerlegung des Raumes $\mathfrak{S}$ von der im Hilfssatz 3 genannten Art, und da $(A - \mu I)\,\mathfrak{S}$ unter A invariant ist, ist also die Einschränkung A' von A auf $(A - \mu I)\,\mathfrak{S}$ symmetrisch und finit. Die Eigenwerte von A' sind offenbar genau die von μ verschiedenen Eigenwerte von A. Aus diesen Bemerkungen folgt wie oben, als wir (d) für den Fall eines Nichteigenwertes μ bewiesen, daß die Reihe in (d) für jedes Element s der Form $s = (A - \mu I)\, x$, also für jedes s orthogonal zu $\mathfrak{N}(A - \mu I)$ konvergiert.

Wir zeigen nun, daß die Bedingungen (a)–(d) auch hinlänglich sind. Ist $\mu \neq 0$ kein Eigenwert von A, so ist die Gleichung

$$(A - \mu I)\, x = s \tag{28}$$

für jedes $s \in \mathfrak{S}$ auflösbar, was man genau so beweist wie die entsprechende Behauptung im Teil (γ) des Beweises zu Satz 10[19]). Es sei nun $\mu \neq 0$ ein Eigenwert von A. Wegen (b) ist $\mathfrak{N}(A - \mu I)$ von endlicher Dimension, also ein vollständiger Hilbert-Raum, und daher gibt es zu $\mathfrak{N}(A - \mu I)$ ein orthogonales Komplement $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{S}$[20]). Da wegen der Realität von μ der Operator

[19]) Dabei tritt eine Vereinfachung dadurch ein, daß die Größen s_n^* alle in $\mathfrak{S}$ liegen. Man braucht also nicht die auf (β) gestützte Zusatzüberlegung, sondern kann unmittelbar (α) anwenden.

[20]) Siehe [8], S. 116, Theorem 3.

$A-\mu I$ symmetrisch ist, liegt $(A-\mu I)\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{C}$, und es genügt nun offenbar nachzuweisen, daß für jedes $s\in\mathfrak{C}$, d.h. für jedes zu $\mathfrak{N}(A-\mu I)$ orthogonale Element s die Gl. (28) auflösbar ist. Dies zeigt man wiederum mittels des Verfahrens, das im Teil (γ) des Beweises von Satz 10 benutzt wurde, wobei man in den Ansatz (23) nur die $e_n\in\mathfrak{E}$ mit $(s,e_n)\neq 0$ aufnimmt und bei der Konvergenzbetrachtung zum Schluß die durch (a) gesicherte schwache Abgeschlossenheit von $A-\mu I$ heranziehen muß.

Um den Beweis des Satzes 11 vollständig zu machen, haben wir nun nur noch den sehr einfachen Beweis des Hilfssatzes 3 nachzutragen.

Die Symmetrie des Operators A' in diesem Hilfssatz versteht sich von selbst, und aus der Symmetrie von A und der Orthogonalität der Teilräume $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ folgt sehr einfach, daß mit $\mathfrak{U}_1$ auch $\mathfrak{U}_2$ unter A invariant ist. Nun genügt es ersichtlich zu zeigen, daß man für jede Zahl $\lambda\neq 0$ den Raum $\mathfrak{U}_1$ in der Form

$$\mathfrak{U}_1=\mathfrak{N}(A'-\lambda I)+(A'-\lambda I)\,\mathfrak{U}_1 \tag{29}$$

zerlegen kann[21]). Es sei u_1 ein beliebiges Element von $\mathfrak{U}_1$. Nach (16) ist

$$u_1=k+(A-\lambda I)\,s,\qquad k\in\mathfrak{N}(A-\lambda I),\qquad s\in\mathfrak{S}, \tag{30}$$

und nach (27) ist

$$k=k_1+k_2,\qquad s=s_1+s_2;\qquad k_i,s_i\in\mathfrak{U}_i,\qquad i=1,2.$$

Mit (30) folgt aus diesen Zerlegungen die Gleichung

$$u_1-k_1-(A-\lambda I)\,s_1=k_2+(A-\lambda I)\,s_2,$$

wobei die linke Seite in $\mathfrak{U}_1$, die rechte jedoch in $\mathfrak{U}_2$ liegt. Also muß die linke Seite verschwinden, d.h. es ist

$$u_1=k_1+(A-\lambda I)\,s_1=k_1+(A'-\lambda I)\,s_1. \tag{31}$$

Nun brauchen wir nur noch zu zeigen, daß $k_1\in\mathfrak{N}(A'-\lambda I)$ ist. Das ist aber fast selbstverständlich; denn wegen $0=(A-\lambda I)k=(A-\lambda I)k_1+(A-\lambda I)k_2$ ist $(A-\lambda I)k_1=-(A-\lambda I)k_2$, und da bei dieser Gleichung wiederum die linke Seite in $\mathfrak{U}_1$, die rechte jedoch in $\mathfrak{U}_2$ liegt, ist $(A-\lambda I)k_1=(A'-\lambda I)k_1=0$, also $k_1\in\mathfrak{N}(A'-\lambda I)$. Damit ist der Hilfssatz 3 bewiesen.

Erinnern wir uns noch einmal an das erste Beispiel für einen Operator, der die Eigenschaft (E) besitzt, am Anfang dieser Arbeit! Wählt man dort die Diagonalelemente der Matrix $\mathfrak{A}$ etwa alle reell und paarweise verschieden, so stellt $\mathfrak{A}$ einen symmetrischen finiten Operator auf dem Raum $\mathfrak{S}_0$ dar. Man sieht an diesem Beispiel, daß die Spektren symmetrischer finiter Operatoren sehr mannigfache Formen annehmen können. Diese Situation ändert sich jedoch sofort, wenn der Raum $\mathfrak{S}$ vollständig ist. Es gilt nämlich der folgende Satz:

[21]) $\mathfrak{N}(A'-\lambda I)$ ist als Unterraum von $\mathfrak{N}(A-\lambda I)$ trivialerweise von endlicher Dimension.

Satz 12. *Ist A ein symmetrischer finiter Operator auf dem vollständigen Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$, so können sich die Eigenwerte von A nur im Nullpunkt häufen, und A ist vollstetig.*

Beweis. Da $\mathfrak{H}$ vollständig ist, folgt aus der Orthogonalzerlegung (16) in leicht ersichtlicher Weise, daß $(A-\lambda I)\mathfrak{H}$ für jedes $\lambda \neq 0$ abgeschlossen, also auch vollständig ist. Außerdem ist nach dem Satz von HELLINGER-TOEPLITZ [22]) A beschränkt, also ist auch $A'-\lambda I$, die Einschränkung von $A-\lambda I$ auf $(A-\lambda I)\mathfrak{H}$ beschränkt. Aus diesen beiden Bemerkungen und dem Umstand, daß $A'-\lambda I$ den Raum $(A-\lambda I)\mathfrak{H}$ eineindeutig auf sich abbildet, folgt nach [*1*], S. 41, Théorème 5, daß $(A'-\lambda I)^{-1}$ beschränkt ist. Wäre λ ein Häufungspunkt von Eigenwerten, so gäbe es eine Folge von Eigenwerten $\lambda_n \neq \lambda$, die gegen λ strebt; e_n sei eine normierte Eigenlösung zu λ_n. Alle e_n liegen offenbar in $(A-\lambda I)\mathfrak{H}$, und es gilt

$$(A'-\lambda I)\,e_n = (A-\lambda_n I)\,e_n + (\lambda_n-\lambda)\,e_n = (\lambda_n-\lambda)\,e_n \to 0,$$

also auch

$$e_n = (A'-\lambda I)^{-1}(A-\lambda I)\,e_n \to 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty,$$

im Widerspruch zu $\|e_n\|=1$. In der Tat können sich also die Eigenwerte von A nur in 0 häufen. Zusammen mit Satz 9 folgt daraus nach der spektralen Charakterisierung der vollstetigen Operatoren [23]), daß A vollstetig ist.

Für allgemeine symmetrische Operatoren mit der Eigenschaft (E) auf vollständigen Hilbert-Räumen gilt keine ähnlich einfache Aussage über die Struktur des Spektrums, wie etwa das zweite Beispiel am Anfang dieser Arbeit lehrt. Nimmt man jedoch die zusätzliche Voraussetzung auf, daß höchstens abzählbar viele Eigenwerte vorhanden sind, so kann man jedenfalls den folgenden Satz beweisen.

Satz 13. *Ist A ein symmetrischer Operator mit der Eigenschaft* (E) *auf einem vollständigen Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$, so ist jeder von Null verschiedene Häufungspunkt von Eigenwerten selbst ein Eigenwert von A. Besitzt A höchstens abzählbar viele Eigenwerte, so ist mindestens ein von Null verschiedener Eigenwert isoliert.*

Beweis. Ist $\mu \neq 0$ kein Eigenwert, so existiert wegen (E) die Inverse $(A-\mu I)^{-1}$ auf ganz $\mathfrak{H}$ und ist nach [*1*], S. 41, Théorème 5 beschränkt, da A und somit auch $A-\mu I$ nach dem oben zitierten Satz von HELLINGER-TOEPLITZ beschränkt ist. μ ist dann also ein (innerer) Punkt der Resolventenmenge von A. Jeder Häufungspunkt von Eigenwerten von A ist also entweder der Nullpunkt oder selbst ein Eigenwert. Die Menge, die aus allen Eigenwerten von A und der Null besteht, falls $0 \in Sp(A)$, ist also abgeschlossen. Nach Satz 7 besitzt diese Menge mindestens ein von Null verschiedenes Element. Ist sie höchstens abzählbar, so kann sie nicht auch noch in sich

[22]) Siehe [*4*], S. 295.
[23]) Siehe [*4*], S. 232.

dicht sein; denn dann wäre sie perfekt, also überabzählbar. Sie besitzt also einen isolierten Punkt. Ist dieser Punkt der Nullpunkt, so können wir ihn herausnehmen und auf die (nicht-leere, abgeschlossene und höchstens abzählbare) Restmenge denselben Schluß anwenden, der die Behauptung des Satzes beweist.

Literatur

[1] Banach, S.: Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932. — [2] Heuser, H.: Über Operatoren mit endlichen Defekten. Diss. Tübingen 1956. — [3] Loomis, L. H.: The Converse of the Fatou Theorem for Positive Harmonic Functions. Trans. Amer. Math. Soc. **53**, 239—250 (1943). — [4] Riesz, F., et B. v. Sz.-Nagy: Leçons d'analyse fonctionnelle. Budapest 1952. — [5] Stone, M. H.: Linear Transformations in Hilbert, Space and their Applications to Analysis. New York 1932. — [6] Wielandt, H.: Über die Eigenwertaufgaben mit reellen diskreten Eigenwerten. Math. Nachr. **4**, 308—314 (1950/51). — [7] Wielandt, H.: Allgemeine Eigenwerttheorie. Vorlesung SS 1952, Tübingen. — [8] Zaanen, A. C.: Linear Analysis. Amsterdam-Groningen 1953.

Karlsruhe, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 3. Februar 1960)

TAMASCHKE, O.
Math. Zeitschr. 74, 186—190 (1960)

Submodulare Verbände

Herrn ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von
OLAF TAMASCHKE

In der Theorie der Verbände betrachtet man häufig projektive Intervalle. Das geschieht zumeist so, daß in der Menge aller Intervalle eines Verbandes die Äquivalenzrelation der Projektivität eingeführt wird. In längenendlichen Verbänden ist es zuweilen jedoch zweckmäßiger, sich auf die Menge aller Primquotienten zu beschränken und in dieser Menge die Äquivalenzrelation der Projektivität zu erklären.

In der Gruppentheorie interessiert man sich für den Verband $s\mathfrak{G}$ der subnormalen Untergruppen einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ mit endlicher Kompositionsreihe. Eine genauere Untersuchung des Verbandes $s\mathfrak{G}$ (die in einer nachfolgenden Arbeit durchgeführt wird) legt es nahe, nach denjenigen längenendlichen Verbänden zu fragen, in denen sich die projektiven Primquotienten ähnlich verhalten wie die projektiven Kompositionsfaktorgruppen in $s\mathfrak{G}$.

Das ist für uns der Beweggrund, die Axiome der Halbmodularität nach unten wie nach oben abzuschwächen. Es gelingt so, eine Klasse von längenendlichen Verbänden auszuzeichnen, die mit einigen Eigenschaften an die modularen längenendlichen Verbände heranreichen, die aber andererseits nicht alle die Jordan-Dedekindsche Kettenbedingung erfüllen. Wir kennzeichnen die Verbände dieser Klasse durch ihre Kongruenzrelationen (Satz 1) und charakterisieren ihre neutralen Elemente mit Hilfe der Projektivität von Primquotienten (Satz 3).

Es sei L ein längenendlicher Verband, d.h. jede Kette zwischen irgend zwei Elementen $a \geqq b$ von L habe endliche Länge. Wir schreiben $a \cdot > b$, wenn a oberer Nachbar ist von b. Ein Paar von benachbarten Elementen $a \cdot > b$ nennen wir auch einen Primquotienten a/b von L. Mit K_L bezeichnen wir die Menge aller Primquotienten von L. Es ist $a/b = c/d$ in K_L genau dann, wenn $a = c$ und $b = d$ gilt.

Zwei Primquotienten a/b und c/d heißen *transponiert*, wenn ($a = b \cup c$ *und* $d = b \cap c$) oder ($c = a \cup d$ *und* $b = a \cap d$) gilt; sie heißen *projektiv* (in Zeichen: $a/b \pi c/d$), wenn eine Kette transponierter Primquotienten existiert, die von a/b zu c/d führt. π ist eine Äquivalenzrelation in K_L. Es sei K_L/π die Menge aller Äquivalenzklassen von K_L nach π.

$\varkappa$ sei eine Kongruenzrelation in L, d.h. eine Äquivalenzrelation, die mit den Verknüpfungen von L verträglich ist. Ist der Primquotient a/b projektiv zu c/d, so gilt $a \equiv b \pmod{\varkappa}$ genau dann, wenn $c \equiv d \pmod{\varkappa}$. Zum Beweis dieser Aussage gehe man auf transponierte Primquotienten zurück.

Die Kongruenzrelationen in L bilden einen distributiven Verband $\hat{L}$ [1, S. 23, Theor. 4, S. 24 Theor. 5 und S. 133 Theor. 1]. Ist a/b ein Primquotient und sind $\varkappa$, λ Kongruenzrelationen in L, so gilt

$a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, \varkappa \cap \lambda)$ genau dann, wenn $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, \varkappa)$ *und* $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, \lambda)$,
$a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, \varkappa \cup \lambda)$ genau dann, wenn $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, \varkappa)$ *oder* $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, \lambda)$.

Wir fassen das Ergebnis dieser Betrachtungen zusammen.

LEMMA. *Jede Kongruenzrelation $\varkappa$ in einem längenendlichen Verband L ist eindeutig bestimmt durch die Menge $\mathsf{B}_\varkappa \subseteq K_L/\pi$ derjenigen Äquivalenzklassen $\mathfrak{p}$ aus K_L/π, die von $\varkappa$ „annulliert" werden: Aus $a/b \in \mathfrak{p}$ folgt $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, \varkappa)$. Die Abbildung $\varkappa \to \mathsf{B}_\varkappa$ ist ein Isomorphismus von $\hat{L}$ auf einen Teilverband des Verbandes $\mathfrak{P}(K_L/\pi)$ aller Teilmengen von K_L/π, der, den trivialen Kongruenzrelationen entsprechend, die leere Menge $\varnothing$ und die Gesamtmenge K_L/π als Null- und Einselement enthält.*

Als Verallgemeinerung der Halbmodularität nach unten bzw. nach oben (lower resp. upper semi-modularity [1, S. 100]) führen wir die folgenden Axiome ein:

($\underline{\mathrm{S}}$) *Aus $x \cup y \cdot > y$ folgt: Alle Primquotienten p/q mit $x \geqq p \cdot > q \geqq x \cap y$ sind projektiv zu $x \cup y/y$.*

($\overline{\mathrm{S}}$) *Aus $x \cdot > x \cap y$ folgt: Alle Primquotienten p/q mit $x \cup y \geqq p \cdot > q \geqq y$ sind projektiv zu $x/x \cap y$.*

DEFINITION. *Ein längenendlicher Verband L heißt „submodular", wenn ($\underline{\mathrm{S}}$) und ($\overline{\mathrm{S}}$) in L gelten.*

Der längenendliche Verband L sei submodular. Beim Übergang zum dualen Verband von L gehen Primquotienten wieder in Primquotienten und projektive Primquotienten wieder in projektive Primquotienten über. ($\underline{\mathrm{S}}$) und ($\overline{\mathrm{S}}$) werden dabei miteinander vertauscht. Der zu L duale Verband ist submodular. *Es gilt das Dualitätsprinzip für submodulare längenendliche Verbände.*

SATZ 1. *Ein längenendlicher Verband L ist genau dann submodular, wenn es zu jeder Teilmenge $\mathsf{B} \subseteq K_L/\pi$ eine Kongruenzrelation $\varkappa_\mathsf{B}$ in L gibt, die genau die Klassen $\mathfrak{p} \in \mathsf{B}$ annulliert (d.h. wenn die Abbildung $\varkappa \to \mathsf{B}_\varkappa$ sogar ein Isomorphismus von $\hat{L}$ auf $\mathfrak{P}(K_L/\pi)$ ist).*

BEWEIS. (a) L sei submodular und B eine beliebige Teilmenge von K_L/π. Wir definieren eine Relation $\varkappa_\mathsf{B}$ in L: Es sei $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, \varkappa_\mathsf{B})$ genau dann, wenn $a = b$ ist, oder wenn es Elemente $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$ gibt, derart, daß

$$(a_{i-1} \cdot > a_i \text{ und } \mathfrak{p}(a_{i-1}/a_i) \in \mathsf{B}) \quad \text{oder} \quad (a_i \cdot > a_{i-1} \text{ und } \mathfrak{p}(a_i/a_{i-1}) \in \mathsf{B})$$

gilt für $i = 1, \ldots, n$. $\varkappa_\mathsf{B}$ ist eine Äquivalenzrelation in L. Wir zeigen, daß $a_{i-1} \cap c \equiv a_i \cap c \,(\mathrm{mod}\, \varkappa_\mathsf{B})$ und $a_{i-1} \cup c \equiv a_i \cup c \,(\mathrm{mod}\, \varkappa_\mathsf{B})$ zutrifft für $i = 1, \ldots, n$ und jedes $c \in L$. Dann gilt auch $a \cap c \equiv b \cap c \,(\mathrm{mod}\, \varkappa_\mathsf{B})$ und $a \cup c \equiv b \cup c \,(\mathrm{mod}\, \varkappa_\mathsf{B})$ für jedes $c \in L$. $\varkappa_\mathsf{B}$ ist dann eine Kongruenzrelation in L.

Wir setzen o.B.d.A. $a_{i-1} \cdot > a_i$ voraus. Ist $a_{i-1} \cap c \neq a_i \cap c$, also $(a_{i-1} \cap c) \cup a_i = a_{i-1} \cdot > a_i$, so folgt mit ($\underline{\mathrm{S}}$), daß alle Primquotienten zwischen $a_{i-1} \cap c$ und

$a_i \cap c$ in $\mathfrak{p}(a_{i-1}/a_i) \in \mathsf{B}$ liegen. Daher ist $a_{i-1} \cap c \equiv a_i \cap c \pmod{\varkappa_{\mathsf{B}}}$. Gilt $a_{i-1} \cup c \neq a_i \cup c$, also $a_{i-1} \cdot > a_i = a_{i-1} \cap (a_i \cup c)$, dann folgern wir mit $(\overline{\mathrm{S}})$, daß alle Primquotienten zwischen $a_{i-1} \cup c$ und $a_i \cup c$ in $\mathfrak{p}(a_{i-1}/a_i) \in \mathsf{B}$ enthalten sind. Somit ist $a_{i-1} \cup c \equiv a_i \cup c \pmod{\varkappa_{\mathsf{B}}}$.

(b) Wir setzen voraus, daß zu jeder Teilmenge B von K_L/π eine Kongruenzrelation existiert, die genau die Klassen aus B annulliert. Es sei $x \cup y \cdot > y$ und $\varkappa$ die durch $\mathsf{B} = \{\mathfrak{p}(x \cup y/y)\}$ bestimmte Kongruenzrelation in L. Es gilt $x \cup y \equiv y \pmod{\varkappa}$ und daraus folgt $x = x \cap (x \cup y) \equiv x \cap y \pmod{\varkappa}$. Mithin liegen alle Primquotienten zwischen x und $x \cap y$ in $\mathfrak{p}(x \cup y/y)$ und daher ist $(\underline{\mathrm{S}})$ erfüllt. Ist $x \cdot > x \cap y$, dann betrachten wir die durch $\Gamma = \{\mathfrak{p}(x/x \cap y)\}$ bestimmte Kongruenzrelation λ in L. Aus $x \equiv x \cap y \pmod{\lambda}$ folgt $x \cup y \equiv (x \cap y) \cup y = y \pmod{\lambda}$, d.h. alle Primquotienten zwischen $x \cup y$ und y gehören zu $\mathfrak{p}(x/x \cap y)$. $(\overline{\mathrm{S}})$ gilt in L und L ist ein submodularer längenendlicher Verband.

SATZ 2. *Es sei L ein submodularer längenendlicher Verband und a, b seien Elemente von L. Sind $a = a_0 \cdot > a_1 \cdot > \cdots \cdot > a_r = a \cap b$ und $a \cup b = b_0 \cdot > b_1 \cdot > \cdots \cdot > b_s = b$ zwei beliebige maximale Ketten von a bis $a \cap b$ und von $a \cup b$ bis b, so ist die Menge der Klassen $\mathfrak{p}(a_{i-1}/a_i) \in K_L/\pi$ $(i = 1, \ldots, r)$ gleich der Menge der Klassen $\mathfrak{p}(b_{k-1}/b_k) \in K_L/\pi$ $(k = 1, \ldots, s)$, d.h. jeder Primquotient a_{i-1}/a_i ist projektiv zu einem Primquotienten b_{k-1}/b_k und jeder Primquotient b_{k-1}/b_k ist projektiv zu einem Primquotienten a_{j-1}/a_j.*

BEWEIS. Es seien α, β die zur Menge A der $\mathfrak{p}(a_{i-1}/a_i)$ bzw. zur Menge B der $\mathfrak{p}(b_{k-1}/b_k)$ gehörigen Kongruenzrelationen in L. Es gilt $a \equiv a \cap b \pmod{\alpha}$ und daraus folgt $a \cup b \equiv (a \cap b) \cup b = b \pmod{\alpha}$, also $\mathsf{B} \subseteq \mathsf{A}$. Entsprechend ist $a \cup b \equiv b \pmod{\beta}$ und daher auch $a = a \cap (a \cup b) \equiv a \cap b \pmod{\beta}$, d.h. $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{B}$. Mithin ist $\mathsf{A} = \mathsf{B}$.

Ein Element a eines Verbandes L heißt *neutral* in L, wenn für beliebige Elemente x, y aus L der von a, x, y erzeugte Verband distributiv ist [1, S. 28].

SATZ 3. *Es sei L ein submodularer längenendlicher Verband und a ein Element von L. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

(1) *a ist neutral in L.*
(2) *Die Abbildung $x \to x \cap a$ ist ein Endomorphismus von L.*
(3) *Die Abbildung $x \to x \cup a$ ist ein Endomorphismus von L.*
(4) *Kein Primquotient p/q, $q \geqq a$ ist projektiv zu einem Primquotienten r/s, $a \geqq r$.*

BEWEIS. I) Wir zeigen, daß (4) aus (2) folgt. Angenommen, es gibt einen Primquotienten p/q, $q \geqq a$, der projektiv ist zu einem Primquotienten r/s, $a \geqq s$. Dann wird p/q von der Abbildung $x \to x \cap a$ annulliert, d.h. es gilt $p \cap a = q \cap a$. Hingegen wird der Primquotient r/s von dieser Abbildung nicht annulliert. Sie kann keinen Endomorphismus von L liefern, weil jeder Verbandshomomorphismus mit p/q auch r/s annulliert.

II) Aus (4) folgt (2). Es sei $\Delta = \Delta(a)$ die Menge aller Klassen $\mathfrak{p}(p/q) \in K_L/\pi$, die einen Primquotienten p/q, $q \geqq a$ enthalten. $\delta = \delta(a)$ sei die zugehörige Kongruenzrelation in L. Wir zeigen zunächst, daß $x \cap a = y \cap a$ genau dann

gilt, wenn $x \equiv y (\mathrm{mod}\ \delta)$. Gilt $h \cap a = k \cap a$ für einen Primquotienten h/k, so ist h nicht in a enthalten, also $h \cup a > a$. Nach Satz 2 ist jeder Primquotient aus einer Kette $h \cdot > k \cdot > \cdots \cdot > k \cap a = h \cap a$ projektiv zu einem Primquotienten p/q aus einer Kette $h \cup a \cdot > \cdots > a$. Folglich ist $\mathfrak{p}(h/k)$ in Δ enthalten. Andererseits wird auch jeder Primquotient h/k mit $\mathfrak{p}(h/k) \in \Delta$ beim Schnitt mit a annulliert. Denn angenommen, es ist $h \cap a > k \cap a$, also $h = (h \cap a) \cup k \cdot > k$. Wegen (S) ist jeder Primquotient zwischen $h \cap a$ und $k \cap a$ projektiv zu h/k. Nach Definition von Δ gibt es einen Primquotienten p/q, $q \geqq a$, der projektiv ist zu h/k und daher auch projektiv ist zu einem Primquotienten r/s zwischen $h \cap a$ und $k \cap a$. Das ist ein Widerspruch gegen (4). Die Abbildung $x \to x \cap a$ annulliert mithin genau die Primquotienten h/k, die zu einer Äquivalenzklasse aus Δ gehören. Sie ruft in L die Kongruenzrelation δ hervor. Es gilt $x \equiv x \cap a (\mathrm{mod}\ \delta)$ für alle $x \in L$. Die Kongruenzrelation δ stimmt auf dem Teilverband aller $c \leqq a$ mit der Gleichheitsrelation überein. Aus $(x \cap a) \cup (y \cap a) \equiv x \cup y \equiv (x \cup y) \cap a (\mathrm{mod}\ \delta)$ folgt daher $(x \cap a) \cup (y \cap a) = (x \cup y) \cap a$ für alle $x, y, \in L$. Die Gleichung $(x \cap a) \cap (y \cap a) = (x \cap y) \cap a$ ist trivial. Der Schnitt mit a ist ein Endomorphismus von L.

III) Die Aussage (4) bleibt erhalten, wenn wir zum dualen Verband übergehen. Aus der Gleichwertigkeit von (2) und (4) und aus dem Dualitätsprinzip für submodulare längenendliche Verbände folgt, daß auch (3) und (4) gleichwertig sind.

IV) Aus (1) folgen (2) und (3). Wir setzen jetzt (2) voraus. Dann gilt auch (3). Nach [*1*, S. 28 Theor. 10] folgt (1), wenn wir die folgende Aussage beweisen: Aus $x \cup a = y \cup a$ und $x \cap a = y \cap a$ folgt $x = y$.

Es gelte $x \cup a = y \cup a$ und $x \cap a = y \cap a$. Angenommen, es ist $x \neq y$. Ein beliebiger Primquotient t/u aus einer maximalen Kette $x \cdot > \cdots > x \cap y \geqq x \cap a$ ist nach Satz 2 projektiv zu einem Primquotienten p/q zwischen $x \cup a$ und a. Nach dem gleichen Satz (angewandt auf x, y) existiert zwischen $x \cup y$ und y ein Primquotient v/w, der projektiv ist zu t/u. Wenden wir Satz 2 jetzt auf a, y an, so folgt wegen $a \cup y \geqq x \cup y$ die Existenz eines Primquotienten r/s zwischen a und $a \cap y$, der projektiv ist zu v/w. Dann ist der Primquotient p/q oberhalb a projektiv zum Primquotienten r/s unterhalb a. Das widerspricht der bereits bewiesenen Gleichwertigkeit von (2) und (4). Also ist $x = y$. Damit ist der Beweis von Satz 3 vollendet.

Es gibt submodulare längenendliche Verbände, die Elemente $a > b$ enthalten mit der Eigenschaft, daß nicht alle maximalen Ketten von a bis b gleichlang sind.

Beispiel. Es sei V der Verband aller Untergruppen der Kleinschen Vierergruppe. Die Verbände V_1 und V_2 seien isomorph zu V. Wir fügen V_1 und V_2 zu einem neuen Verband zusammen, indem wir das maximale Element von V_1 mit dem maximalen Element von V_2 identifizieren und das minimale Element von V_1 als oberen Nachbarn über das minimale Element von V_2 setzen. In dem so entstehenden Verband S_9 aus 9 Elementen sind alle Primquotienten zueinander projektiv. S_9 ist daher submodular. Es gibt aber zwischen dem

maximalen und dem minimalen Element von S_9 sowohl maximale Ketten der Länge 2 als auch maximale Ketten der Länge 3.

Ein Teilverband eines submodularen längenendlichen Verbandes ist im allgemeinen kein submodularer Verband. So bilden in S_9 die Elemente einer maximalen Kette der Länge 2 zusammen mit den Elementen einer maximalen Kette der Länge 3 einen Teilverband L_5 aus 5 Elementen, der nicht submodular ist. Hingegen gilt

SATZ 4. *Jedes homomorphe Bild eines submodularen längenendlichen Verbandes L ist ein submodularer längenendlicher Verband.*

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, daß die Restklassenstruktur $L/\varkappa$ von L nach einer beliebigen Kongruenzrelation $\varkappa$ in L einen submodularen längenendlichen Verband bildet. Mit $\bar{x}$ bezeichnen wir die Menge aller $y \equiv x \pmod{\varkappa}$, also das Bild von x bei dem natürlichen Homomorphismus von L auf $L/\varkappa$.

$L/\varkappa$ ist ein längenendlicher Verband. Wir setzen $\overline{x \cup y} = \bar{x} \cup \bar{y} \cdot > \bar{y}$ voraus. In einer maximalen Kette $x \cup y = a_0 \cdot > a_1 \cdot > \cdots > a_m = y$ gibt es ein kleinstes Element $a_i \equiv x \cup y \pmod{\varkappa}$ und ein größtes Element $a_j \equiv y \pmod{\varkappa}$. Unsere Voraussetzung besagt $j = i+1$. Denn aus $a_i > a_k > a_j$ folgt $a_k \not\equiv a_i \pmod{\varkappa}$ und $a_k \not\equiv a_j \pmod{\varkappa}$, also $\bar{x} \cup \bar{y} = \bar{a}_i > \bar{a}_k > \bar{a}_j = \bar{y}$. Wird $\varkappa$ durch $\mathsf{B} \subseteqq K_L/\pi$ bestimmt (Satz 1), so sind alle Klassen $\mathfrak{p}(a_l/a_{l+1})$ in B enthalten bis auf $\mathfrak{p}(a_i/a_{i+1})$. In jeder maximalen Kette $x = b_0 \cdot > b_1 \cdot > \cdots \cdot > b_n = x \cap y$ gilt daher nach Satz 2 $b_k \not\equiv b_{k+1} \pmod{\varkappa}$ genau dann, wenn $b_k/b_{k+1} \pi a_i/a_{i+1}$. Daraus folgt $\bar{b}_k/\bar{b}_{k+1} \pi \bar{a}_i/\bar{a}_{i+1} = \bar{x} \cup \bar{y}/\bar{y}$. Das heißt aber: Alle Primquotienten $\bar{p}/\bar{q}$ zwischen $\bar{x}$ und $\bar{x} \cap \bar{y} = \overline{x \cap y}$ sind projektiv zu $\bar{x} \cup \bar{y}/\bar{y}$. Folglich gilt (S) in $L/\varkappa$.

Wir bilden den zu L dualen Verband $\tilde{L}$. Dabei geht $\varkappa$ in eine Kongruenzrelation $\tilde{\varkappa}$ von $\tilde{L}$ über. In $\tilde{L}/\tilde{\varkappa}$ gilt (S) nach dem eben Bewiesenen. $L/\varkappa$ ist dual zu $\tilde{L}/\tilde{\varkappa}$. Beim Übergang von $\tilde{L}/\tilde{\varkappa}$ zu $L/\varkappa$ geht (S) in ($\bar{\text{S}}$) über. $L/\varkappa$ ist ein submodularer längenendlicher Verband.

Die Sätze 3 und 4 gestatten es, in jedem submodularen längenendlichen Verband eine Restklassenstruktur zu bilden, die eine gewisse Ähnlichkeit mit der Kommutatorfaktorgruppe einer Gruppe besitzt.

SATZ 5. *Es sei L ein submodularer längenendlicher Verband. Mit Δ bezeichnen wir die Menge aller Klassen $\mathfrak{p} \in K_L/\pi$, die Primquotienten $a/b \pi c/d$ mit $b \geqq c$ enthalten. δ sei die zugehörige Kongruenzrelation in L. Dann ist $D(L) = L/\delta$ ein distributiver Verband. Ist $\varkappa$ eine Kongruenzrelation zu $\mathsf{B} \subseteqq K_L/\pi$, so ist $L/\varkappa$ distributiv genau dann, wenn $\mathsf{B} \supseteqq \Delta$, also $\varkappa \geqq \delta$. Insbesondere ist L distributiv genau dann, wenn $\Delta = \varnothing$.*

Literatur

[1] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory. Revised edition 1948.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität
(Eingegangen am 20. März 1960)

WALTER, W.
Math. Zeitschr. 74, 191–208 (1960)

Eindeutigkeitssätze für gewöhnliche, parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen

Herrn ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von
Wolfgang Walter

1. Einleitung

Diese Arbeit behandelt unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt Eindeutigkeitsfragen für die drei folgenden Probleme A, B und C:

(A) *das Anfangswertproblem*

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = \eta \qquad (0 \leqq x \leqq a) \tag{1}$$

für eine gewöhnliche Differentialgleichung;

(B) *die erste Anfangsrandwertaufgabe für die parabolische Differentialgleichung*

$$u_x = f(x, y, u, u_y, u_{yy}); \tag{2}$$

(C) *das charakteristische Anfangswertproblem der hyperbolischen Differentialgleichung*

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \tag{3}$$

Außerdem werden Systeme von Differentialgleichungen der genannten Typen sowie einige verwandte Probleme betrachtet.

Bei der gewöhnlichen Differentialgleichung (1) sind Eindeutigkeitsbedingungen von der Form

$$|f(x, y - f(x, \bar{y})| \leqq g\big(x, |y - \bar{y}|\big) \tag{4}$$

(zum Teil auch ohne Absolutstriche; s. Nr. 2) von vielen Autoren angegeben worden. Einige der wichtigsten seien in Kürze genannt. Am bekanntesten ist die Lipschitz-Bedingung

$$(\alpha) \qquad g(x, z) = l(x)\, z \quad \text{mit} \quad l(x) \geqq 0, \quad \int_0^a l(x)\, dx < \infty \qquad (a > 0).$$

OSGOOD [2] zeigte 1898, daß die Funktion $g(x, z) = \omega(z)$ zu einer Eindeutigkeitsbedingung gemäß (4) führt, wenn $\omega(z)$ stetig für $z \geqq 0$ und

$$(\beta) \qquad \omega(0) = 0, \quad \omega(z) > 0 \quad \text{für} \quad z > 0, \quad \int_0^1 [\omega(z)]^{-1}\, dz = \infty$$

ist [1]); dieses Ergebnis wurde von MONTEL [4] verschärft zu

$$(\gamma) \qquad g(x,z) = l(x)\,\omega(z)$$

[Voraussetzungen über l wie bei (α)]. Etwa gleichzeitig wurde die Eindeutigkeitsbedingung (γ) auch von TONELLI [5] angegeben und von MÜLLER [8] auf Systeme von Differentialgleichungen ausgedehnt. Von ROSENBLATT [3] stammt die Bedingung

$$(\delta) \qquad g(x,z) = \beta\frac{z}{x} \quad \text{mit} \quad 0<\beta<1,$$

während der Fall $\beta=1$, d.h.

$$(\varepsilon) \qquad g(x,z) = \frac{z}{x}$$

erst viel später von NAGUMO [5] entdeckt wurde.

Alle diese Ansätze umfaßt der Eindeutigkeitssatz von KAMKE [9] [2]). Die Grundidee ist dabei, die Funktion $g(x,z)$ nicht explizit anzugeben, sondern durch gewisse Eigenschaften der Differentialgleichung

$$(5) \qquad z' = g(x,z)$$

zu beschreiben. Übrigens enthält der Satz von KAMKE neben (α) bis (ε) noch weitere interessante Spezialfälle, von denen wir den folgenden

$$(\eta) \qquad g(x,z) = \frac{z}{x} + x\,l(x)\,\omega\left(\frac{z}{x}\right)$$

notieren [Voraussetzungen über l und ω wie bei (α) und (β)].

In jüngster Zeit wurden verschiedentlich Eindeutigkeitsfragen bei den Aufgaben B und C untersucht. Hierbei erwiesen sich die bekannten Eindeutigkeitssätze für gewöhnliche Differentialgleichungen und die ihnen zugrunde liegenden Beweisideen als sehr wertvoll. Es zeigte sich nämlich, daß diese Sätze eine Übertragung auf die Gln. (2) und (3) zuließen. So wurde ein Eindeutigkeitssatz bei erfüllter Lipschitz-Bedingung für das Problem B 1947 von WESTPHAL [12] bewiesen; für das Problem C ist er klassisch (PICARD [1]). Ein auf die hyperbolischen Probleme bezüglicher Satz vom Osgood-Typ findet sich bei KISYNSKI [16], ein solcher vom Montel-Typ bei WALTER [19]. Das Kriterium (ε) von NAGUMO wurde von NICKEL [18] auf parabolische und von WALTER [19] und davon unabhängig von SHANAHAN [20] auf hyperbolische Gleichungen übertragen (vgl. auch DIAZ und WALTER [21]). Allgemeinere Sätze für das Problem B wurden von GIULIANO [13], SZARSKI [15] und NICKEL [18] angegeben. Dem Versuch, den Satz von KAMKE auf das Problem C

[1]) Wesentlich ist nur das Verhalten von $\omega(z)$ für kleine positive z. Man kann deshalb bei der Formulierung der Bedingung auch nur verlangen, daß ω in einem Intervall $0 \leqq z \leqq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, erklärt ist. Dabei wird jedoch keine größere Allgemeinheit erzielt, da sich $\omega(z)$ für $z \geqq \varepsilon$ als stetige, positive Funktion fortsetzen läßt.

[2]) Der Satz von KAMKE gilt auch für Systeme von Differentialgleichungen; er wurde in [10] noch weiter verallgemeinert. Für den Fall *einer* gewöhnlichen Differentialgleichung wurde ein ähnlicher Satz, bei dem (4) ersetzt ist durch die Voraussetzung, daß für $y \geqq \bar{y}$ die Ungleichung $f(x,y) - f(x,\bar{y}) \leqq g(x, y-\bar{y})$ besteht, wobei die Funktion $g(x,z)$ denselben Einschränkungen wie beim Satz von KAMKE unterliegt, von IYANAGA [7] bewiesen.

auszudehnen, stellen sich jedoch große Schwierigkeiten entgegen. Einer der Gründe dafür ist in der Tatsache zu erblicken, daß der Existenzsatz von PEANO, welcher beim Beweis — vgl. KAMKE [9, S. 139f.] — benötigt wird, kein Analogon für die Gl. (3) besitzt. Von GUGLIELMINO [17] [für den Fall $f=f(x, y, u)$], SHANAHAN [20] und WALTER [22] wurden allgemeine Eindeutigkeitsbedingungen für das Problem C aufgestellt. Doch ist keiner dieser Sätze so umfassend, wie es beim Problem A der Satz von KAMKE ist (so ist z.B. der oben erwähnte „Satz nach NAGUMO" für das Problem C nicht in ihnen enthalten).

Im folgenden sollen diese Fragen mittels einer einheitlichen Methode behandelt werden. Die Ausführungen der Nr. 2 dienen vor allem dazu, den eingeschlagenen Weg am einfachen Beispiel einer gewöhnlichen Differentialgleichung aufzuzeigen. Dabei ergeben sich einige Verschärfungen bekannter Sätze. Die Grundlage für die Anwendung unserer Methode auf parabolische Differentialgleichungen bildet ein Abschätzungssatz (Satz 4). Er ist auch sonst von Interesse, weil er für eine weite Klasse von parabolischen Differentialgleichungen, zu der auch die Wärmeleitungsgleichung gehört, das bekannte Lemma von NAGUMO [11], [12] verschärft. In Nr. 4 wird ein Satz bewiesen (Satz 7), der alle bisher bekannten Eindeutigkeitskriterien für das Problem C sowie einige neue, schärfere Kriterien als Spezialfälle enthält.

Herrn Prof. M. MÜLLER bin ich für einige kritische Bemerkungen und Hinweise zu Dank verpflichtet.

2. Ein Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen

Unter einer Lösung des Problems A verstehen wir eine Funktion $y(x)$, die in einem Intervall I: $0 \leqq x \leqq a$ $(a>0)$ differenzierbar ist, dort der Gl. (1) genügt und einen vorgeschriebenen Anfangswert $y(0)=\eta$ annimmt. Dabei ist angenommen, daß die Funktion $f(x, y)$ auf der Punktmenge

$$D\colon\ 0 \leqq x \leqq a, \qquad |y| < \infty$$

erklärt ist.

Die Punkte aus I bzw. D mit positivem x bilden die Punktmengen I_0 bzw. D_0,

$$I_0\colon\ 0 < x \leqq a; \qquad D_0\colon\ 0 < x \leqq a, \qquad |y| < \infty.$$

Die rechts- bzw. linksseitige Ableitung einer Funktion $y(x)$ wird wie üblich mit y'_+ bzw. y'_-, die vier Derivierten werden mit $\overline{D}_+$, $\overline{D}_-$, $\underline{D}_+$, $\underline{D}_-$ bezeichnet. $C^0(M)$ ist die Klasse der auf einer Punktmenge M stetigen Funktionen.

Der folgende wohlbekannte Abschätzungssatz ist grundlegend für unsere Methode.

SATZ 1. *Es sei $F(x, z)$ in D_0 erklärt und monoton wachsend*[3]) *in z. Für zwei in I stetige, in I_0 differenzierbare Funktionen $y(x), z(x)$ mit $y(0) < z(0)$ sei*

$$y' \leqq F(x, y) \quad \text{und} \quad z' \geqq F(x, z) \text{ in } I_0. \tag{6}$$

Dann ist $y(x) < z(x)$ in I.

[3]) Hier und im folgenden wird unter Monotonie immer die Monotonie im weiteren Sinne verstanden; im obigen Fall bedeutet dies also, daß $F(x, z) \leqq F(x, \bar{z})$ für $z \leqq \bar{z}$ ist.

Die Behauptung bleibt richtig, wenn vorausgesetzt wird, daß $y(x)$ und $z(x)$ in I totalstetig sind, daß $y(0)<z(0)$ ist und daß die Ungleichungen (6) fast überall in I_0 gelten.

Gäbe es nämlich eine erste Stelle ξ, an der die Differenz $d(x)=z(x)-y(x)$ verschwindet, so wäre $y<z$ für $0\leqq x<\xi$, also wegen der Monotonie von F

$$d'=z'-y'\geqq F(x,z)-F(x,y)\geqq 0$$

und damit $d(x)$ monoton wachsend für $0\leqq x\leqq\xi$. Dies ist jedoch unvereinbar mit den beiden Aussagen $d(0)>0$, $d(\xi)=0$.

Der Beweis zeigt übrigens, daß die Behauptung verschärft werden kann: die Differenz $z-y$ ist eine monoton wachsende Funktion von x.

Es sei G die Klasse aller Funktionen $g(x,z)$, welche die folgenden Eigenschaften besitzen:

(G) *$g(x,z)$ ist in D_0 erklärt und in der Variablen z monoton wachsend; zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es eine in I_0 differenzierbare (oder in I totalstetige) Funktion $z(x)$, für welche*

(7) $$z'\geqq g(x,z) \text{ in } I_0$$

sowie

(8) $$0<z(x)\leqq\varepsilon \text{ in } I_0, \quad z(x)\neq o(x) \quad \text{für} \quad x\to 0$$ [4])

gilt (bei totalstetigem $z(x)$ genügt es, wenn (7) fast überall gilt).

SATZ 2 (EINDEUTIGKEITSSATZ). *Das Problem A hat höchstens eine Lösung, wenn die Funktion $f(x,y)$ einer Abschätzung*

(9) $$f(x,\bar y)-f(x,y)\leqq g(x,\bar y-y) \quad \text{für} \quad 0<x\leqq a, \quad y<\bar y$$

mit $g(x,z)\in G$ genügt.

BEWEIS. Sind $y(x)$ und $\bar y(x)$ zwei Lösungen von (1), so gilt dasselbe von den beiden Funktionen

$$\operatorname{Max}[y(x),\bar y(x)] \quad \text{und} \quad \operatorname{Min}[y(x),\bar y(x)].$$

Beim Nachweis, daß $y(x)=\bar y(x)$ ist, kann also $y(x)\leqq\bar y(x)$ angenommen werden. Die Differenz $d(x)=\bar y(x)-y(x)$ hat dann, da y und $\bar y$ im Punkt $x=0$ mit Einschluß ihrer Ableitung übereinstimmen, die Eigenschaften

(10) $$d'=f(x,\bar y)-f(x,y)\leqq g(x,d),$$

$d(x)\geqq 0$ und $d(x)=o(x)$ für $x\to 0$. Ist $z(x)$ eine Funktion mit den in G genannten Eigenschaften, so gibt es wegen $z(x)\neq o(x)$ beliebig kleine positive Zahlen α mit $d(\alpha)<z(\alpha)$. Nach Satz 1, angewandt auf $d(x)$ und $z(x)$ und das Intervall $\alpha\leqq x\leqq a$, ist $d(x)<z(x)$ für $\alpha\leqq x\leqq a$. Also ist $0\leqq d\leqq z$ in I_0 für jede solche Funktion z, d. h. $d=0$.

[4]) Wegen $z(x)>0$ ist „$z(x)\neq o(x)$ für $x\to 0$" gleichbedeutend damit, daß entweder $\limsup_{x\to 0} z(x)>0$ oder $\lim_{x\to 0} z(x)=0$ und [mit $z(0)=0$] $\overline{D}_+ z(0)>0$ ist.

Die Gültigkeit dieses Satzes hängt wesentlich von der oben gegebenen Definition einer Lösung ab, nach der die Differentialgleichung (1) auch noch im Punkt $x=0$ erfüllt sein muß. Dies oder vielmehr die sich hieraus ergebende Tatsache, daß die Differenz zweier Lösungen $o(x)$ ist, wird beim Beweis an entscheidender Stelle benutzt. Betrachtet man dagegen Lösungen in einem verallgemeinerten Sinne, etwa im Sinne von CARATHÉODORY — das bedeutet, daß $y(x)$ totalstetig und

$$y(x)=\eta+\int_0^x f\big(t,y(t)\big)\,dt \tag{11}$$

ist — so ist die Differenz zweier Lösungen im allgemeinen nicht mehr $o(x)$, sondern nur noch $o(1)$ $(x\to 0)$. Der Eindeutigkeitsbeweis läßt sich dann wie oben durchführen, wenn in (8) statt $z(x)\neq o(x)$ sogar $z(x)\neq o(1)$ gefordert wird[5]). Bezeichnen wir die so eingeschränkte Funktionenklasse G mit $G\big(o(1)\big)$, so besteht also der folgende

SATZ 3. *Das Anfangswertproblem* (11) *im Sinne von* CARATHÉODORY *besitzt höchstens eine Lösung, wenn für fast alle* x *die Ungleichung* (9) *gilt und dabei* $g(x,z)\in G\big(o(1)\big)$ *ist.*

In vielen Fällen kann man jedoch mehr aussagen. Ist z. B. bekannt, daß die Funktion $f(x,y)$ in einer Umgebung des Punktes $(0,\eta)$ beschränkt ist, so folgt für die Differenz zweier Lösungen $d(x)=O(x)$. Es genügt dann vorauszusetzen, daß $g(x,z)$ aus der Klasse $G\big(O(x)\big)$ ist [mit dieser Bezeichnung soll also angedeutet werden, daß in (8) die Ungleichung $z(x)\neq o(x)$ durch $z(x)\neq O(x)$ ersetzt werden muß]. Die Beispiele (α), (β) und (γ) von Nr. 1 sind aus $G\big(o(1)\big)$ und demnach auch für Anfangswertprobleme im Sinne von CARATHEODORY als Eindeutigkeitskriterien zulässig, während (δ) der Klasse $G\big(O(x)\big)$ und das Beispiel (ε) und seine Verallgemeinerungen der Klasse $G=G\big(o(x)\big)$ angehören [hierbei wurde angenommen, daß die Funktion $\omega(z)$ monoton wachsend ist].

Es ist nicht schwer, die Sätze 2 und 3 auf Systeme von Differentialgleichungen zu übertragen. Hierzu einige Bezeichnungen. Der Raum R_n $(n\geqq 1)$ der Vektoren $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)$, ... sei in beliebiger Weise normiert, d. h. es sei eine Norm $\|u\|$ mit den üblichen Eigenschaften

$$\|u\|>0 \quad \text{für} \quad u\neq 0, \qquad \|u+v\|\leqq\|u\|+\|v\|, \qquad \|\alpha u\|=|\alpha|\,\|u\|$$

(α reelle Zahl) definiert.

Für das Folgende benötigen wir den Satz 1 in einer etwas abgeänderten Form.

SATZ 1'. *Die Vektorfunktion* $u(x)=\big(u_1(x),\ldots,u_n(x)\big)$ *und die (skalare) Funktion* $z(x)$ *seien in* I *stetig und in* I_0 *differenzierbar, es sei* $\|u(0)\|<z(0)$ *und*

$$\|u'\|\leqq F\big(x,\|u\|\big), \qquad z'\geqq F(x,z) \text{ in } I_0. \tag{6'}$$

Dabei sei die (nach wie vor von zwei reellen Veränderlichen abhängende) Funktion $F(x,z)$ *monoton wachsend in* z. *Dann ist* $\|u(x)\|<z(x)$ *in* I.

[5]) Das bedeutet, daß $\limsup z(x)>0$ ist $(x\to+0)$.

Zum Beweis betrachten wir die Funktion $y(x)=\|u(x)\|$. Nach der Dreiecksungleichung ist

$$|y(x+h)-y(x)|=|\|u(x+h)\|-\|u(x)\||\leqq\|u(x+h)-u(x)\|,$$

also, wenn D^* irgend eine der vier Derivierten bezeichnet,

$$D^*y(x)\leqq\|u'(x)\|. \tag{12}$$

Sind $d(x)$ und ξ wie im Beweis von Satz 1 definiert, so ist wegen (12)

$$D^*d\geqq z'-\|u'\|\geqq F(x,z)-F(x,y)\geqq 0,$$

woraus sich die Monotonie von d und alles weitere wie früher ergibt.

Es seien nun f, η und y Vektoren aus dem Raum R_n und dementsprechend das Problem A ein Anfangswertproblem für ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen. *Der Eindeutigkeitssatz 2 ist auch für ein solches System richtig, wenn statt* (9)

$$\|f(x,\bar{y})-f(x,y)\|\leqq g\big(x,\|\bar{y}-y\|\big) \text{ für } 0<x\leqq a \text{ und beliebige } y,\bar{y} \tag{9'}$$

gefordert wird. Ebenso gilt Satz 3 für Systeme von Differentialgleichungen im Sinne von CARATHÉODORY, natürlich mit (9') an Stelle von (9).

Die Beweise ändern sich nur geringfügig. Für die Differenz zweier Lösungen $d(x)=\bar{y}(x)-y(x)$ hat man jetzt statt (10) die Abschätzung

$$\|d'\|=\|f(x,\bar{y})-f(x,y)\|\leqq g\big(x,\|d\|\big). \tag{10'}$$

Zur Begründung von $\|d(x)\|=o(x)$ (Satz 2) bzw. $\|d(x)\|=o(1)$ (Satz 3) benötigt man die Tatsache, daß zu jeder Norm eine Konstante K mit der Eigenschaft

$$\|u\|=\|(u_1,\dots,u_n)\|\leqq K\big(|u_1|+\cdots+|u_n|\big)$$

existiert. Die Ungleichung $\|d(x)\|\leqq z(x)$ ergibt sich dann leicht aus Satz 1'. Im Falle von Satz 3 ist dabei zu beachten, daß der Satz 1' auch dann gültig ist, wenn die Vektorfunktion u und die skalare Funktion z totalstetig sind und die Ungleichungen (6') fast überall in I gelten.

In der Literatur über Systeme von Differentialgleichungen findet man in Verbindung mit Abschätzungs- und Eindeutigkeitssätzen meistens die spezielle Norm $\|u\|=|u_1|+\cdots+|u_n|$, zuweilen auch den Euklidischen Abstand $\|u\|=(u_1^2+\cdots+u_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Die obigen Bemerkungen sollten deutlich machen, daß eine Beschränkung auf eine bestimmte Norm gar nicht notwendig ist und daß die Beweise durch die Zulassung einer beliebigen Norm nicht komplizierter werden. Ja, es ist sogar möglich, statt einer Norm einen noch allgemeineren Abstandsbegriff zugrundezulegen. Das wurde bei Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen erstmals von KAMKE [*10*] gezeigt. Es liegt nicht in unserer Absicht, hier dasselbe für parabolische und hyperbolische Systeme durchzuführen.

Es besteht natürlich eine enge Beziehung zwischen dem Eindeutigkeitssatz von KAMKE und unserem Satz 2. Beim ersteren werden Stetigkeitsforderungen

gestellt, die hier entbehrlich sind[6]); dafür wird beim letzteren die Allgemeinheit durch eine Monotoniebedingung beeinträchtigt[7]). Satz 3 schneidet günstiger ab; der bekannte entsprechende Satz (CODDINGTON-LEVINSON [*14*, S. 51]) ist in ihm enthalten. Ein für die Übertragung auf partielle Differentialgleichungen entscheidender Unterschied besteht jedoch im Beweis: man kommt bei Satz 2 und 3 ohne den Existenzsatz von PEANO bzw. CARATHÉODORY aus. Von diesem Gesichtspunkt aus kann man unsere Methode auch dadurch charakterisieren, daß statt eines allgemeinen Existenzsatzes nur die wesentlich schwächere Existenzaussage benutzt (und vorausgesetzt!) wird „es gebe beliebig kleine positive $z(x) \neq o(x)$ mit $z' \geqq g(x, z)$". Die Zweckmäßigkeit eines solchen Vorgehens wird sich vor allem beim Problem C erweisen, wo ein allgemeiner Existenzsatz nicht bekannt ist.

3. Parabolische Differentialgleichungen

Wir betrachten hier parabolische Differentialgleichungen in der Gestalt

$$u_x = f(x, y, u, u_y, u_{yy}). \tag{13}$$

Hierin bedeutet x wie früher eine reelle Veränderliche, die in einem Intervall I: $0 \leqq x \leqq a$ variiert; y ist ein Vektor $y = (y_1, \ldots, y_m) \in R_m$ $(m \geqq 1)$, der in einem beschränkten Gebiet $G \subset R_m$ bzw. in der abgeschlossenen Hülle $\overline{G}$ von G liegen möge. Mit Z und Z_0 bezeichnen wir die Hyperzylinder

$$Z = I \times \overline{G}, \quad Z_0 = I_0 \times G$$

(I_0 ist das Intervall $0 < x \leqq a$) im Raume R_{m+1}, mit $R_p = Z - Z_0$ seinen „Rand". Dabei soll der Index p („parabolisch") daran erinnern, daß die „Deckfläche" $\{x = a\} \times G$ nicht zum „Rand" R_p, sondern zum „Innern" Z_0 gezählt wird. Diese Einteilung ist charakteristisch für Randwertaufgaben bei parabolischen Differentialgleichungen.

Die Funktion $f(x, y, z, p, r) = f(x, y, z, p_i, r_{ij})$ sei für $(x, y) \in Z_0$, beliebige reelle z sowie beliebige reelle Vektoren $p = (p_1, \ldots, p_m)$ und symmetrische Matrizen $r = (r_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ erklärt und monoton wachsend in r,

$$f(x, y, z, p, r) \leqq f(x, y, z, p, \bar{r}) \quad \text{für} \quad r \leqq \bar{r}. \tag{14}$$

Dabei bedeutet $r \leqq \bar{r}$ im Falle $m > 1$, daß die symmetrische Matrix $\bar{r} - r$ positiv semidefinit ist, d.h. also, daß

$$\sum_{i,j=1}^{m} (\bar{r}_{ij} - r_{ij}) \alpha_i \alpha_j \geqq 0 \text{ für beliebige } \alpha_i$$

ist. Die Bezeichnung $f \in P$ soll diese Voraussetzungen zusammenfassen.

[6]) Außerdem wird nicht verlangt, daß $g(x, z) \geqq 0$ ist. Da in (9) nur eine einseitige Abschätzung verlangt wird, sind auch Funktionen g von wechselndem Vorzeichen zugelassen [jedoch nicht bei Systemen, s. (9′)].

[7]) Man sieht leicht, daß jede beim Eindeutigkeitssatz von KAMKE zulässige Funktion $g(x, z)$, welche darüber hinaus monoton wachsend in z ist, der Klasse G angehört. Umgekehrt genügt jede in D_0 stetige, für $z = 0$ verschwindende und für positive z nichtnegative Funktion $g(x, z) \in G$ den Bedingungen, die beim Eindeutigkeitssatz von KAMKE verlangt werden.

Die Funktion $u(x, y) = u(x, y_1, \ldots, y_m)$ ist aus der Klasse $C^* = C^*(Z)$, wenn sie in Z stetig ist, wenn die partielle Ableitung u_x in Z_0 existiert und wenn die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach den y_i, die wir zu einem Vektor $u_y = (u_{y_1}, \ldots, u_{y_m})$ und einer Matrix $u_{yy} = (u_{y_i y_j})$ zusammenfassen, in Z_0 existieren und stetig sind. Das Problem B besteht darin, eine Funktion $u(x, y) \in C^*(Z)$ zu finden, welche in Z_0 der Gl. (13) genügt und auf dem Rand R_p vorgeschriebene Randwerte annimmt, wobei immer $f \in P$ vorausgesetzt ist.

Zunächst wird ein Abschätzungssatz bewiesen, der mit einem Lemma von NAGUMO [11] (vgl. auch WESTPHAL [12]) verwandt ist.

SATZ 4. *Für zwei Funktionen $v(x, y)$, $w(x, y) \in C^*(Z)$ gelte $v < w$ auf dem Rande R_p und*

$$(15) \qquad v_x \leqq F(x, y, v, v_y, v_{yy}), \qquad w_x \geqq F(x, y, w, w_y, w_{yy})$$

für alle jene Punkte $(x, y) \in Z_0$, für die (mit einer positiven Zahl ε) $w - \varepsilon \leqq v < w$, $v_y = w_y$, $v_{yy} \leqq w_{yy}$ ist. Dabei sei $F(x, y, z, p, r) \in P$ und monoton wachsend in z. Dann ist $v < w$ in Z.

BEWEIS. Mit den Bezeichnungen $d(x, y) = w(x, y) - v(x, y)$ und

$$M(x) = \operatorname{Min}\{d(x, y) \mid y \in \bar{G}\}$$

lautet die Behauptung $M(x) > 0$. Auf R_p ist $0 < \delta \leqq d(x, y)$ bei geeignetem δ; die in I stetige Funktion $M(x)$ hat also einen Anfangswert $M(0) > 0$. Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es zwei Stellen $\xi < \xi_0$ mit der Eigenschaft

$$0 < M(x) < \operatorname{Min}(\delta, \varepsilon) \quad \text{für} \quad \xi \leqq x < \xi_0, \qquad M(\xi_0) = 0.$$

Zu jedem solchen x gäbe es (mindestens) einen inneren Punkt $\bar{y} = \bar{y}(x) \in G$, in dem die Funktion $d(x, y)$ ihr Minimum $M(x)$ annimmt, d.h. es wäre

$$M(x) = d > 0, \qquad d_y = 0, \qquad d_{yy} \leqq 0 \quad \text{im Punkt} \quad (x, \bar{y}(x)).$$

Dann würde sich wegen der Monotonie von F in z und r zunächst

$$d_x = w_x - v_x \geqq F(x, y, w, w_y, w_{yy}) - F(x, y, v, v_y, v_{yy}) \geqq 0$$

im Punkte $(x, \bar{y})$ und sodann wegen

$$M(x) - M(x - h) \geqq d(x, \bar{y}(x)) - d(x - h, \bar{y}(x))$$

die Ungleichung $\underline{D}_- M(x) \geqq d_x(x, \bar{y}) \geqq 0$, also ein monotones Wachsen von $M(x)$ im Intervall $\xi \leqq x < \xi_0$ ergeben. Letzteres steht aber im Widerspruch zur Wahl von ξ und ξ_0, womit Satz 4 bewiesen ist.

ZUSATZ. *Der Satz 4 läßt folgende Verschärfung zu. Ist $d = w - v$ und*

$$\delta(\bar{x}) = \{\operatorname{Min} d(x, y) \mid (x, y) \in R_p,\ 0 \leqq x \leqq \bar{x}\},$$

so gilt sogar $d(x, y) \geqq \delta(x)$ in Z, falls die in der Voraussetzung vorkommende Zahl $\varepsilon \geqq \delta(0)$ ist. — Der Beweis muß nur geringfügig modifiziert werden.

Die in Satz 4 von der Funktion F geforderten Eigenschaften kommen insbesondere den von y, p und r unabhängigen Funktionen $g(x,z)$ aus der (in Nr. 2 definierten) Klasse G zu. Von dieser Bemerkung machen wir beim folgenden Eindeutigkeitssatz Gebrauch.

SATZ 5. *Zwischen der Funktion $f \in P$ und einer geeigneten Funktion $g(x,z) \in G(o(1))$ bestehe die Relation*

$$f(x,y,\bar{z},p,r) - f(x,y,z,p,r) \leqq g(x,\bar{z}-z) \text{ für } z \leqq \bar{z} \tag{16}$$

(und $(x,y) \in Z_0$, p, r beliebig). Dann hat das Problem B höchstens eine Lösung.

BEWEIS. Es seien u und $\bar{u}$ zwei Lösungen und $d = \bar{u} - u$. Wir wollen zeigen, daß Satz 4 angewandt werden kann auf die Funktionen $g = F$, $d = v$ und $z = w$, wobei $z(x,y) = z(x)$ eine Funktion von der in der Bedingung G genannten Art sein soll. In der Tat gilt für alle Punkte mit $0 \leqq d \leqq z$, $d_y = 0$, $d_{yy} \leqq 0$ nach (14) und (16)

$$\begin{aligned} d_x &= f(x,y,\bar{u},\bar{u}_y,\bar{u}_{yy}) - f(x,y,u,u_y,u_{yy}) \\ &\leqq f(x,y,\bar{u},u_y,u_{yy}) - f(x,y,u,u_y,u_{yy}) \leqq g(x,d) \end{aligned}$$

und $z' = z_x \geqq g(x,z)$. Da ferner die Funktion $d(x,y)$ auf R_p verschwindet und für $x \to 0$ (gleichmäßig in y) $o(1)$ ist, während $z(x) > 0$ und $\neq o(1)$ ist, gibt es beliebig kleine positive α mit der Eigenschaft, daß $d(\alpha, y) < z(\alpha)$ für alle $y \in \bar{G}$ ist. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 4 für den Hyperzylinder $\{\alpha \leqq x \leqq a\} \times \bar{G}$ erfüllt. Nach ihm ist also $d \leqq z$ in jedem solchen Hyperzylinder, d.h. in Z. Vertauscht man in der vorstehenden Argumentation u und $\bar{u}$, so ergibt sich $-d \leqq z$. Da die positive Funktion z beliebig klein gewählt werden kann, ist $d = 0$ oder $u = \bar{u}$.

Dieser Satz stellt eine Übertragung von Satz 2 auf parabolische Differentialgleichungen dar. Die entsprechende Übertragung des Eindeutigkeitssatzes von KAMKE auf parabolische Gleichungen wurde von GIULIANO [*13*] durchgeführt. Am Ende der vorigen Nummer wurden die verschiedenen Eindeutigkeitssätze für das Problem A miteinander verglichen. Das entsprechende Verhältnis besteht auch zwischen dem Satz von GIULIANO und Satz 5. In diesem Zusammenhang sei noch erwähnt, daß es SZARSKI [*15*, Satz 3.1] gelang, den Satz von GIULIANO auf Systeme von parabolischen Differentialgleichungen (von spezieller Gestalt) auszudehnen. Die Methode von SZARSKI kann so abgeändert werden, daß an Stelle der in Satz 3.1 der zitierten Arbeit vorkommende Funktionen σ (die unserem g entspricht) eine Funktion $\sigma \in G(o(1))$ stehen kann. Hier sollen diese Gedanken jedoch nicht weiter verfolgt werden.

Dagegen soll darauf hingewiesen werden, daß bei all diesen Eindeutigkeitskriterien ein charakteristischer Unterschied zwischen den beiden Problemen A und B besteht. Beim ersteren ist die Differenz $d(x)$ zweier Lösungen sicher $o(x)$ (solange Lösungen im klassischen Sinne betrachtet werden), während beim letzteren von dieser Differenz nur $d(x,y) = o(1)$ für $x \to 0$ ausgesagt werden kann. Deshalb ist die Klasse der zugelassenen Funktionen $g(x,z)$ beim Problem B kleiner [bei Satz 2 muß $g \in G(o(x))$, bei Satz 5 $g \in G(o(1))$

sein, und ähnlich ist es bei den Sätzen vom Kamke-Iyanaga-Typus]. Man könnte natürlich von einer Lösung u des Problems B auch verlangen, daß u, u_x, u_y, u_{yx} in Z stetig (d.h. in Z_0 gleichmäßig stetig) sind und daß (13) in ganz Z gilt. Dann ist die Differenz zweier Lösungen $o(x)$, und in der Abschätzung (16) von Satz 5 können Funktionen $g \in G(o(x))$ zugelassen werden. Diese Möglichkeit wurde von NICKEL [*18*, S. 9] für beliebige, nicht notwendig zylindrische Bereiche Z untersucht. Es ist klar, daß damit den Anfangswerten Differenzierbarkeitseigenschaften auferlegt werden.

Zum Schluß erwähnen wir, daß die Sätze 4 und 5 nicht nur für Hyperzylinder Z, sondern für beliebige beschränkte Gebiete $\subset R_{m+1}$ gültig sind. Bei der Definition des Randes R_p hat man dann wie in [*11*] zu verfahren.

4. Hyperbolische Differentialgleichungen

Es sei R ein Rechteck $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$ $(a, b > 0)$, R_0 die Menge der Punkte aus R mit $xy > 0$ und E bzw. E_0 die Menge der Punkte (x, y, u, v, w) eines 5-dimensionalen Raumes, für die $(x, y) \in R$ bzw. $\in R_0$ und u, v, w beliebig sind,

$$E = R \times \{-\infty < u, v, w < \infty\}, \qquad E_0 = R_0 \times \{-\infty < u, v, w < \infty\}.$$

Das Problem C ist das charakteristische Anfangswertproblem für die Differentialgleichung

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \tag{17}$$

Aus der Klasse $C^* = C^*(R)$ der in R stetigen und mit stetigen Ableitungen z_x, z_y und z_{xy} versehenen Funktionen $z(x, y)$ ist eine Funktion $u(x, y)$ gesucht, die in R der Gl. (17) genügt und die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \sigma(x) \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq a, \qquad u(0, y) = \tau(y) \quad \text{für} \quad 0 \leqq y \leqq b \tag{18}$$

befriedigt; dabei sind $\sigma(x)$ und $\tau(y)$ vorgegebene stetig differenzierbare Funktionen und $\sigma(0) = \tau(0)$.

Wir behandeln sogleich den etwas allgemeineren Fall, daß $u = (u_1, \ldots, u_n)$ und $f = (f_1, \ldots, f_n)$ Vektorfunktionen sind; (17) stellt dann ein hyperbolisches System dar, und in (18) sind unter σ und τ natürlich ebenfalls Vektorfunktionen zu verstehen.

SATZ 6. *Die (von 5 reellen Variablen abhängende) Funktion $F(x, y, u, v, w)$ sei in E_0 erklärt und monoton wachsend in den drei letzten Variablen. Für eine Vektorfunktion $d = (d_1, \ldots, d_n) \in C^*(R)$ $(n \geqq 1)$ und eine skalare Funktion $z \in C^*(R)$ möge*

$$\|d_{xy}\| \leqq F(x, y, \|d\|, \|d_x\|, \|d_y\|), \qquad z_{xy} \geqq F(x, y, z, z_x, z_y) \tag{19}$$

in R_0 und

$$\begin{cases} \|d(0, 0)\| < z(0, 0), & \|d_x(x, 0)\| < z_x(x, 0) \quad \textit{für} \quad 0 \leqq x \leqq a, \\ \|d_y(0, y)\| < z_y(0, y) & \textit{für} \quad 0 \leqq y \leqq b \end{cases} \tag{20}$$

gelten. Dann ist im ganzen Rechteck R

$$\|d\| < z, \quad \|d_x\| < z_x, \quad \|d_y\| < z_y. \tag{21}$$

Diesem Satz entspricht bei gewöhnlichen Differentialgleichungen der Satz 1'. Für den Fall $n=1$ wurde vor kurzem in [19, S. 446] ein Beweis gegeben; er ist auch für $n>1$ und für beliebige Normen gültig.

Weitgehende Analogien zu Nr. 2 werden sich auch im weiteren Verlauf zeigen. Entsprechend zur Klasse G definieren wir eine die Funktionen $h(x, y, u, v, w)$ betreffende Funktionenklasse H.

(H) $h(x, y, u, v, w)$ ist in E_0 erklärt und in u, v, w monoton wachsend; zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$ und eine Funktion $z(x, y) \in C^*(R_0)$, für die

$$z_{xy} \geqq h(x, y, z, z_x, z_y) \quad \text{in } R_0 \tag{22}$$

und

$$\delta x\, y < z(x, y) < \varepsilon, \quad \delta y < z_x(x, y), \quad \delta x < z_y(x, y) \quad \text{in } R_0 \tag{23}$$

ist.

Hierbei bedeutet $z \in C^*(R_0)$ natürlich, daß z, z_x, z_y, z_{xy} in R_0 stetig sind.

Satz 7 (Eindeutigkeitssatz). *Die Funktion f gestatte für $(x, y) \in R_0$ und beliebige Vektoren $u, \bar{u}, \ldots, \bar{w}$ eine Abschätzung*

$$\|f(x, y, u, v, w) - f(x, y, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w})\| \leqq h\big(x, y, \|u-\bar{u}\|, \|v-\bar{v}\|, \|w-\bar{w}\|\big) \tag{24}$$

mit $h \in H$. Ferner mögen die beiden Anfangswertprobleme für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{cases} v'(y) = f\big(0, y, \tau(y), v, \tau'(y)\big), & v(0) = \sigma'(0) \qquad (0 \leqq y \leqq b) \\ w'(x) = f\big(x, 0, \sigma(x), \sigma'(x), w\big), & w(0) = \tau'(0) \qquad (0 \leqq x \leqq a) \end{cases} \tag{25}$$

je höchstens eine Lösung besitzen. Dann hat das Problem C höchstens eine Lösung.

Beweis. Die Eindeutigkeit der beiden Probleme (25) ist gerade die Bedingung dafür, daß zwei beliebige Lösungen u und $\bar{u}$ auf den Charakteristiken $x=0$ und $y=0$ mit ihren Ableitungen erster Ordnung übereinstimmen. Aus der Differentialgleichung (17) folgt dann, daß auf diesen Charakteristiken auch $u_{xy} = \bar{u}_{xy}$ ist. Mit R_α werde das Rechteck $\alpha < x \leqq a$, $\alpha < y \leqq b$ bezeichnet. Dann existiert, wenn $d = \bar{u} - u$ ist, zu jeder positiven Zahl δ ein positives α derart, daß

$$\|d_{xy}\| = \|\bar{u}_{xy} - u_{xy}\| < \delta \text{ in } R - R_\alpha$$

ist. Durch Integration folgt daraus

$$\|d_x\| < \delta y, \quad \|d_y\| < \delta x, \quad \|d\| < \delta x y \text{ in } R - R_\alpha. \tag{26}$$

Ferner ist in R_0 nach (17) und (24)

$$\|d_{xy}\| = \|f(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) - f(x, y, u, u_x, u_y)\| \leqq h\big(x, y, \|d\|, \|d_x\|, \|d_y\|\big). \tag{27}$$

Der Satz 6 ist damit anwendbar auf $F=h$ und das Rechteck R_x (statt R) sowie auf $d=\bar{u}-u$ und eine den Ungleichungen (22), (23) genügende Funktion $z(x, y)$. Die Voraussetzung (20), in der jetzt überall Null durch α zu ersetzen ist, ist nach (23) und (26) erfüllt. Damit ist gezeigt, daß $\|d\|<z$, also $d=0$ ist.

In den folgenden Beispielen zu Satz 7 bedeuten durchweg α, β und γ Funktionen von x und y, die in R_0 erklärt und nicht negativ sind und für die $\alpha+\beta+\gamma=1$ ist, $k(x, y)$ und $l(x)$ positive Funktionen aus $C^0(R_0)$ bzw. $C^0(0<x\leqq a+b)$, deren Integrale

$$K(x, y)=\int_0^x\int_0^y k(s, t)\,ds\,dt, \qquad L(x)=\int_0^x l(s)\,ds$$

in R_0 bzw. $0<x\leqq a+b$ endlich sind, und $\omega(z)$ eine die Eigenschaften (β) von Nr. 1 besitzende, monoton wachsende Funktion. Ferner soll durch $g(x, z)\in G^*$ ausgedrückt werden, daß g aus der in Nr. 2 definierten Klasse G ist und daß die in dieser Definition vorkommenden Funktionen $z(x)$ statt (8) sogar der (nur unwesentlich schärferen) Bedingung „$\delta x\leqq z(x)\leqq\varepsilon$ für ein geeignetes $\delta>0$" genügen.

Beim Aufsuchen von Funktionen $h\in H$ sind zwei verschiedene Wege möglich. Man kann erstens eine Familie von Funktionen $z(x, y)$ vorgeben und dazu h so bestimmen, daß (22) gilt; umgekehrt wird man auf Grund von Analogien zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen gewisse naheliegende Ansätze für h machen und dann versuchen, dazu geeignete Funktionen $z(x, y)$ aufzufinden.

BEISPIEL 1. Der wohl einfachste Ansatz

$$z(x, y)=C\,x\,y \qquad (C>0)$$

genügt wegen $z_{xy}=z/xy=z_x/y=z_y/x=C$ den Bedingungen (22), (23), wenn

$$h(x, y, u, v, w)=\alpha(x, y)\,\frac{u}{xy}+\beta(x, y)\,\frac{v}{y}+\gamma(x, y)\,\frac{w}{x} \tag{28}$$

ist. Der durch diese Funktion h gegebene „*Eindeutigkeitssatz nach Nagumo*" [man vgl. (ε) von Nr. 1] wurde für den Fall, daß α, β und γ konstant sind, auf anderem Wege von WALTER [19] bewiesen und kurz darauf von DIAZ und WALTER [21] und SHANAHAN [20] auf stetige Funktionen α, β, γ ausgedehnt. Satz 7 zeigt indessen, daß eine Stetigkeitsforderung unnötig ist.

BEISPIEL 2. Die seit langem bekannte Lipschitz-Bedingung $h=K(u+v+w)$ läßt sich aus Satz 7 einfach ableiten; es genügt, $z(x, y)=C\exp[K(xy+2y+2x)]$ zu setzen. Wir wollen zeigen, daß auch eine allgemeine Lipschitz-Bedingung

$$h(x, y, u, v, w)=k(x, y)\,u+l(y)\,v+l(x)\,w \tag{29}$$

zulässig ist. Für die Funktionen

$$z(x, y)=C\exp[K(x, y)+2L(x)+2L(y)] \qquad (C>0)$$

ist nämlich, wenn wir $l(x) \geqq 1$ annehmen, z, z_x und $z_y \geqq C > 0$,

$$z_{xy} = k z + [K_x + 2l(x)]\,[K_y + 2l(y)]\,z$$

und

$$h(x, y, z, z_x, z_y) = k z + l(y)\,[K_x + 2l(x)]\,z + l(x)\,[K_y + 2l(y)]\,z,$$

woraus die Gültigkeit von (22) sofort folgt.

Beispiel 3. Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man die Beispiele (ε) und (α) verallgemeinern zu $g(x, z) = z\left[\frac{1}{x} + l(x)\right] \in G$. Dies legt die Vermutung nahe, daß auch die die Beispiele 1 und 2 umfassende Funktion

$$(30) \qquad h(x, y, u, v, w) = u\left[\frac{\alpha}{xy} + k(x, y)\right] + v\left[\frac{\beta}{y} + l(y)\right] + w\left[\frac{\gamma}{x} + l(x)\right]$$

aus der Klasse H ist. Eine elementare Rechnung, deren Durchführung dem Leser überlassen wird, zeigt, daß die Funktionen

$$z(x, y) = C\,x\,y \exp[K(x, y) + A\,L(x) + A\,L(y)]$$

allen an sie gestellten Forderungen genügen, wenn die Konstante A die drei Ungleichungen

$$(31) \qquad A \geqq (1-\beta)^{-1}, \quad A \geqq (1-\gamma)^{-1}, \quad A \geqq 2$$

erfüllt. Die in (30) definierte Funktion h ist also in H gelegen, wenn eine solche Konstante A existiert, z. B. wenn $\alpha = \alpha(x, y) \geqq \delta > 0$ in R_0 ist.

Beispiel 4. Für den Ansatz

$$h(x, y, u, v, w) = h^*(x + y, u + v + w), \qquad z(x, y) = \varphi(x + y)$$

lauten die Bedingungen (22), (23) mit $t = x + y$

$$(32) \qquad \varphi'' \geqq h^*(t, \varphi + 2\varphi'), \quad \delta t^2 \leqq \varphi(t) \leqq \varepsilon, \quad \delta t \leqq \varphi'(t).$$

Sie sind z. B. erfüllbar für alle Funktionen

$$(33) \qquad h(x, y, u, v, w) = \frac{1}{2 + a + b}\, g(x + y, u + v + w) \quad \text{mit} \quad g(x, z) \in G^*.$$

Ist nämlich

$$\delta t \leqq \zeta(t) \leqq \varepsilon, \qquad \zeta'(t) \geqq g(t, \zeta)$$

und

$$\varphi(t) = \frac{1}{2 + a + b} \int_0^t \zeta(s)\, ds,$$

so ist wegen der Monotonie von ζ und g

$$(2 + a + b)\,\varphi(t) \leqq (a + b)\,\zeta(t), \quad \text{also} \quad \zeta \geqq \varphi + 2\varphi'$$

und deshalb

$$z_{xy}(x, y) = \varphi''(x + y) = \frac{\zeta'(x + y)}{2 + a + b} \geqq \frac{1}{2 + a + b}\, g(x + y, \zeta)$$
$$\geqq \frac{1}{2 + a + b}\, g(x + y, \varphi + 2\varphi') = h(x, y, z, z_x, z_y).$$

In (33) ist enthalten eine *Übertragung des Satzes von Osgood und Montel*, nämlich

$$h(x, y, u, v, w) = l(x + y)\,\omega(u + v + w) \in H. \tag{34}$$

BEISPIEL 5. Im Hinblick auf Beispiel 2 könnte man vermuten, daß eine Eindeutigkeitsbedingung vom Montel-Typ auch in der gegenüber (34) verschärften Form

$$h(x, y, u, v, w) = k(x, y)\,\omega(u) + l(y)\,\omega(v) + l(x)\,\omega(w) \tag{35}$$

aufgestellt werden kann. Ein Versuch mit den durch

$$\int_C^z \frac{ds}{\omega(s)} = K(x, y) + A\,L(x) + A\,L(y) \qquad (A, C > 0) \tag{36}$$

definierten Funktionen $z(x, y)$ führt auf

$$z_x = \omega(z)\,[K_x + A\,l(x)], \qquad z_y = \omega(z)\,[K_y + A\,l(y)],$$
$$z_{xy} = k\,\omega(z) + \omega(z)\,\omega'(z)\,[K_x + A\,l(x)]\,[K_y + A\,l(y)];$$

demnach erhält man auf diese Weise nur

$$h = k(x, y)\,\omega(u) + l(y)\,v + l(x)\,w \in H, \quad \text{falls} \quad \omega'(z) \geqq \delta > 0 \tag{37}$$

ist (man wähle $A = 2/\delta$).

Durch Betrachtung der Funktionen $\bar{z}(x, y) = x\,y\,z(x, y)$, wobei z durch (36) gegeben wird, ergibt sich nach einiger Rechnung, daß auch

$$h = \frac{\alpha}{x\,y}\,u + x\,y\,k(x, y)\,\omega\left(\frac{u}{x\,y}\right) + v\left[\frac{\beta}{y} + l(y)\right] + w\left[\frac{\gamma}{x} + l(x)\right] \tag{38}$$

aus H ist, falls eine den Ungleichungen (31) genügende Konstante A existiert. Beispiel 3 ist darin für $\omega(z) = z$ enthalten. Man vgl. hierzu das Beispiel (η) von Nr. 1. — Ob der Ansatz (35) sich rechtfertigen läßt, bleibt offen.

BEISPIEL 6. Bei einem Ansatz von der Form

$$h(x, y, u, v, w) = h^*(x\,y, u, x\,v, y\,w), \qquad z(x, y) = \varphi(x\,y)$$

sind die Bedingungen $(t = x\,y)$

$$\varphi' + t\,\varphi'' \geqq h^*(t, \varphi, t\,\varphi', t\,\varphi'), \qquad \delta t \leqq \varphi(t) \leqq \varepsilon, \qquad \delta \leqq \varphi'(t) \tag{39}$$

nachzuprüfen. Nun möge

$$\begin{cases} \zeta'(t) \geqq h^*(t, \zeta, \zeta, \zeta), & \delta t \leqq \zeta(t) \leqq \varepsilon \\ t\,h^*(t, z, z, z) \geqq z \quad \text{für} \quad z > 0 \end{cases} \tag{40}$$

gelten. Die Funktion

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{\zeta(s)}{s}\,ds$$

hat dann alle Eigenschaften (39). Wegen der zweiten Zeile in (40) ist nämlich $\zeta(t)/t$ monoton wachsend, also $\varphi(t) \leqq \zeta(t)$ und daher

$$\varphi' + t\varphi'' = \zeta' \geqq h^*(t, \zeta, \zeta, \zeta) \geqq h^*(t, \varphi, t\varphi', t\varphi').$$

Die Bedingung (40) ist wesentlich handlicher als (39). Setzen wir z. B.

$$h^*(t, u, p, q) = \alpha\, g(t, u) + \beta\, g(t, p) + \gamma\, g(t, q), \tag{41}$$

wobei zunächst α, β, γ konstant, $g(x, z) \in G^*$ sowie $g(x, z) \geqq z/x$ sein soll (letzteres bedeutet, daß g die Nagumo-Bedingung enthält), so kann der Bedingung (40) Genüge getan werden. Man überlegt sich leicht, daß in (41) α, β und γ auch Funktionen sein dürfen. Damit ist also gezeigt, daß unter den genannten Voraussetzungen über g

$$h(x, y, u, v, w) = \alpha\, g(xy, u) + \beta\, g(xy, xv) + \gamma\, g(xy, yw) \in H \tag{42}$$

ist.

Hierin ist für $g(x, z) = z/x$ das Beispiel 1 enthalten; weitere interessante Spezialfälle ergeben sich mit $g(x, z) = z(1+z)/x$ und mit Beispiel (η) von Nr. 1.

Der Satz 7 enthält außer der Abschätzung (24) noch die weitere Forderung, daß die beiden Aufgaben (25) eindeutig lösbar sind. *Unter der Voraussetzung, daß $f(x, y, u, v, w)$ in E stetig ist, folgt diese Eindeutigkeit in vielen Fällen, im besonderen bei unseren Beispielen* 1—5, *aus der entsprechenden Ungleichung* (24). Wir wollen den einfachen Gedankengang, der diese Behauptung rechtfertigt, am Beispiel (38) skizzieren.

Aus (24) folgt nämlich in diesem Fall

$$\|f(x, y, \tau(y), v, \tau'(y)) - f(x, y, \tau(y), \bar{v}, \tau'(y))\| \leqq \|v - \bar{v}\| \left[\frac{\beta}{y} + l(y)\right], \tag{43}$$

allerdings zunächst nur in R_0. Wegen der Stetigkeit von f gilt dies auch noch für $x = 0$; damit wird (43) zu einer Eindeutigkeitsbedingung für die *gewöhnliche* Differentialgleichung $v'(y) = f(0, y, \tau(y), v, \tau'(y))$. Entsprechendes gilt für die zweite Gl. (25). — Bei dem Beispiel 4 muß man, um so schließen zu können, voraussetzen, daß $g(x, z)$ für jedes feste z in x stetig ist $(0 < x \leqq a)$.

Die Eindeutigkeitsforderung bezüglich der beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen (25) ist jedoch bei unstetigem f im allgemeinen *nicht entbehrlich*. Hierzu geben wir ein

Beispiel. Ist

$$f(x, y, u, v, w) = \begin{cases} v/y & \text{für } y \neq 0 \\ 2w/x & \text{für } y = 0,\ x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = y = 0, \end{cases}$$

so sind alle Funktionen $u(x; y) = C x^2 y$ Lösungen der Differentialgleichung (17) mit verschwindenden Anfangswerten auf den Charakteristiken $x = 0$ und $y = 0$. Trotzdem genügt die Funktion f in R_0 einer Nagumo-Bedingung (s. Beispiel 1) mit $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$.

Beim Beweis von Satz 7 wird diese Voraussetzung über (25) nur benötigt, um die Abschätzung (26) herzuleiten [beim obigen Beispiel ist (26) in der Tat verletzt]. Ohne jede Voraussetzung über f kann man statt (26) nur das folgende behaupten: Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $\alpha > 0$, so daß

$$(26') \qquad \begin{cases} \|d_x\| < \delta & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq a, \quad 0 \leqq y \leqq \alpha, \\ \|d_y\| < \delta & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \alpha, \quad 0 \leqq y \leqq a, \\ \|d\| < \delta & \text{in} \quad R - R_\alpha. \end{cases}$$

ist. Das folgt sofort aus $d(x, 0) = d(0, y) = d_x(x, 0) = d_y(0, y) = 0$ und der Stetigkeit dieser Funktionen. Wenn man nun bei der Definition von H die Forderung (23) verschärft zu

$$(23') \qquad \delta < z(x, y) < \varepsilon, \quad \delta < z_x(x, y), \quad \delta < z_y(x, y) \quad \text{in } R_0$$

(die entsprechende Klasse von Funktionen $h(x, y, u, v, w)$ werde mit H_0 bezeichnet), so bleibt der Beweis von Satz 7 auch dann richtig, wenn statt (26) nur (26') gilt. Damit ist also gezeigt, daß in Satz 7 die an (25) geknüpfte Eindeutigkeitsvoraussetzung entbehrt werden kann, sobald h in H_0 liegt. Zu H_0 gehören u.a. die in (29) und (34) angegebenen Funktionen.

Eine naheliegende Verallgemeinerung von Satz 7 sei noch erwähnt. Mit h_M bezeichnen wir die Funktion

$$(44) \qquad h_M(x, y, u, v, w) = h\big(x, y, \min(u, M), \min(v, M), \min(w, M)\big).$$

Dann genügt es, wenn in Satz 7 statt „$h \in H$" nur „$h_M \in H$ für jedes positive M" vorausgesetzt wird. Ist nämlich (mit den Bezeichnungen des Beweises) M größer als die Funktionen $\|d\|, \|d_x\|, \|d_y\|$, so gilt die Abschätzung (27) auch mit h_M an Stelle von h, und der Beweis kann mit h_M durchgeführt werden. Wir fassen zusammen:

ZUSATZ ZU SATZ 7. *Der Satz 7 bleibt richtig, wenn die in der Abschätzung* (24) *auftretenden Funktion h die Eigenschaft hat, daß $h_M \in H$ für jedes positive M ist. Gilt sogar $h_M \in H_0$ [H_0 ergibt sich aus H durch Ersetzung von* (23) *durch* (23')] *für alle positiven M, so ist die zusätzliche Voraussetzung, daß die beiden Anfangswertprobleme* (25) *höchstens eine Lösung besitzen, überflüssig.*

Zieht man die gewöhnlichen Differentialgleichungen zu einem Vergleich heran, so kann man sagen, daß der Klasse H die Klasse G, der Klasse H_0 die Klasse $G(o(1))$ entspricht.

BEISPIEL 7. Die Funktion $h(x, y, u, v, w)$ sei in E stetig und monoton wachsend in u, v und w, und es sei $f(x, y, 0, 0, 0) = 0$. Ferner sei für jedes δ mit $0 < \delta < 1$ die Funktion $\zeta(x, y) \equiv 0$ die einzige in R^δ: $0 \leqq x \leqq \delta a$, $0 \leqq y \leqq \delta b$ stetige, nichtnegative Funktion mit fast überall in R^δ existierenden nichtnegativen Ableitungen ζ_x, ζ_y, für die

$$(45) \qquad \zeta(x, y) = \int_0^x \int_0^y h(s, t, \zeta, \zeta_x, \zeta_y)\, ds\, dt \quad \text{in } R^\delta$$

ist. Dann ist, so wird behauptet, $h_M \in H_0$ für jedes $M > 0$.

Zum Beweis betrachten wir die durch

$$(46)\qquad \begin{cases} z^0(x,y) = 1 + x + y + \int_0^x \int_0^y h(s,t,M,M,M)\,ds\,dt \\ z^{n+1}(x,y) = \frac{1+x+y}{n+1} + \int_0^x \int_0^y h_M(s,t,z^n,z_x^n,z_y^n)\,ds\,dt \end{cases}$$

definierte Funktionenfolge $z^n(x, y)$. Durch vollständige Induktion läßt sich leicht zeigen, daß die Funktionen z^n sowie deren Ableitungen z_x^n, z_y^n je eine monoton fallende Folge stetiger, nichtnegativer Funktionen bilden. Diese Funktionenfolgen konvergieren also gegen nichtnegative Funktionen $\varphi(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, und aus (46) folgt für $n \to \infty$

$$(47)\qquad \varphi(x,y) = \int_0^x \int_0^y h_M(s,t,\varphi,\varphi_1,\varphi_2)\,ds\,dt \quad \text{in } R.$$

Daraus schließt man in der üblichen Weise, daß φ stetig und daß fast überall in R $\varphi_1 = \varphi_x$, $\varphi_2 = \varphi_y$ ist. Ist δ_1 die größte Zahl derart, daß $\varphi \equiv 0$ in R^{δ_1} ist, so gibt es im Falle $\delta_1 < 1$ ein $\delta > \delta_1$, so daß $\varphi \leqq M$ in R^δ sowie $\varphi_x \leqq M$, $\varphi_y \leqq M$ fast überall in R^δ ist (man beachte, daß h_M für positive u, v, w beschränkt ist). Damit ist φ eine in R^δ nicht identisch verschwindende Lösung von (45), womit ein Widerspruch erreicht ist. Es ist also $\varphi \equiv 0$ in R, d.h. die Folge z^n konvergiert gleichmäßig in R gegen Null (da nach einem bekannten Satz die monotone Konvergenz von stetigen Funktionen mit stetigem Grenzwert immer gleichmäßig ist). Die Funktionen z^n genügen außerdem der Ungleichung (22) und sind deshalb geeignet zum Nachweis, daß $h_M \in H_0$ ist.

Abschließend sei bemerkt, daß der die Eindeutigkeit betreffende Teil der beiden Sätze von SHANAHAN [20] in Beispiel 1 und 7 enthalten ist (genau genommen besteht ein kleiner Unterschied, da SHANAHAN Lösungen in einem etwas anderem Sinne betrachtet).

Die Methoden und Sätze dieser Nummer können ohne Schwierigkeit auf das nichtcharakteristische Anfangswertproblem für die Gl. (3) übertragen werden. Auch ist es möglich, gewisse partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, z.B. die Gleichung

$$u_{xyz} = f(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z, u_{xy}, u_{xz}\, u_{yz})$$

auf diese Weise zu behandeln.

Literatur

[1] PICARD, E.: Sur les méthodes d'approximations successives dans la théorie des équations différentielles. (Note I in Bd. 4 von G. DARBOUX, Leçons sur la théorie générale des surfaces, S. 353–367. Paris 1896.)

[2] OSGOOD, W. F.: Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $dy/dx = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzschen Bedingung. Monatsh. Math. u. Physik **9**, 331–345 (1898).

[3] ROSENBLATT, A.: Über die Existenz von Integralen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Ark. Mat. Astronom. Fys. **5**, Nr. 2 (1909).

[4] MONTEL, P.: Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure d'une équation différentielle. Bull. des sciences math. **50**, 205–217 (1926).
[5] TONELLI, L.: Sull' unicità della soluzione di un' equazione differenziale ordinarie. Atti della R. Accad. naz. dei Lincei, Rendiconti (6) **1**, 272–277 (1925).
[6] NAGUMO, M.: Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung. Japanese J. Math. **3**, 107–112 (1926).
[7] IYANAGA, S.: Über die Unitätsbedingungen der Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Japanese J. Math. **5**, 253–257 (1928).
[8] MÜLLER, M.: Über die Eindeutigkeit der Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen und die Konvergenz einer Gattung von Verfahren zur Approximation dieser Integrale. Sitzungsber. Heidelberger Akad. d. Wiss., math.-naturw. Kl., 1927, 9. Abh.
[9] KAMKE, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930.
[10] KAMKE, E.: Über die eindeutige Bestimmtheit der Integrale von Differentialgleichungen. II. Sitzungsber. Heidelberger Akad. d. Wiss., math.-naturw. Kl., 1930, 17. Abh.
[11] NAGUMO, M., et S. SIMODA: Note sur l'inégalité différentielle concernant les équations du type parabolique. Proc. Japan Acad. **27**, 536–539 (1951).
[12] WESTPHAL, H.: Zur Abschätzung der Lösung nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen. Math. Z. **51**, 690–695 (1949).
[13] GIULIANO, L.: Sull' unicità della soluzione per una classe di equazioni differenziali alle derivate parziali, paraboliche, non lineari. Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur. (8) **12**, 260–265 (1952).
[14] CODDINGTON, E. A., and N. LEVINSON: Theory of Ordinary Differential Equations. New York 1955.
[15] SZARSKI, J.: Sur la limitation et l'unicité des solutions d'un système non-linéaire d'équations paraboliques aux dérivées partielles du second ordre. Annales Polonici Mathematici II, **2**, 237–249 (1955).
[16] KISYNSKI, J.: Sur l'existence et l'unicité des solutions des problèmes classiques relatifs a l'équation $s = F(x, y, z, p, q)$. Annales universitatis Mariae Curie-Sklodowska **11**, 73–112 (1957).
[17] GUGLIELMINO, F.: Sulla risoluzione del problema di Darboux per l'equazione $s = f(x, y, z)$. Bollettino della Unione Matematica Italiana **13**, 308–318 (1958).
[18] NICKEL, K.: Einige Eigenschaften von Lösungen der Prandtlschen Grenzschicht-Differentialgleichungen. Arch. rational Mech. Anal. **2**, 1–31 (1958).
[19] WALTER, W.: Über die Differentialgleichung $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$. Teil I, Math. Z. **71**, 308–324 (1959); Teil II, Math. Z. **71**, 436–453 (1959).
[20] SHANAHAN, J. P.: On uniqueness questions for hyperbolic differential equations. Technical Note AFOSR (erscheint im Pacific J. Math.).
[21] DIAZ, J. B., and W. WALTER: On uniqueness theorems for ordinary differential equations and for partial differential equations of hyperbolic type. Transactions AMS (im Druck).
[22] WALTER, W.: On the existence theorem of Caratheodory for ordinary and hyperbolic equations. Technical Note BN–172, AFOSR.

Institut für Angewandte Mathematik der Technischen Hochschule Karlsruhe

(Eingegangen am 17. Dezember 1959)

NICKEL, K.
Math. Zeitschr. 74, 209–220 (1960)

Ein Eindeutigkeitssatz für instationäre Grenzschichten

Herrn ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von
Karl Nickel

1. Einleitung. Die Prandtlschen Differentialgleichungen einer zweidimensionalen instationären Wand-Grenzschicht in einem inkompressiblen Medium der kinematischen Zähigkeit $\nu > 0$ lauten (vgl. etwa H. SCHLICHTING [*1*], S. 167/68)

$$u_t + u\,u_x + v\,u_y = U_t + U\,U_x + \nu\,u_{yy}, \tag{1a}$$

$$u_x + v_y = 0. \tag{1b}$$

Darin sind $u(t, x, y)$ und $v(t, x, y)$ die beiden gesuchten Geschwindigkeitskomponenten, $U(t, x)$ ist die vorgegebene Außengeschwindigkeit, Buchstaben als Indizes bedeuten wie üblich partielle Ableitungen. Zu (1) gehören die Anfangs- und Randbedingungen

$$\text{(2a)}\quad t = 0: \quad u = \hat{u}(x, y), \quad v = \hat{v}(x, y) \quad \text{für} \quad x_0(0) \leqq x \leqq x_1, \quad 0 \leqq y < \infty$$

$$\text{(2b)}\quad x = x_0(t): \quad u = \tilde{u}(t, y) \quad \text{für} \quad 0 < t \leqq T, \quad 0 \leqq y < \infty$$

$$\text{(2c)}\quad y = 0: \quad u = u_0(t, x), \quad v = v_0(t, x) \quad \text{für} \quad 0 < t \leqq T, \quad x_0(t) \leqq x \leqq x_1$$

$$\text{(2d)}\quad y \to \infty: \quad u \to U(t, x)^{1}) \quad \text{für} \quad 0 < t \leqq T, \quad x_0(t) \leqq x \leqq x_1$$

mit vorgegebenen Funktionen $\hat{u}(x, y)$, $\hat{v}(x, y)$, $\tilde{u}(t, y)$ (zeitliches und räumliches Anfangs-Geschwindigkeitsprofil); $u_0(t, x)$ (Wandgeschwindigkeit) und $v_0(t, x)$ (Absauge- bzw. Ausblasegeschwindigkeit an der Wand).

Die mathematischen Fragen nach der Lösbarkeit der Gln. (1) unter den Bedingungen (2) sind noch weitgehend ungeklärt, insbesondere fehlte bisher ein Eindeutigkeitssatz. In der vorliegenden Note soll gezeigt werden, daß es unter geringen Voraussetzungen höchstens eine einzige Lösung gibt; die Frage nach der Existenz einer Lösung bleibt dagegen weiterhin offen. Dieser Eindeutigkeitssatz kann hier nur für $u \geqq 0$ bewiesen werden, insbesondere sind also Randwerte $U \geqq 0$ und $u_0 \geqq 0$ vorzuschreiben. Die Frage, ob im Falle der „Rückströmung" $u < 0$ noch Eindeutigkeit einer Lösung gilt, bleibt also unbeantwortet. Wegen der Verwandtschaft der Gln. (1) mit der Wärmeleitungsgleichung liegt jedoch die Vermutung nahe, daß für $u < 0$ die Eindeutigkeit einer Lösung nicht mehr allgemein gewährleistet ist.

Der Beweis für den angegebenen Satz wird wie im stationären Fall (vgl. [*2*]) mit Hilfe der Theorie der Differential-Ungleichungen geführt, die für parabolische

[1]) Diese letzte Forderung wird durch (12) noch näher präzisiert werden. Es läßt sich zeigen, daß diese „äußere Randbedingung" unter gewissen Voraussetzungen stets von selbst erfüllt ist und daher weggelassen werden darf.

Differentialgleichungen von M. NAGUMO [3] und H. WESTPHAL [4] begründet wurde. Diese Theorie bezieht sich auf explizite parabolische Differentialgleichungen der Gestalt

$$u_t = f(t, x, u, u_x, u_{xx}). \tag{3}$$

Dabei kann $x = (x_1, \ldots, x_m)$ ein Vektor sein, in diesem Falle ist $u_x = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_m})$ als m-dimensionaler Vektor, $u_{xx} = (u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \ldots, u_{x_m x_m})$ als $m \times m$-Matrix aufzufassen. Man kann das Differentialgleichungssystem (1) auf eine einzige Differentialgleichung der Gestalt (3) transformieren. Benutzt man dazu etwa die v. Misessche Transformation (vgl. Nr. 7), so ergibt sich die parabolische Differentialgleichung [vgl. (16), (17)]

$$w_\tau = \nu w (w w_{\eta\eta} + w_\eta^2) - w w_\xi + W_\tau + W W_\xi \tag{4}$$

($w(\tau, \xi, \eta)$ ist die gesuchte, $W(\tau, \xi)$ eine gegebene Funktion), die offenbar die Gestalt (3) hat. Jedoch besitzt (4) die Besonderheit, daß darin die zweite partielle Ableitung $w_{\xi\xi}$ (und auch die gemischte Ableitung $w_{\xi\eta}$) gar nicht auftritt. Dafür wird jedoch in ξ-Richtung statt zweier Randbedingungen nur noch eine einzige gefordert, so daß die Funktionswerte am zweiten Rand des Grundgebietes frei bleiben. Dieser Fall einer Lockerung der Randbedingungen unter gleichzeitiger Spezialisierung von f in (3) scheint bisher noch nicht betrachtet worden zu sein. Da er, wie die Differentialgleichung (4) der instationären Grenzschicht zeigt, von großem praktischem Interesse ist, soll das Nagumo-Westphalsche Lemma im folgenden in einer allgemeinen Gestalt formuliert werden, die auch die Gl. (4) mit ihren Randbedingungen noch umfaßt.

Es werde nämlich der Fall betrachtet, daß die Funktion f in (3) hinsichtlich l Veränderlicher x_λ nicht von den zweiten Ableitungen $u_{x_\lambda x_\mu}$ $(\lambda, \mu = 1, \ldots, l)$ abhängt. Dabei sei $0 \leqq l \leqq m$, es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß diese x_λ gerade die l ersten Veränderlichen $x_1, \ldots, x_l$ sind. Auf den in x_λ-Richtung liegenden Randpunkten des Grundbereichs brauchen dann keine Randwerte mehr vorgeschrieben zu sein, jedoch ist jede derartige weggefallene Randbedingung durch eine Monotonie-Eigenschaft von f hinsichtlich u_x zu ersetzen. Diese geschilderte Erweiterung ist auch unabhängig von der hier betrachteten speziellen Fragestellung von Bedeutung. Daher soll sie in den Nrn. 2–4 in größerer Allgemeinheit formuliert und bewiesen werden, als für das Folgende notwendig ist. Der dort angegebene Satz bildet die Grundlage für fast alle bis heute angegebenen Abschätzungsaussagen, Einzigkeitssätze und Stabilitätsbetrachtungen; er wird hier zum ersten Male in einer allgemeinen Gestalt ausgesprochen, die sowohl die gewöhnlichen Differentialgleichungen, die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung als auch die parabolischen Differentialgleichungen umfaßt. Für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung wurde ein entsprechender Satz erstmalig von M. NAGUMO [5] angegeben. Eine Erweiterung auf Systeme ist in einer Arbeit von J. SKARSKI [6] enthalten. Von einer Übertragung des hier angegebenen Lemmas auf Systeme von parabolischen Differential-

gleichungen — die sich leicht durchführen ließe — soll jedoch der Einfachheit halber abgesehen werden. Ebenfalls bleibe die in [5] angegebene Tatsache unberücksichtigt, daß die oben angegebene Monotonie-Voraussetzung noch gemildert werden kann, wenn dafür an die Regularität des Randes des betrachteten Grundbereichs höhere Anforderungen gestellt werden.

In den Nrn. 6 bis 8 wird dann mit einem allgemeinen Satz (Nr. 5) die Eindeutigkeit der Lösungen von (1) unter den Bedingungen (2) nachgewiesen. Als einfache Folgerung läßt sich daraus zeigen, daß auch bei instationären Grenzschichten stets $u \leqq U$ bleibt, falls diese Abschätzung nur auf einem Teil des Randes des betrachteten Gebietes erfüllt ist (bei stationären Grenzschichten wurde diese Ungleichung bereits früher bewiesen, vgl. [2]). Da diese Tatsache physikalisch durchaus nicht selbstverständlich ist und eine einfache Folgerung aus dem Eindeutigkeitssatz von Nr. 8 darstellt, soll sie in Nr. 9 nachgewiesen werden.

2. Definitionen. Sämtliche im folgenden auftretenden Größen werden als reell, die Funktionen als eindeutig erklärt vorausgesetzt. Die Zahlen $m \geqq 1$ und $0 \leqq l \leqq m$ seien ganz.

Es sei G eine (einstweilen noch) beschränkte, offene Punktmenge des $(m+1)$-dimensionalen euklidischen (t, x)-Raumes der Veränderlichen t und $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Das kleinste offene Intervall, das die Projektion von G auf die t-Achse enthält, sei die Strecke $0 < t < T$. Für die Randpunkte von G werden folgende Bezeichnungen eingeführt: Γ_1 sei die Menge derjenigen Randpunkte $(\bar{t}, \bar{x})$, zu denen es eine Halbumgebung $0 \leqq \bar{t} - t < \delta$, $\sum_{\mu=1}^{m} |\bar{x}_\mu - x_\mu| < \delta$ gibt, die ganz in G liegt. Die Menge der restlichen Randpunkte von G möge in die drei Teilmengen Γ', Γ_ν und Γ_x zerfallen.

Die Randpunkte von Γ_x sollen die folgenden Eigenschaften besitzen: Zu jedem Punkt $P = (t', x') \in \Gamma_x$ gebe es zunächst eine Halbgerade $\{t \leqq t',\ x = x'\}$ in negativer t-Richtung, die ein Geradenstück mit P als einem Endpunkt mit $G + \Gamma_1 + \Gamma_x$ gemeinsam hat. Durch P gebe es weiter l Halbgeraden $\{t = t';\ x_\lambda \underset{(\geqq)}{\leqq} x'_\lambda;\ x_\mu = x'_\mu$ für $\mu \neq \lambda, \mu = 1, \ldots, m\}$ in positiver oder negativer x_λ-Richtung für $\lambda = 1, \ldots, l$, von denen jede ein Geradenstück g_λ mit P als einem Endpunkt mit $G + \Gamma_1 + \Gamma_x$ gemeinsam hat. Schließlich gebe es zu P sogar eine $(m-l)$-dimensionale Umgebung $\left\{t = t',\ x_\lambda = x'_\lambda \text{ für } \lambda = 1, \ldots, l,\ \sum_{\mu=l+1}^{m} |x_\mu - x'_\mu| < \delta\right\}$, die ganz in $G + \Gamma_1 + \Gamma_x$ liegt. Dem Punkt P werde ein Vektor $q = (q_1, \ldots, q_l)$ zugeordnet. Liegt g_λ von P aus in positiver x_λ-Richtung, so soll $q_\lambda = +1$, im anderen Falle $q_\lambda = -1$ gesetzt werden.

Von jedem Punkt $P = (t', x') \in \Gamma_\nu$ aus gebe es eine auf der Hyperebene $t = t'$ liegende Halbgerade ν [2]), die ein Geradenstück mit P als einem End-

[2]) ν tritt hier an die Stelle der inneren Normalen, eine Verwechslung mit der Bezeichnung für die kinematische Zähigkeit in den Gln. (1a) und (4) ist wohl nicht zu befürchten, da in den Anwendungen der vorliegenden Theorie auf (1a) und (4) in den Nummern 6—9 die Punktmenge Γ_ν leer ist.

punkt mit $G+\Gamma_1+\Gamma_x$ gemeinsam hat. Die Menge Γ'' schließlich enthalte die restlichen Punkte des Randes. Die Mengen Γ_ν und Γ_x können leer sein (Γ_x für $l=0$), dagegen enthält Γ'' mindestens die Randpunkte von G mit $t=0$. Bezeichnet man die abgeschlossene Hülle von G mit B, so gilt $B=G+\Gamma+\Gamma_1+\Gamma_x$, wenn noch $\Gamma=\Gamma''+\Gamma_\nu$ zur Abkürzung gesetzt wurde. Auf dem Rand Γ sollen Randwerte für die Differentialgleichung (3) vorgeschrieben werden und zwar der Funktionswert u auf Γ'', die „Normal"ableitung u_ν auf Γ_ν, auf $\Gamma_1+\Gamma_x$ dagegen sind die Randwerte frei.

Ist die quadratische $n\times n$-Matrix $A=(a_{ik})$ positiv semidefinit, d.h. ist $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k \geqq 0$ für alle x_i $(i=1,\ldots,n)$, dann soll kurz $A\geqq 0$ geschrieben werden. Statt $-A\equiv(-a_{ik})\geqq 0$ werde auch die Abkürzung $A\leqq 0$, statt $A-B\equiv(a_{ik}-b_{ik})\geqq 0$ [$B=(b_{ik})$ sei ebenfalls eine $n\times n$-Matrix] die Schreibweise $A\geqq B$ gebraucht.

Es sei die Funktion

$$f(t, x_1, \ldots, x_m, z, p_1, \ldots, p_m, r_{l+1\,l+1}, r_{l+1\,l+2}, \ldots, r_{m\,m}) = f(t, x, z, p, r)$$

definiert für $(t, x)\in G+\Gamma_1+\Gamma_x$ und beliebige Werte z, $p=(p_1,\ldots,p_m)$, $r=(r_{l+1\,l+1}, r_{l+1\,l+2}, \ldots, r_{m\,m})$. Weiter sei f dort schwach monoton wachsend bezüglich r. Das soll heißen: Es ist $f(t, x, z, p, \bar{r})\geqq f(t, x, z, p, r)$, wenn die $(m-l)\times(m-l)$-Matrix $\bar{r}-r\geqq 0$, d.h. positiv semidefinit ist. Außerdem sei noch f für jeden Randpunkt $P\in\Gamma_x$ schwach monoton wachsend oder fallend in p_λ $(\lambda=1,\ldots,l)$, je nachdem dort die λ-te Komponente q_λ des P zugeordneten Vektors $q=(q_1,\ldots,q_l)$ positiv oder negativ ist. Die Funktion $h(t, x_1, \ldots, x_m, z)=h(t, x, z)$ sei definiert für $(t, x)\in\Gamma_\nu$ und beliebige Werte z.

Die Funktion $u(t, x_1, \ldots, x_m)=u(t, x)$ soll eine „zulässige Funktion" heißen, wenn gilt: Es sei u stetig auf B, in $G+\Gamma_1+\Gamma_x$ mögen die partiellen Ableitungen $u_t=\frac{\partial u}{\partial t}$, $u_\mu=\frac{\partial u}{\partial x_\mu}$ $(\mu=1,\ldots,m)$ und $u_{ik}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}$ $(i,k=l+1,\ldots,m)$ existieren mit $u_{ik}\in C$ (die Ableitungen u_{ik} seien in G stetig und auf den Rand hinauf stetig fortsetzbar), schließlich existiere auf Γ_ν noch die Ableitung u_ν von u in Richtung ν. Zur Abkürzung werde $u_x=(u_1,\ldots,u_m)$, $u_{xx}=\{u_{ik}\}$ geschrieben. Die Gesamtheit der zulässigen Funktionen bilde die Klasse Z. Endlich seien noch Randwerte $U(t, x)\in C$ für $(t, x)\in\Gamma''$ definiert.

Mit diesen Bezeichnungen und Funktionen werde das folgende Anfangs-Randwertproblem AR eingeführt:

$$\left.\begin{array}{lll} Pu\equiv u_t-f(t, x, u, u_x, u_{xx})=0 & \text{in} & G+\Gamma_1+\Gamma_x,\\ R'u\equiv u-U=0 & \text{auf} & \Gamma'',\\ R_\nu u\equiv u_\nu-h(t, x, u)=0 & \text{auf} & \Gamma_\nu, \end{array}\right\} AR$$

wobei als Lösungen $u(t, x)$ nur zulässige Funktionen $u\in Z$ zugelassen sind. Ist Γ_ν leer, so liegt das erste Anfangs-Randwertproblem vor.

Zur Abschätzung der Lösungen des Anfangs-Randwertproblems AR werde noch die Klasse O der „Oberfunktionen" (bzw. U der „Unterfunktionen")

erklärt. Sie möge alle diejenigen Funktionen $u \in Z$ umfassen, die den Ungleichungen

$$(5)\qquad \begin{cases} Pu \gtrless 0 & \text{in } G + \Gamma_1 + \Gamma_x, \\ R'u \gtrless 0 & \text{auf } \Gamma', \\ R_\nu u \leqq 0 & \text{auf } \Gamma_\nu \end{cases}$$

genügen.

3. Lemma nach NAGUMO - WESTPHAL.

LEMMA. *Die Funktion $u \in Z$ sei Lösung von AR, weiter gelte $v \in U$, $w \in O$. Dann gilt auf ganz B*

$$(6)\qquad v(t, x) < u(t, x) < w(t, x).$$

BEWEIS durch Antithese. Man betrachtet zunächst nur den linken Teil von (6). Es werde angenommen, die Behauptung sei falsch, d.h. es gebe Stellen $(t', x') \in G + \Gamma_1 + \Gamma_x + \Gamma_\nu$ mit $v(t', x') \geqq u(t', x')$. Wegen der Beschränktheit von G gibt es dann eine konvergente Folge (t'_n, x'_n) mit $t'_n \to \bar{t} = \inf t'$, $x'_n \to \bar{x}$ und es ist $(\bar{t}, \bar{x}) \in B$. Wegen der Stetigkeit von u und v auf B gilt dann $\bar{x}(\bar{t}, \bar{x}) \geqq u(\bar{t}, \bar{x})$. Wegen $R'v < 0$ liegt daher $(\bar{t}, \bar{x})$ nicht auf Γ', d.h. $(\bar{t}, \bar{x}) \in G + \Gamma_1 + \Gamma_x + \Gamma_\nu$. Damit ist eine Annäherung von kleineren t-Werten her möglich mit dem Resultat $v(\bar{t}, \bar{x}) = u(\bar{t}, \bar{x})$.

Angenommen, es sei $(\bar{t}, \bar{x}) \in \Gamma_\nu$. Für jede Annäherung auf der Hyperebene $t = \bar{t}$ gilt dann

$$(7)\qquad v(\bar{t}, x) - u(\bar{t}, x) \leqq v(\bar{t}, \bar{x}) - u(\bar{t}, \bar{x}) = 0,$$

also ist in $(\bar{t}, \bar{x})$ auch

$$(8)\qquad \frac{\partial}{\partial \nu}(v - u) = v_\nu - u_\nu \leqq 0.$$

Wegen $R_\nu v < 0$ und $R_\nu u = 0$ gilt dort aber auch $0 < v_\nu - h(\bar{t}, \bar{x}, v) = v_\nu - h(\bar{t}, \bar{x}, u) = v_\nu - u_\nu$. Dies steht im Widerspruch zu (8), also ist $(\bar{t}, \bar{x}) \in G + \Gamma_1 + \Gamma_x$. Nach der Voraussetzung über den Randteil Γ_x ist dann eine Annäherung auf der Halbgeraden $(t, \bar{x})$ von kleineren t-Werten her möglich, diese ergibt

$$(9)\qquad v_t(\bar{t}, \bar{x}) \geqq u_t(\bar{t}, \bar{x}).$$

Angenommen, es sei nun $(\bar{t}, \bar{x}) \in G + \Gamma_1$. Dann findet man aus (7) wegen der Existenz von u_x, v_x und der Existenz und Stetigkeit von u_{xx}, v_{xx} die Beziehungen $v_x(\bar{t}, \bar{x}) = u_x(\bar{t}, \bar{x})$ und $v_{xx}(\bar{t}, \bar{x}) \leqq u_{xx}(\bar{t}, \bar{x})$. Setzt man diese Relationen in $Pv < 0$ und $Pu = 0$ ein, so findet man wegen der Monotonie von f hinsichtlich der letzten Veränderlichen: $v_t(\bar{t}, \bar{x}) < f(\bar{t}, \bar{x}, v, v_x, v_{xx}) \leqq f(\bar{t}, \bar{x}, u, u_x, u_{xx}) = u_t(\bar{t}, \bar{x})$ in Widerspruch zu (9). Also könnte höchstens noch $(\bar{t}, \bar{x}) \in \Gamma_x$ sein.

Angenommen, es sei $(\bar{t}, \bar{x}) = P \in \Gamma_x$ und der zu diesem Punkt P gehörende Vektor sei $q = (q_1, \ldots, q_l)$. Dann gilt wegen (7) dort $v_{x_\mu} = u_{x_\mu}$ für $\mu = l+1, \ldots, m$ und $v_{xx} = u_{xx}$. Ferner ist $v_{x_\lambda} \leqq u_{x_\lambda}$ für alle $\lambda = 1, \ldots, m$, für die $q_\lambda > 0$ ist, und $v_{x_\lambda} \geqq u_{x_\lambda}$ für alle $\lambda = 1, \ldots, m$, für die $q_\lambda < 0$ ist. Setzt man diese Ungleichungen in $Pv < 0$ und $Pu = 0$ ein, so findet man wegen der vorausgesetzten Monotonie-

Eigenschaft von $f(t, x, z, p, r)$ hinsichtlich der Veränderlichen r und der l ersten Veränderlichen p an der Stelle $P=(\bar{t}, \bar{x})$: $v_t < f(\bar{t}, \bar{x}, v, v_x, v_{xx}) \leqq f(\bar{t}, \bar{x}, u, v_x, u_{xx}) = f(\bar{t}, \bar{x}, u, v_{x_1}, \ldots, v_{x_l}, u_{x_{l+1}}, \ldots, u_{x_m}, u_{xx}) \leqq f(\bar{t}, \bar{x}, u, u_x, u_{xx}) = u_t$ in Widerspruch zu (9). Aus diesem letzten Widerspruch folgt die Unhaltbarkeit der eingangs getroffenen Annahme, also ist die linke Seite von (6) richtig. Die rechte Seite wird genau so bewiesen.

4. Erweiterungen der Voraussetzungen.

ZUSATZ 1. *Ist $m-l=1$, d.h. tritt nur eine einzige zweite Ableitung $u_{x_m x_m}$ auf (wie z.B. in der Gl. (4)), dann genügt offenbar schon die Existenz von $u_{x_m x_m}$. Die Stetigkeit von $u_{x_m x_m}$ braucht dann bei der Definition der Funktionenklasse Z nicht mehr vorgeschrieben zu werden.*

ZUSATZ 2. *Offenbar kann das Lemma von Nr. 3 verschärft werden zu der folgenden Aussage: Es seien $u, v \in Z$ zwei zulässige Funktionen mit der Eigenschaft*

$$R' v < R' u \quad \text{auf } \Gamma'.$$

Außerdem gelte noch

$$R_\nu v > R_\nu u$$

an denjenigen Stellen $(t', x') \in \Gamma_\nu$, an denen $v=u$ und $v_\nu = u_\nu$ ist. Ferner sei

$$P v < P u$$

mindestens an denjenigen Stellen $(t', x') \in G + \Gamma_1 + \Gamma_x$, an denen $v=u$, $v_t \geqq u_t$, $v_{xx} \leqq u_{xx}$ ist und für die weiter $v_x = u_x$ auf $G+\Gamma_1$ und sign $q_\lambda (v_{x_\lambda} - u_{x_\lambda}) \leqq 0$ *für $\lambda = 1, \ldots, l$, aber $v_{x_\mu} = u_{x_\mu}$ für $\mu = l+1, \ldots, m$ ist.*

Dann gilt sogar $v < u$ auf ganz B.

Der zweite Zusatz wird im folgenden jedoch nicht benutzt werden.

UNBESCHRÄNKTER GRUNDBEREICH. Ist das Gebiet G nicht beschränkt, so kann man G durch eine topologische Abbildung $t=t(t^*, x^*)$, $x=x(t^*, x^*)$ auf einen beschränkten Bereich G^* des (t^*, x^*)-Raumes abbilden (vgl. dazu [2], S. 6/7) und die obigen Überlegungen bezüglich G^* durchführen. Damit ist dieser Fall auf den früheren zurückgeführt; man kann jetzt die Ränder Γ', Γ_1, Γ_ν und Γ_x einführen, auch wenn sie unendlich ferne Punkte enthalten, und kann auch die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von u in diesen Punkten erklären, indem man die Funktion $u^*(t^*, x^*) = u\big(t(t^*, x^*), x(t^*, x^*)\big)$ in diesen Randpunkten betrachtet. Es ist nur zu beachten, daß jetzt Begriffe wie „Stetigkeit auf B", „Randwerte auf Γ" usw., einerseits von der benutzten Abbildung abhängen und andererseits gegenüber dem sonst üblichen Gebrauch abgeändert sind.

Es ist wesentlich, daß beim Übergang von G auf G^* weder die Differentialgleichung (3) noch die betrachteten Randbedingungen in $A\,R$ mittransformiert zu werden brauchen. Diese Tatsache ist für die Anwendungen oftmals sehr nützlich und wird auch beim folgenden Eindeutigkeitssatz für instationäre Grenzschichten die Betrachtungen vereinfachen.

5. Das Eindeutigkeitsprinzip *(vgl. dazu [2], S. 13). Zu jeder Lösung $u \in Z$ von AR gebe es eine Folge von „approximierenden" Ober-Funktionen (oder Unter-Funktionen) $v_k \in O(U)$ $(k=1, 2, \ldots)$ mit $v_k(t, x) \to u(t, x)$ in $G+\Gamma_1+\Gamma_x$ für $k \to \infty$.*

Dann hat AR höchstens eine Lösung $u \in Z$.

Der BEWEIS verläuft wörtlich wie in [2], S. 13.

Mit Hilfe dieses Kriteriums soll nun der angekündigte Eindeutigkeitssatz in Nr. 8 bewiesen werden. Zuvor sind jedoch die Voraussetzungen zu präzisieren, die an die Lösungsfunktionen u und v von (1) und an die in (2) auftretenden Randwerte $\hat{u}, \hat{v}, \tilde{u}, u_0, v_0$ und U zu stellen sind. Außerdem ist noch die angekündigte Transformation nach v. MISES durchzuführen. Das soll in den folgenden Nrn. 6 und 7 geschehen.

6. Voraussetzungen. Bei dem Differentialgleichungssystem (1) ist $m=2$ und $l=1$, die drei unabhängigen Veränderlichen sind statt mit t, x_1, x_2 dem physikalischen Brauche folgend mit t, x, y bezeichnet. Nach (2) ist das Grundgebiet G durch $\{0<t<T,\ x_0(t)<x<x_1,\ 0<y<\infty\}$ erklärt, dabei sei $x_0(t)$ in $0 \leqq t \leqq T$ definiert. Die Randmenge Γ_t ist leer, es ist Γ_1: $\{t=T,\ x_0(T)<x<x_1,\ 0<y<\infty\}$ und Γ_x: $\{0<t \leqq T,\ x=x_1,\ 0<y<\infty\}$. G ist unbeschränkt bezüglich y, zur Definition der abgeschlossenen Hülle B und des Randes $\Gamma = \Gamma'$ benutzt man die topologische Abbildung

$$t = t^*, \quad x = x^*, \quad y = \frac{y^*}{1-y^*} \tag{10}$$

mit der Umkehrung $t^*=t,\ x^*=x,\ y^*=\frac{y}{1+y}$. Die Transformation (10) ist offenbar von der in Nr. 4 betrachteten Art. Sie bildet G umkehrbar eindeutig ab auf das beschränkte Gebiet G^* mit der abgeschlossenen Hülle B^*: $\{0 \leqq t^* \leqq T,\ x_0(t) \leqq x^* \leqq x_1,\ 0 \leqq y^* \leqq 1\}$. Die Randmenge Γ^* ist dann durch $\{t^*=0,\ x_0(0) \leqq x \leqq x_1,\ 0 \leqq y^* \leqq 1\} + \{0 \leqq t^* \leqq T,\ x^*=x_0(t), 0 \leqq y^* \leqq 1\} + \{0 \leqq t^* \leqq T,\ x_0(t) \leqq x^* \leqq x_1,\ y^*=0, 1\}$ erklärt.

Für die Randfunktionen $U(t, x)$, $u_0(t, x)$, $v_0(t, x)$, $\tilde{u}(t, y)$, $\hat{u}(x, y)$ und $\hat{v}(x, y)$ gelte[3])

a) Auf $0 \leqq t \leqq T,\ x_0(t) \leqq x \leqq x_1$ seien die Funktionen $U \geqq 0$, $u_0 \geqq 0$, v_0 einschließlich der Ableitungen U_x und u_{0x} stetig, U_t und u_{0t} seien dort beschränkt.

b) In $0 \leqq t \leqq T,\ 0 \leqq y < \infty$ seien $\tilde{u} \geqq 0$ und $\tilde{u}_y$ stetig, $\tilde{u}_t$ und $\tilde{u}_{yy}$ seien dort beschränkt, ferner gelte $\tilde{u}>0$ für $0 \leqq t<T,\ 0<y<\infty$.

In $0 \leqq t \leqq T,\ 0 \leqq s \leqq 1$ sei sogar $\tilde{u}\left(x, \frac{s}{1-s}\right)$ stetig.

c) In $x_0(0) \leqq x \leqq x_1,\ 0 \leqq y < \infty$ seien $\hat{u} \geqq 0$, $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$ und $\hat{v}$ stetig, $\hat{u}_{yy}$ und $\hat{v}_y$ seien dort beschränkt, ferner gelte $\hat{u}>0$ in $x_0(0) \leqq x<x_1,\ 0<y<\infty$.

In $x_0(0) \leqq x \leqq x_1,\ 0 \leqq s \leqq 1$ sei sogar $\hat{u}\left(x, \frac{s}{1-s}\right)$ stetig.

[3]) Aus Gründen einer einfachen Formulierbarkeit sind die folgenden Voraussetzungen nicht das mögliche Optimum, vielmehr könnte manche dieser Forderungen noch gemildert werden.

d) In $0 \leqq t \leqq T$, $x_0(t) \leqq x \leqq x_1$, $0 \leqq y < \infty$ seien noch die folgenden Verträglichkeitsbedingungen erfüllt:

$$\tilde{u}(t, 0) = u_0\big(t, x_0(t)\big), \quad \lim_{s \to 1} \tilde{u}\Big(t, \frac{s}{1-s}\Big) = U\big(t, x_0(t)\big),$$

$$\hat{u}(x, 0) = u_0(0, x), \quad \hat{v}(x, 0) = v_0(0, x),$$

$$\lim_{s \to 1} \hat{u}\Big(x, \frac{s}{1-s}\Big) = U(0, x), \quad \hat{u}\big(x_0(0), y\big) = \tilde{u}(0, y), \quad \hat{u}_x + \hat{v}_y = 0.$$

Anstatt ein Funktionenpaar $u(t, x, y)$, $v(t, x, y)$ als Lösung des Differentialgleichungssystems (1) unter den Randbedingungen (2) zu betrachten, soll im folgenden $v(t, x, y)$ nach den Gln. (1b) und (2c) nur noch als Abkürzung für den Ausdruck

$$v(t, x, y) = v_0(t, x) - \int_0^y u_x(t, x, s)\, ds \tag{11}$$

stehen und damit $u(t, x, y)$ allein als „Lösung" des Anfangs-Randwertproblems (1), (2) aufgefaßt werden.

Eine Funktion $u(t, x, y)$ werde nun dann als Lösung von (1), (2) bezeichnet, wenn gilt: $u(t, x, y)$ sei für $0 \leqq t \leqq T$, $x_0(t) \leqq x \leqq x_1$, $0 \leqq y < \infty$ erklärt und $u\Big(t, x, \frac{s}{1-s}\Big)$ sei auf B^* noch stetig. Die partiellen Ableitungen u_t, u_x, u_y, u_{yy} seien in $G + \Gamma_1 + \Gamma_2$ erklärt, dabei seien u_x und u_y in $0 \leqq t \leqq T$, $x_0(t) \leqq x \leqq x_1$, $0 \leqq y < \infty$ sogar noch stetig, u_t und u_{yy} seien dort beschränkt. In $0 \leqq t < T$, $x_0(t) \leqq x < x_1$, $0 < y < \infty$ sei stets $u > 0$, auf $0 \leqq t < T$, $x_0(t) \leqq x < x_1$ gelte entweder $u(t, x, 0) = u_0(t, x) > 0$ oder $u_y(t, x, 0) > 0$. Die Funktion $u(t, x, y)$ genüge zusammen mit der durch (11) definierten Funktion v dem Differentialgleichungssystem (1) und erfülle die Anfangs- und Randbedingungen (2), wobei (2, d) als

$$\lim_{s \to 1-0} u\Big(t, x, \frac{s}{1-s}\Big) = U(t, x) \tag{12}$$

aufgefaßt werden soll. Die Gesamtheit dieser Lösungsfunktionen sei mit L bezeichnet.

7. Die v. Misessche Transformation. Entsprechend zu der Transformation von R. v. MISES [7] für den stationären Fall sollen auch hier für die Funktionen $u \in L$ neue Koordinaten eingeführt werden durch

$$\begin{cases} \tau(t) = t, \\ \xi(x) = x, \\ \eta(t, x, y) = \eta_0(t, x) + \int_0^y u(t, x, s)\, ds \\ \text{mit } \eta_0(t, x) = -\int_{x_0}^{x} v_0(t, s)\, ds. \end{cases} \tag{13}$$

Dadurch wird das Gebiet G übergeführt in $\overline{G}$: $\{0<\tau<T,\ x_0(\tau)<\xi<x_1,\ \eta_0(\tau,\xi)<\eta<\infty\}$[4]). Führt man (10) und (13) hintereinander aus, dann ergibt sich eine topologische Abbildung des unbeschränkten Gebietes $\overline{G}$ auf das beschränkte Gebiet G^*. Durch diese Abbildung werden den Rändern Γ^*, Γ_1^* und Γ_x^* Randmengen $\overline{\Gamma}$, $\overline{\Gamma}_1$ und $\overline{\Gamma}_x$ zugeordnet, die zum Teil unendlich ferne Punkte mitenthalten; es ist damit möglich, von der Stetigkeit einer Funktion auf $\overline{B}=\overline{G}+\overline{\Gamma}+\overline{\Gamma}_1+\overline{\Gamma}_x$ zu sprechen. In diesem Sinne ist dann $\overline{\Gamma}$: $\{\tau=0,\ x_0(0)\leqq\xi\leqq x_1,\ \eta_0(0,\xi)\leqq\eta\leqq\infty\}+\{0\leqq\tau\leqq T,\ x_0(\tau)\leqq\xi\leqq x_1,\ \eta=\eta_0(\tau,\xi),\ \eta=\infty\}+\{0\leqq\tau\leqq T,\ \xi=x_0(\tau),\ \eta_0(\tau,\xi)\leqq\eta\leqq\infty\}$ aufzufassen, während $\overline{\Gamma}_1$: $\{\tau=T,\ x_0(T)<\xi<x_1,\ \eta_0(T,\xi)<\eta<\infty\}$ und $\overline{\Gamma}_x$: $\{0<\tau\leqq T,\ \xi=x_1,\ \eta_0(\tau,x_1)<\eta<\infty\}$ keine unendlich fernen Punkte enthalten.

Da in G die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(\tau,\xi,\eta)}{\partial(t,x,y)}=u>0$ ist und da (13) von sehr spezieller Gestalt ist, kann diese Transformation sogar im Großen eindeutig umgekehrt werden. Die Umkehrfunktionen mögen mit $\overline{t}(\tau)$, $\overline{x}(\xi)$, $\overline{y}(\tau,\xi,\eta)$ bezeichnet werden. Ist $u\in L$, dann setzt man

$$(14)\qquad \begin{cases} & w(\tau,\xi,\eta)=u\left(\overline{t}(\tau),\overline{x}(\xi),\overline{y}(\tau,\xi,\eta)\right) \\ \text{und} & \\ & W(\tau,\xi)=U\left(\overline{t}(\tau),\overline{x}(\xi)\right). \end{cases}$$

Die Funktion w ist offenbar stetig auf $\overline{B}$. Weiter existieren die partiellen Ableitungen w_τ, w_ξ, w_η und $w_{\eta\eta}$ in $\overline{G}+\overline{\Gamma}_1+\overline{\Gamma}_x$. Wegen $m-l=1$ ist dann nach dem Zusatz 1 von Nr. 4 für $u\in L$ die Funktion $w(\tau,\xi,\eta)$ zulässig, d.h. es ist $w\in Z$. Weiter gelten die Umrechnungsformeln

$$(15)\qquad u_t=w_\tau,\qquad u\,u_x+v\,u_y=w\,w_\xi,\qquad u_y=w\,w_\eta,\quad u_{yy}=w(w\,w_{\eta\eta}+w_\eta^2).$$

Damit geht das Differentialgleichungssystem (1) über in die partielle explizite parabolische Differentialgleichung

$$(16)\qquad Pw\equiv w_\tau-f(\tau,\xi,w,w_\xi,w_\eta,w_{\eta\eta})=0$$

mit

$$(17)\qquad f=\nu\,w(w\,w_{\eta\eta}+w_\eta^2)-w\,w_\xi+W_\tau+W\,W_\xi.$$

Da f wegen $\nu>0$ in der Veränderlichen $w_{\eta\eta}$ schwach monoton wächst, ist (16) von der in Nr. 3 untersuchten Gestalt. Aus den Anfangs- und Randbedingungen (2) ergeben sich bei der v. Misesschen Transformation Anfangs- und Randwerte für w, und zwar sind die Funktionswerte von w auf den Randflächen $\overline{\Gamma}$ von $\overline{B}$ vorgeschrieben. Auf den beiden Randebenen $\overline{\Gamma}_1$ und $\overline{\Gamma}_x$ werden dagegen keine Randwerte gefordert. Da in (17) kein Glied mit $w_{\xi\xi}$ auftritt und auf $\xi=x_1$ stets $\frac{\partial f}{\partial w_\xi}=-w\leqq 0$ bleibt, ist das zulässig, und das verallgemeinerte Nagumo-Westphalsche Lemma von Nr. 3 kann auf (16) angewendet werden.

[4]) Wegen der Stetigkeit von $u\left(t,x,\frac{s}{1-s}\right)$ und wegen (11) ist offenbar $\lim\limits_{y\to\infty}\eta(t,x,y)=\infty$.

8. Einzigkeitsbeweis. Angenommen, das Differentialgleichungssystem (1) hätte unter den Randbedingungen (2) zwei verschiedene Lösungen $u_1 \in L$ und $u_2 \in L$. Wegen der eindeutigen Umkehrbarkeit und der speziellen Gestalt von (13) hätte dann auch (16) zwei verschiedene Lösungen $w_1 = u_1\big(\bar{t}(\tau),\ \bar{x}(\xi),\ \bar{y}_1(\tau, \xi, \eta)\big)$ und $w_2 = u_2\big(\bar{t}(\tau),\ \bar{x}(\xi),\ \bar{y}_2(\tau, \xi, \eta)\big)$ [da die Transformation (13) noch von u_1 bzw. u_2 abhängt, ergeben sich zwei verschiedene Umkehrfunktionen $\bar{y}_1$ und $\bar{y}_2$]. Es genügt also, nachzuweisen, daß (16) höchstens eine Lösung $w \in Z$ besitzt. Das soll mit dem Einzigkeitsprinzip von Nr. 5 geschehen. Der folgende Beweis entspricht ungefähr dem Vorgehen beim stationären Fall (d.h. für $u_t \equiv 0$), man vgl. dazu [2], S. 26—28.

Es soll gezeigt werden, daß es zu jeder Lösung $w \in Z$ von (16) mit auf $\overline{\Gamma}$ vorgeschriebenen Randwerten eine Folge von approximierenden Oberfunktionen $z_n(\tau, \xi, \eta)$ gibt, für die also gilt:

$$z_n > w \quad \text{auf} \quad \overline{\Gamma}, \tag{18}$$

$$\lim_{n \to \infty} z_n = w \quad \text{auf} \quad \overline{G} + \overline{\Gamma}_1 + \overline{\Gamma}_x, \tag{19}$$

und

$$P z_n > 0 \quad \text{auf} \quad \overline{G} + \overline{\Gamma}_1 + \overline{\Gamma}_x. \tag{20}$$

Es wird sich ergeben, daß schon die Funktionenfolge

$$z_n = w + \frac{1}{n} e^{\alpha t}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

die Eigenschaften (18) bis (20) besitzt, wenn über die vorläufig noch freie Konstante α passend verfügt wird. Der Ansatz (21) erfüllt offenbar nach Konstruktion die Bedingungen (18) und (19), es bleibt also nur noch (20) nachzuprüfen.

Setzt man (21) in (16) ein, so ergibt sich

$$P z_n = P w + \frac{1}{n} e^{\alpha t} A w \tag{22}$$

mit

$$A w = \alpha + w_\xi - \nu \left[\left(2w + \frac{1}{n} e^{\alpha t} \right) w_{\eta\eta} + w_\eta^2 \right].$$

Macht man die v. Misessche Transformation (10) wieder rückgängig, so findet man $A w = \alpha + B u$ mit

$$B u = \frac{1}{u} \left[U_t + U U_x - u_t + \nu u_{yy} \right] - \frac{\nu}{u^3} \left| \left(2u + \frac{1}{n} e^{\alpha t} \right) u u_{yy} - \left(u + \frac{1}{n} e^{\alpha t} \right) u_y^2 \right|.$$

Wegen der Beschränktheit der Funktionen u_t, u_{yy}, U, U_t, U_x gibt es dann Konstanten E und K derart, daß auf ganz B eine Abschätzung

$$B u \geqq \frac{E}{u} + \frac{K}{u^2} + \frac{\nu}{n} e^{\alpha t} \frac{u_y^2}{u^3} \equiv C u$$

gilt.

Es soll gezeigt werden, daß $C u$ gleichmäßig nach unten beschränkt ist. Da nach den Voraussetzungen über $u \in L$ die Möglichkeit $u(t, x_1, 0) = u_y(t, x_1, 0) = 0$

und $u(T, x, 0) = u_y(T, x, 0) = 0$ nicht ausgeschlossen ist, läßt sich diese Behauptung nicht auf ganz B, sondern nur auf einem Teilbereich B_2 zeigen. Es seien x_2 und T_2 zwei Zahlen mit der Eigenschaft $\sup_{0 \le t \le T} x_0(t) < x_2 < x_1$ und $0 < T_2 < T$. Dann enthalte B_2 diejenigen Punkte von B, für die $x \le x_2$ und $t \le T_2$ ist.

Wäre nun Cu auf B_2 nicht gleichmäßig nach unten beschränkt, dann gäbe es eine Punktfolge (t_k, x_k, y_k) derart, daß die Folge $Cu(t_k, x_k, y_k) \to -\infty$ strebt. Wegen $\lim_{y \to \infty} u = U > 0$ bleibt die Folge der y_k sicher beschränkt. Also gibt es eine konvergente Teilfolge $(t_{k_l}, x_{k_l}, y_{k_l}) \to (\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$. Wäre $\bar{y} > 0$, dann wäre auch $u(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}) > 0$, mithin bliebe Cu beschränkt. Also ist $\bar{y} = 0$ und $u(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}) = 0$, und nach der Konstruktion von B_2 ist dann auch $u_y(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}) > 0$. Wegen der Stetigkeit von u_y ist dann auch $u_y > 0$ in einer ganzen Umgebung von $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$. Wegen der speziellen Gestalt von Cu wäre dann aber $\lim_{y \to 0} Cu(\bar{t}, \bar{x}, y) = +\infty$ im Gegensatz zur oben getroffenen Annahme. Mithin gibt es eine Konstante β derart, daß $Bu \ge Cu \ge \beta$ ist auf ganz B_2. Setzt man dann $\alpha > -\beta$, dann gilt die Abschätzung $Aw > 0$ und mithin ist in (22) stets $Pz_n > Pw$.

Damit sind also die Funktionen z_n auf B_2 approximierende Oberfunktionen. Nach dem Einzigkeitsprinzip von Nr. 5 und den einleitenden Überlegungen hat daher das Anfangs-Randwertproblem (1), (2) auf B_2 höchstens eine einzige Lösung aus der Klasse L. Dieses Ergebnis ist richtig für jeden Teilbereich $B_2 \subset B$, mithin gilt es auch noch für $x_2 \to x_1$ und $T_2 \to T$, d.h. auf ganz B und das war gerade die Behauptung.

9. Eine Folgerung aus dem Einzigkeitssatz.

ZUSATZ ZUM EINZIGKEITSSATZ. *Es sei $\hat{G} \subset G$ eine offene Untermenge von G mit den wie oben gebildeten Rändern $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Gamma}_1$ und $\hat{\Gamma}_x$. Es sei $\bar{u} \in L$.*

Dann hat das Anfangs-Randwertproblem (1) *unter den Randwerten $u = \bar{u}$ auf $\hat{\Gamma}$ höchstens eine Lösung $u \in L$.*

Der Beweis des Einzigkeitssatzes der Nr. 8 gilt auch für diesen etwas allgemeineren Sachverhalt.

In dem allgemeinen Lemma von Nr. 3 müssen in den Ungleichungen (5) die echten Ungleichheitszeichen stehen. Wird nämlich darin noch Gleichheit zugelassen, dann ist die Aussage (6) im allgemeinen falsch, selbst wenn man darin $<$ durch $\le$ ersetzt. Insbesondere ist es also nicht möglich, für zwei Lösungen u und $\bar{u}$ von (3) eine Abschätzung $u \le \bar{u}$ auf B zu folgern allein aus der Tatsache, daß sie auf dem Rand Γ gültig ist. Für die spezielle Differentialgleichung (16), (17) läßt sich diese Verschärfung des Nagumo-Westphalschen Lemmas jedoch leicht aus dem obenstehenden Zusatz zum Einzigkeitssatz folgern:

SATZ. *Es sei $u \in L$; die Funktion $\bar{u}$ genüge den Voraussetzungen der Klasse L bis auf die Randwertforderungen, dafür gelte $u \le \bar{u}$ auf Γ. Dann ist auch auf ganz B stets*

$$u \le \bar{u}. \tag{23}$$

BEWEIS. Angenommen, (23) sei falsch. Dann gibt es ein größtes offenes Teilgebiet $\hat{G} \subset G$, in dem $u > \bar{u}$ ist. Auf dem wie oben gebildeten Rand $\hat{\Gamma}$ von $\hat{G}$ ist dann $u = \bar{u}$. Nach dem obigen Zusatz zum Einzigkeitssatz ist dann in $\hat{G}$ sogar $u \equiv \bar{u}$ im Gegensatz zur Annahme, womit (23) vollständig bewiesen ist.

Eine einfache Anwendung dieses Satzes ist die folgende[5]: Offenbar ist $U(t, x)$ eine Lösung von (1). U genügt den Voraussetzungen, die in dem Satz an die Funktion $\bar{u}$ gestellt werden, wenn auf Γ stets $u \leqq U$ bleibt. Also gilt der

SATZ. *Ist auf Γ stets $u(t, x, y) \leqq U(t, x)$, so gilt diese Ungleichung auch noch auf ganz B, wenn nur $u \in L$ ist.*

Literatur

[1] SCHLICHTING, H.: Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe 1951.

[2] NICKEL, K.: Einige Eigenschaften von Lösungen der Prandtlschen Grenzschicht-Differentialgleichungen. Arch. rational Mech. Anal. **2**, 1–31 (1958).

[3] NAGUMO, M.: Note in Kansū-Hōteisiki No. 15 (1939) [in Japanisch].

[4] WESTPHAL, H.: Zur Abschätzung der Lösungen nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen. Math. Z. **51**, 690–695 (1949).

[5] NAGUMO, M.: Über die Ungleichung $\frac{\partial u}{\partial y} > f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$. Jap. J. Math. **15**, 51–56 (1938).

[6] SZARSKI, J.: Systèmes d'inégalités différentielles aux derivées partielles du premier ordre, et leurs applications. Ann. Pol. Math. **1**, 149–165 (1954).

[7] V. MISES, R.: Bemerkungen zur Hydrodynamik. Z. angew. Math. Mech. **7**, 425–431 (1927).

[8] VELTE, W.: Eine Anwendung des Nirenbergschen Maximumprinzips für parabolische Differentialgleichungen in der Grenzschichttheorie. Arch. rational Mech. Anal. **4**, 420–431 (1960).

[9] NIRENBERG, L.: A strong maximum principle for parabolic equations. Comm. Pure Appl. Math. **6**, 167–177 (1953).

[5]) *Zusatz bei der Korrektur:* Weitere Aussagen ähnlicher Art findet man in einer soeben erschienen Arbeit von W. VELTE [8]. Als hauptsächliches Beweishilfsmittel wird dort das Maximumprinzip von L. NIRENBERG [9] für lineare parabolische Differentialoperatoren verwendet, das sich in der hier benötigten Form als Sonderfall aus dem Nagumo-Westphalschen Lemma gewinnen läßt.

Institut für Angewandte Mathematik der Technischen Hochschule Karlsruhe

(Eingegangen am 12. Januar 1960)

MEYER-KÖNIG, W., u. K. ZELLER
Math. Zeitschr. 74, 221–231 (1960)

Ein high-indices-Theorem für Dirichletsche Reihen

Herrn E. KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

W. MEYER-KÖNIG und K. ZELLER

1. Formulierung des Satzes. Der Index n durchlaufe, wenn nichts anderes gesagt ist, die Folge $0, 1, \ldots$. Für jede auftretende Folge $\{\lambda_n\}$ gelte $0 \leqq \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$ und $\lambda_n \to \infty$.

Gegeben sei die Dirichlet-Reihe $\sum_n u_n e^{-\lambda_n z}$. Ihre Konvergenzabszisse sei mit σ, ihre Summe in der Konvergenzhalbebene mit $u(z)$ bezeichnet:

$$u(z) = \sum_n u_n e^{-\lambda_n z} \qquad (\Re z > \sigma). \tag{1.1}$$

Das nachstehend als Satz 1 formulierte *high-indices-Theorem* wurde 1910 von LITTLEWOOD vermutet, 1926 von HARDY und LITTLEWOOD bewiesen (vgl. HARDY [1949], S. 172; ZELLER [1958], S. 122, IV).

Satz 1. *Für die Dirichlet-Reihe* (1.1) *sei* $\sigma = 0$, *ferner strebe*

$$u(x) \to s \quad \textit{für} \quad x \to 0+ \qquad (x \textit{ reell}). \tag{1.2}$$

Ist dann für ein $\vartheta > 0$ *die Lückenbedingung*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq \vartheta \lambda_n \tag{1.3}$$

erfüllt, so ist $\sum_n u_n$ *konvergent zur Summe* s.

Das Ziel dieser Note ist der folgende Satz 2, der aus Satz 1 entsteht, indem wir (1.2) verstärken zu (1.4), (1.3) abschwächen zu (1.5).

Satz 2. *Für die Dirichlet-Reihe* (1.1) *sei* $\sigma = 0$, *ferner sei*

$$\sum_n c_n (-a)^n = s, \tag{1.4}$$

wo a *eine positive Konstante und* $\sum_n c_n (z-a)^n$ *die Taylor-Entwicklung von* $u(z)$ *nach Potenzen von* $z-a$ *ist. Ist dann für ein* $\vartheta > 0$ *die Lückenbedingung*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq \vartheta \sqrt{\lambda_n} \tag{1.5}$$

erfüllt, so ist $\sum_n u_n$ *konvergent zur Summe* s.

Zum Beweis des Satzes 2 benützen wir, mit einer Ergänzung, die in MEYER-KÖNIG und ZELLER [1956] zum Beweis von Lückenumkehrsätzen entwickelte funktionalanalytische Methode.

2. Verallgemeinerung. Zunächst sei Satz 2 noch verallgemeinert. Es gilt

Satz 3. *a sei eine positive Konstante und für die Dirichlet-Reihe* (1.1) *sei* $0 \leqq \sigma \leqq a$. *Ferner sei* $u(z)$ *regulär an der Stelle* $z=a$ *und* $\sum_n c_n(-a)^n = s$, *wo* $\sum_n c_n(z-a)^n$ *die Taylor-Entwicklung von* $u(z)$ *nach Potenzen von* $z-a$ *ist. Ist dann die Lückenbedingung* (1.5) *erfüllt, so ist* $\sum_n u_n$ *konvergent zur Summe* s.

Die Voraussetzung, daß $u(z)$ regulär an der Stelle $z=a$ ist, geht über das schon vorher Geforderte natürlich nur dann hinaus, wenn $\sigma = a$ ist.

Satz 2 ist ein Spezialfall von Satz 3. Andererseits folgt Satz 3 aus Satz 2, wenn wir einen Nichtfortsetzbarkeitssatz von CARLSON und LANDAU [1921] zu Hilfe nehmen. Aus (1.5) folgt nämlich $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to \infty$ und daraus in bekannter Weise $\frac{\lambda_n}{n} \to \infty$. (Ist $c>0$, so ist $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq c$ für genügend großes n, also $\lambda_n \geqq cn + O(1)$ und somit $\varliminf_n \frac{\lambda_n}{n} \geqq c$; dies gilt für jedes $c>0$.) Sind daher die Voraussetzungen des Satzes 3 samt (1.5) erfüllt, so ist $u(z)$ nach dem genannten Satz von CARLSON und LANDAU nicht über die Halbebene $\Re z > \sigma$ hinaus analytisch fortsetzbar; da aber $u(z)$ in $|z-a|<a$ regulär ist, ist notwendig $\sigma = 0$, und die Behauptung von Satz 3 folgt aus Satz 2.

Der unten dargestellte Beweis des Satzes 2 ließe sich unschwer zu einem direkten, den Nichtfortsetzbarkeitssatz vermeidenden Beweis des Satzes 3 ausgestalten. Jedoch begnügen wir uns hier mit der angegebenen Zurückführung von Satz 3 auf Satz 2.

Satz 3 läßt sich als ein Limitierungsumkehrsatz auffassen, wie wir jetzt darlegen wollen. Sind die Folge $\lambda = \{\lambda_n\}$ und die Konstante $a>0$ gegeben, so heiße die Reihe $\sum_n u_n$ $V_{\lambda,a}$-summierbar zum Wert s, wenn die Dirichlet-Reihe $\sum_n u_n e^{-\lambda_n z}$ (mindestens) für $\Re z > a$ konvergiert, ihre dort erklärte Summe $u(z)$ an der Stelle $z=a$ regulär ist und die Taylor-Entwicklung von $u(z)$ nach Potenzen von $z-a$ für $z=0$ zum Wert s konvergiert. Dieses $V_{\lambda,a}$-Verfahren ist permanent. Ist nämlich $\sum_n u_n = s$ und setzen wir

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq \lambda_0 \\ u_0 + \cdots + u_n & \text{für} \quad \lambda_n < t \leqq \lambda_{n+1}, \end{cases} \tag{2.1}$$

so ist

$$\int_0^\infty ds(t) = \sum_n u_n = s, \qquad \int_0^\infty e^{-tz}\, ds(t) = \sum_n u_n e^{-\lambda_n z} \qquad (\Re z > 0);$$

daraus folgt $V_{\lambda,a}\text{-}\sum_n u_n = s$ (vgl. MEYER-KÖNIG [1952], S. 186, Satz 2.6).

Satz 3 läßt nun die folgende Formulierung zu: *Aus* $V_{\lambda,a}\text{-}\sum_n u_n = s$ *und* (1.5) *folgt* $\sum_n u_n = s$. *Für jede Folge* $\{\lambda_n\}$, *die* (1.5) *erfüllt, ist das Verfahren* $V_{\lambda,a}$ *also konvergenzgleich.*

Es bleibt übrig, den Satz 2 zu beweisen. Dies soll im folgenden geschehen. Dabei genügt es, aus den Voraussetzungen auf die Konvergenz von $\sum_n u_n$ zu schließen; die Gleichung $\sum_n u_n = \sum_n c_n (-a)^n$ folgt dann aus der Permanenz des $V_{\lambda,a}$-Verfahrens.

3. Der zugrunde liegende FK-Raum $\mathfrak{F}_a$. Wir machen von der Theorie der FK-Räume Gebrauch (vgl. ZELLER [1958], S. 29). Elemente eines solchen Raumes sind komplexe Zahlenfolgen $\mathfrak{x}=\{x_0, x_1, \ldots\}$, $\mathfrak{u}=\{u_0, u_1, \ldots\}$, ...

In dieser Nummer liege eine feste Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$ vor, für die (1.5) erfüllt ist. a sei eine positive Konstante.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{F}^*$ die Menge der $\mathfrak{u}$, für die die zugeordnete Dirichlet-Reihe $u(z)=\sum_n u_n e^{-\lambda_n z}$ (mindestens) für $\Re z>0$ konvergiert. Im folgenden ist zu beachten: *Ist* $\mathfrak{u}\in\mathfrak{F}^*$, *so ist* $\sum_n u_n e^{-\lambda_n z}$ *für* $\Re z>0$ *absolut konvergent.* Ist nämlich $x>0$, so ist wegen $u_n e^{-\lambda_n x/2}\to 0$ und wegen $\lambda_n \geqq n-M$ (M von n unabhängig; vgl. nach Satz 3)

$$\sum_n |u_n|\, e^{-\lambda_n x} \leqq e^{Mx/2} \sum_n |u_n|\, e^{-\lambda_n x/2} e^{-nx/2} < \infty .$$

Für $\mathfrak{u}\in\mathfrak{F}^*$ ist die Taylor-Entwicklung $\sum_n c_n (z-a)^n$ von $u(z)$ nach Potenzen von $z-a$ konvergent für $|z-a|<a$. Hierbei ist

$$c_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)_{z=a} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty} u_k (-\lambda_k)^n e^{-\lambda_k a},$$

wobei die angeschriebenen Reihen sicher konvergieren. Wir führen die Matrix A_a mit den Elementen

$$a_{nk} = \frac{a^n}{n!}\lambda_k^n e^{-\lambda_k a} \qquad (n, k = 0, 1, \ldots) \tag{3.1}$$

ein. Für $\mathfrak{u}\in\mathfrak{F}^*$ existieren die Glieder

$$v_n = \frac{a^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda_k^n e^{-\lambda_k a}$$

der Folge $\mathfrak{v}=A_a\mathfrak{u}$, und es gilt

$$u(z) = \sum_n \frac{v_n}{(-a)^n}(z-a)^n \qquad (|z-a|<a).$$

Mit $\mathfrak{F}_a$ bezeichnen wir die Menge derjenigen $\mathfrak{u}\in\mathfrak{F}^*$, für die (in den bisherigen Bezeichnungen) $\sum_n v_n$ konvergiert. Über $\mathfrak{F}_a$ gilt der

Satz 4. *$\mathfrak{F}_a$ ist ein FK-Raum mit den Halbnormen*

$$p_0(\mathfrak{u}) = \sup_n |v_0 + \cdots + v_n|, \qquad p_j(\mathfrak{u}) = \sum_n |u_n|\, e^{-\lambda_n/j} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Beim Beweis benützen wir die Kriterien 2.1, 2.3 und 2.4 aus ZELLER [1953]. Zunächst stellen wir fest, daß die Menge $\mathfrak{E}^{(1)}$ der u mit $p_1(u)<\infty$ einen FK-Raum mit den Halbnormen $p_1, 0, 0, \ldots$ bildet, der zu dem BK-Raum der absolut konvergenten Reihen isomorph ist (vgl. Kriterium 2.4). Entsprechendes gilt für die Menge $\mathfrak{E}^{(j)}$ der u mit $p_j(u)<\infty$ (j fest; $j=1, 2, \ldots$). Durch Durchschnittsbildung (vgl. Kriterium 2.3) erhalten wir den FK-Raum $\cap\, \mathfrak{E}^{(j)}$ mit den Halbnormen p_j ($j=1, 2, \ldots$). Er enthält genau diejenigen u, für die $p_j(u)<\infty$ ist für alle $j=1, 2, \ldots$, d.h. es ist $\cap\, \mathfrak{E}^{(j)}=\mathfrak{F}^*$.

Für jedes feste n ist die Abbildung $u\to v_n$ eine stetige Linearform in $\mathfrak{F}^*$ (vgl. ZELLER [1951], S. 471, Satz 4.4). Daraus folgt unschwer, daß $p_0(u)\leqq\infty$ eine nach unten halbstetige Halbnorm in $\mathfrak{F}^*$ ist. Also ist (vgl. Kriterium 2.1) die Menge aller $u\in\mathfrak{F}^*$ mit $p_0(u)<\infty$ ein FK-Raum $\mathfrak{F}_a^{**}$ mit den Halbnormen $p_0, p_1, \ldots$. Wie man weiter feststellt, bilden diejenigen $u\in\mathfrak{F}_a^{**}$, für die $\sum_n v_n$ konvergiert, einen linearen abgeschlossenen Unterraum von $\mathfrak{F}_a^{**}$, also einen FK-Raum mit den Halbnormen von $\mathfrak{F}_a^{**}$. Dies heißt aber, daß $\mathfrak{F}_a$ ein FK-Raum mit den Halbnormen $p_0, p_1, \ldots$ ist.

4. Aufbau des Beweises. Wie in **3** liege die feste, (1.5) erfüllende Folge $\{\lambda_n\}$ vor.

Zu $\mathfrak{F}_a$ gehören die Elemente

$$e_0=\{1, 0, 0, \ldots\}, \qquad e_1=\{0, 1, 0, \ldots\}, \ldots.$$

Wir bilden ihre lineare abgeschlossene Hülle in $\mathfrak{F}_a$ und bezeichnen diese mit $\mathfrak{F}_a^P$. $\mathfrak{F}_a^P$ ist ein FK-Raum mit den Halbnormen von $\mathfrak{F}_a$, in dem die e_j ($j=0, 1, \ldots$) eine Grundmenge bilden.

Der Zahl a ordnen wir die Zahl $b=\frac{a}{2}$ zu. (Statt b würde jedes b_1 mit $0<b_1<a$ dieselben Dienste leisten.) In **6** und **7** werden wir die folgenden beiden Aussagen beweisen:

I. *Aus* $u\in\mathfrak{F}_a$ *folgt* $u\in\mathfrak{F}_b^P$.

II. *Satz 2 ist richtig, wenn wir zusätzlich voraussetzen, daß* $\sum_n u_n$ *beschränkte Teilsummen hat.*

Aus I und II ergibt sich Satz 2 in folgender Weise. Die Voraussetzungen des Satzes 2 seien erfüllt. Dann gilt $u\in\mathfrak{F}_a$. Nach I folgt daraus $u\in\mathfrak{F}_b^P$. Nach II gibt es kein $y\in\mathfrak{F}_b$, für das $\sum_n y_n$ divergiert und beschränkte Teilsummen hat; erst recht gibt es dann kein solches $y\in\mathfrak{F}_b^P$. Wenn aber ein Raum von der Struktur von $\mathfrak{F}_b^P$ keine beschränkt-divergenten Elemente enthält, so überhaupt keine divergenten (vgl. MEYER-KÖNIG und ZELLER [1956], S. 210, Satz 3.1, Teil b); dies bedeutet, daß $\sum_n x_n$ konvergiert für jedes $x\in\mathfrak{F}_b^P$. Insbesondere ist also $\sum_n u_n$ konvergent.

5. Ein Hilfssatz. In **6** benötigen wir den

Hilfssatz. *Ist* $\sum_n a_n$ *konvergent,* $f(z)=\sum_n a_n z^n$ *für* $|z|<1$, *und* $f(z)=\sum_n a_n^{(\alpha)}(z-\alpha)^n$ *für* $|z-\alpha|<1-\alpha\left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$, *so ist* $\sum_n \frac{1}{2^n} a_n^{(\alpha)}$ *gleichmäßig konvergent in* $0<\alpha<\frac{1}{2}$.

Beim Beweis benützen wir die auf der Matrix T_α mit den Elementen

$$b_{nk}=(1-\alpha)^{n+1}\binom{k}{n}\alpha^{k-n} \qquad (n,k=0,1,\ldots)$$

beruhende Taylor-Transformation einer Folge in eine Folge (vgl. HARDY [1949], S. 218; ZELLER [1958], S. 141). Wir setzen

$$\sum_n a_n=s', \qquad s_n^{(0)}=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots.$$

Die T_α-Transformation $(0<\alpha<\frac{1}{2})$ der Reihe $\sum_n a_n$ mit den Teilsummen $s'-s_n^{(0)}$ ist ebenfalls konvergent zur Summe s', d.h. es ist

$$\sum_n a_n^{(\alpha)}(1-\alpha)^n=s'.$$

Die letzte Reihe hat die Teilsummen $s'-t_n^{(\alpha)}$ mit

$$t_n^{(\alpha)}=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^{(\alpha)}(1-\alpha)^k.$$

Da die Teilsummen $s'-t_n^{(\alpha)}$ durch Anwendung von T_α auf die Teilsummen $s'-s_n^{(0)}$ entstehen, ist

$$t_n^{(\alpha)}=(1-\alpha)^{n+1}\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}\alpha^{k-n}s_n^{(0)}.$$

Daraus ergibt sich

$$|t_n^{(\alpha)}|\leqq \bar{s}_n^{(0)} \quad \text{mit} \quad \bar{s}_n^{(0)}=\operatorname{Max}\left(|s_n^{(0)}|,|s_{n+1}^{(0)}|,\ldots\right). \tag{5.1}$$

Nun bringen wir die Reihenreste

$$s_n^{(\alpha)}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}a_k^{(\alpha)} \qquad \left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$$

der zu untersuchenden Reihe in Zusammenhang mit den Reihenresten $t_n^{(\alpha)}$. Indem wir

$$s_n^{(\alpha)}=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k^{(\alpha)}(1-\alpha)^k\left(\frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^k$$

schreiben und

$$\bar{t}_n^{(\alpha)}=\operatorname{Max}\left(|t_n^{(\alpha)}|,|t_{n+1}^{(\alpha)}|,\ldots\right)$$

setzen, erhalten wir vermöge partieller Summation die Abschätzung

$$|s_n^{(\alpha)}|\leqq \bar{t}_n^{(\alpha)}\left(\left(\frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^{n+1}\right)\leqq 2\bar{t}_n^{(\alpha)}.$$

Nach (5.1) ist die Nullfolge $\overline{s}_n^{(0)}$ nicht zunehmend und

$$\overline{t}_n^{(\alpha)} \leqq \operatorname{Max}(\overline{s}_n^{(0)}, \overline{s}_{n+1}^{(0)}, \ldots) = \overline{s}_n^{(0)}.$$

Damit erhalten wir abschließend

$$|s_n^{(\alpha)}| \leqq 2\overline{s}_n^{(0)} \qquad (0 < \alpha < \tfrac{1}{2}),$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

6. Approximation in $\mathfrak{F}_b$. Wir beweisen jetzt die Aussage I aus **4**. Die Zahl $a > 0$, $b = \frac{a}{2}$, die (1.5) erfüllende Folge $\{\lambda_n\}$ und $u \in \mathfrak{F}_a$ seien vorgegeben. Wegen der Permanenz der schon in **5** benützten Taylor-Transformation gilt $u \in \mathfrak{F}_b$. Heißen wir die Folge $\mathfrak{x}$ abbrechend, wenn höchstens endlich viele x_n von Null verschieden sind, so haben wir zu zeigen: u läßt sich in $\mathfrak{F}_b$ durch abbrechende $\mathfrak{x}$ approximieren, d.h. es gibt abbrechende $\mathfrak{x}^{(m)} \in \mathfrak{F}_b$ $(m = 0, 1, \ldots)$ mit $\mathfrak{x}^{(m)} \to u$ in $\mathfrak{F}_b$ für $m \to \infty$. Wir unterteilen den Beweis in drei Teile.

Teil 1. Wir zeigen: In $\mathfrak{F}_b$ strebt

$$\{u_0 e^{-\lambda_0 x}, u_1 e^{-\lambda_1 x}, \ldots\} \to \{u_0, u_1, \ldots\} \quad \text{für} \quad x \to 0+ \quad (x \text{ reell}), \tag{6.1}$$

oder also $u^{(x)} \to u$ für $x \to 0+$, wobei

$$u^{(x)} = \{u_0 e^{-\lambda_0 x}, u_1 e^{-\lambda_1 x}, \ldots\} \qquad (x > 0)$$

gesetzt ist. Daß hierbei $u^{(x)} \in \mathfrak{F}_b$ ist, sieht man sofort ein, wenn man analog zu $u(z)$ die zu $u^{(x)}$ gehörige Funktion

$$u^{(x)}(z) = \sum_n u_n e^{-\lambda_n x} e^{-\lambda_n z} = u(z + x) \qquad (x > 0,\ \Re z > -x)$$

bildet.

Bezüglich der Halbnormen p_j $(j = 1, 2, \ldots)$ heißt (6.1), daß

$$p_j(u^{(x)} - u) = \sum_n |u_n| (1 - e^{-\lambda_n x}) e^{-\lambda_n / j} \to 0$$

strebt für $x \to 0+$, was sich aus $\sum_n |u_n| e^{-\lambda_n / j} < \infty$ unmittelbar ergibt. Bezüglich der Halbnorm p_0 haben wir zu zeigen, daß

$$p_0(u^{(x)} - u) = \sup_n \left| \sum_{k=0}^{n} (v_k^{(x)} - v_k) \right| \to 0$$

strebt für $x \to 0+$, wobei

$$v = A_b u, \qquad v^{(x)} = A_b u^{(x)} \qquad (x > 0)$$

gesetzt ist. Für $m = 0, 1, \ldots$ ist

$$\begin{aligned} p_0(u^{(x)} - u) &\leqq \sum_{n=0}^{m} |v_n^{(x)} - v_n| + \sup_{n \geqq m+1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} (v_k^{(x)} - v_k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} (v_k^{(x)} - v_k) \right| \\ &\leqq \sum_{n=0}^{m} |v_n^{(x)} - v_n| + \left| \sum_{k=0}^{\infty} (v_k^{(x)} - v_k) \right| + \sup_{n \geqq m+1} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k^{(x)} \right| + \sup_{n \geqq m+1} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k \right|. \end{aligned}$$

Die vier zuletzt aufgetretenen, noch von m und x abhängigen Summanden bezeichnen wir der Reihe nach mit $S_1, \ldots, S_4$.

Zwecks Beurteilung von S_3 bemerken wir, das $\sum_n v_n^{(x)}$ in $0<x<b$ gleichmäßig konvergiert. $\sum_n v_n^{(x)}$ entsteht nämlich aus der Taylor-Entwicklung von $u^{(x)}(z)$ nach Potenzen von $z-b$ für $z=0$, oder aus der Taylor-Entwicklung von $u(z)$ nach Potenzen von $z-(b+x)$ für $z=x$. Wegen $\mathfrak{u}\in\mathfrak{F}_a$ ergibt sich die Behauptung nun offenbar aus dem in **5** bewiesenen Hilfssatz.

Ein $\varepsilon>0$ sei vorgegeben. Wegen der soeben getroffenen Feststellung und wegen der Konvergenz von $\sum_n v_n$ können wir die von jetzt an festgehaltene ganze Zahl $m\geqq 0$ so wählen, daß

$$\mathfrak{p}_0(\mathfrak{u}^{(x)}-\mathfrak{u})<S_1+S_2+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} \qquad (0<x<b)$$

ist. Wir schätzen weiter $S_1=S_1(x)$ ab. Für $n=0,\ldots,m$ und $0<x<b$ ist

$$v_n=\frac{(-b)^n}{n!}\left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)_{z=b}, \qquad v_n^{(x)}=\frac{(-b)^n}{n!}\left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)_{z=b+x}.$$

Da die Funktion $\frac{d^n u}{dz^n}$ in der Halbebene $\Re z>0$ regulär, also gewiß an der Stelle $z=b$ stetig ist, gibt es ein $x_1>0$, so daß $0\leqq S_1(x)<\frac{\varepsilon}{4}$ ist für $0<x<x_1$. Schließlich schätzen wir $S_2=S_2(x)$ ab. Einerseits strebt $u(x)\to\sum_n v_n$ für $x\to 0+$; andererseits ist

$$u^{(x)}(z)=\sum_n \frac{v_n^{(x)}}{(-b)^n}(z-b)^n \quad \text{für} \quad |z-b|<b+x \qquad (x>0),$$

also $\sum_n v_n^{(x)}=u^{(x)}(0)=u(x)$ für $x>0$. Somit gibt es ein $x_2>0$, so daß $0\leqq S_2(x)<\frac{\varepsilon}{4}$ ist für $0<x<x_2$. Daher gibt es ein $x_0>0$, so daß $\mathfrak{p}_0(\mathfrak{u}^{(x)}-\mathfrak{u})<\varepsilon$ ist für $0<x<x_0$. Damit ist (6.1) bewiesen.

Teil 2. Wir halten ein $x>0$ fest und zeigen: In $\mathfrak{F}_b$ strebt

$$\{u_0 e^{-\lambda_0 x},\ldots,u_n e^{-\lambda_n x},0,0,\ldots\}\to\{u_0 e^{-\lambda_0 x},u_1 e^{-\lambda_1 x},\ldots\} \tag{6.2}$$

für $n\to\infty$. Bezüglich der Halbnormen $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\ldots$ ergibt sich dies unmittelbar. Wir beweisen noch das Nötige bezüglich der Halbnorm $\mathfrak{p}_0$. Wir setzen

$$\mathfrak{u}^{(x,n)}=\{0,\ldots 0,u_{n+1}e^{-\lambda_{n+1}x},u_{n+2}e^{-\lambda_{n+2}x},\ldots\}$$

und haben zu zeigen, daß $\mathfrak{p}_0(\mathfrak{u}^{(x,n)})\to 0$ strebt für $n\to\infty$. Natürlich ist $\mathfrak{u}^{(x,n)}\in\mathfrak{F}_b$. Zu $\mathfrak{u}^{(x,n)}$ gehört die Funktion

$$u^{(x,n)}(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k e^{-\lambda_k(z+x)} \qquad (\Re z>-x)$$

und die Folge

$$\mathfrak{v}^{(x,n)}=A_b\,\mathfrak{u}^{(x,n)}.$$

Ein $\varepsilon>0$ sei vorgegeben. Es gibt dann ein n_0, so daß

$$|u^{(x,n)}(z)| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad |z-b| = b+\frac{x}{2} \quad \text{und} \quad n \geqq n_0$$

gilt. Nun ist

$$u^{(x,n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k^{(x,n)}}{(-b)^k}(z-b)^k \qquad (|z-b|<b+x),$$

nach der Cauchyschen Abschätzungsformel also

$$|v_k^{(x,n)}| \leqq \frac{b^k \varepsilon}{\left(b+\frac{x}{2}\right)^k} \qquad (n \geqq n_0;\ k=0,1,\ldots).$$

Damit wird für $n \geqq n_0$

$$p_0(u^{(x,n)}) = \sup_{k=0,1,\ldots} |v_0^{(x,n)}+\cdots+v_k^{(x,n)}| \leqq \sum_{k=0}^{\infty} |v_k^{(x,n)}| \leqq \frac{(2b+x)\varepsilon}{x}.$$

(6.2) ist nun bewiesen.

Teil 3. Aus (6.1) und (6.2) folgt, daß wir u im oben angegebenen Sinn in $\mathfrak{H}_b$ durch abbrechende Folgen approximieren können (vgl. z. B. MEYER-KÖNIG und ZELLER [1956], S. 219 Mitte). Damit ist die Aussage I aus **4** bewiesen.

7. Reihen mit beschränkten Teilsummen. Jetzt ist noch die Aussage II aus **4** zu beweisen, was sich in üblicher Weise erledigen läßt. Die Voraussetzungen des Satzes 2 samt (1.5) seien erfüllt, außerdem besitze $\sum_n u_n$ beschränkte Teilsummen. Wir setzen noch $s=0$.

Wie in (2.1) führen wir die für $t \geqq 0$ erklärte und beschränkte Funktion $s(t)$ ein. Wegen

$$u(z) = \int_0^{\infty} e^{-tz}\, ds(t) \qquad (\Re z > 0)$$

strebt (vgl. MEYER-KÖNIG [1952], S. 185, Satz 2.4; S. 200, Satz 6.2) für jedes feste $c>0$ die Folge

$$t_k = \frac{c^{k+1}}{k!}\int_0^{\infty} t^k e^{-ct} s(t)\, dt = \frac{1}{k!}\int_0^{\infty} t^k e^{-t} s\left(\frac{t}{c}\right) dt \to 0$$

$(k=0,1,\ldots;\ k\to\infty)$. Wir denken uns ein $c>0$ gewählt, das wir vorläufig festhalten. Wegen der Beschränktheit von $s(t)$ und

$$\frac{1}{k!}\int_0^{k/2} t^k e^{-t}\, dt \to 0, \qquad \frac{1}{k!}\int_{3k/2}^{\infty} t^k e^{-t}\, dt \to 0$$

strebt auch

$$t_k' = \frac{1}{k!}\int_{k/2}^{3k/2} t^k e^{-t} s\left(\frac{t}{c}\right) dt \to 0$$

(jeweils für $k\to\infty$). Es sei von jetzt an $k>0$. Wir setzen

$$t_k''=\frac{k!\,e^k}{\sqrt{k}\,k^k}\,t_k'$$

und erhalten durch eine einfache Substitution

$$t_k''=\int\limits_{-\sqrt{k}/2}^{\sqrt{k}/2}\left(1+\frac{t}{\sqrt{k}}\right)^k e^{-t\sqrt{k}}\,s\left(\frac{k+t\sqrt{k}}{c}\right)dt.$$

Wegen $t_k'\to 0$ strebt $t_k''\to 0$ für $k\to\infty$.

Wir machen nun k von n abhängig, indem wir

$$k=k(n)=\left[c\left(\lambda_n+\frac{\vartheta}{2}\sqrt{\lambda_n}\right)\right]$$

setzen. Ferner sei

$$\varrho=\frac{1}{4}\,\vartheta\sqrt{c}.$$

Es gibt, wie man leicht bestätigt, eine Nummer n_1, so daß

$$\lambda_n\leqq\frac{k-\varrho\sqrt{k}}{c}\leqq\frac{k+\varrho\sqrt{k}}{c}\leqq\lambda_{n+1}\quad\text{für}\quad n\geqq n_1 \tag{7.1}$$

ist. Im folgenden sei $n\geqq n_1$, ferner sei n schon so groß, daß $\varrho<\sqrt{k}/2$, also auch $k>0$, ist. Das Integral in dem Ausdruck für t_k'' zerlegen wir in drei Teile:

$$t_k''=\int\limits_{-\sqrt{k}/2}^{-\varrho}+\int\limits_{-\varrho}^{\varrho}+\int\limits_{\varrho}^{\sqrt{k}/2}=J_1+J_2+J_3. \tag{7.2}$$

Ist $|s(t)|\leqq M$ für $t\geqq 0$, so ist

$$|J_1|\leqq M\int\limits_{-\sqrt{k}/2}^{-\varrho}\left(1+\frac{t}{\sqrt{k}}\right)^k e^{-t\sqrt{k}}dt,\qquad |J_3|\leqq M\int\limits_{\varrho}^{\sqrt{k}/2}\left(1+\frac{t}{\sqrt{k}}\right)^k e^{-t\sqrt{k}}dt.$$

Für $-\frac{1}{2}\sqrt{k}\leqq t\leqq 0$, d.h. $-\frac{1}{2}\leqq\frac{t}{\sqrt{k}}\leqq 0$, gilt

$$\log\left(1+\frac{t}{\sqrt{k}}\right)\leqq\frac{t}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2}\,\frac{t^2}{k}.$$

Daher ist

$$|J_1|\leqq M\int\limits_{-\sqrt{k}/2}^{-\varrho}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt\leqq M\int\limits_{-\infty}^{-\varrho}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt.$$

Für $0\leqq t\leqq\frac{\sqrt{k}}{2}$, d.h. $0\leqq\frac{t}{\sqrt{k}}\leqq\frac{1}{2}$, gilt

$$\log\left(1+\frac{t}{\sqrt{k}}\right)=\frac{t}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2}\,\frac{t^2}{k}+\frac{\vartheta_1}{3}\,\frac{t^3}{k\sqrt{k}} \tag{7.3}$$

mit $0<\vartheta_1=\vartheta_1(t)<1$. Daher ist

$$|J_3|\leqq M\int\limits_{\varrho}^{\sqrt{k}/2}e^{-t^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\,\frac{t}{\sqrt{k}}\right)}dt\leqq M\int\limits_{\varrho}^{\infty}e^{-\frac{1}{3}t^2}dt.$$

Wegen (7.1) wird

$$J_2 = s(\lambda_{n+1}) \int_{-\varrho}^{\varrho} \left(1+\frac{t}{\sqrt{k}}\right)^k e^{-t\sqrt{k}}\,dt.$$

Für $0 \leqq t \leqq \varrho$ gilt gewiß $0 \leqq \frac{t}{\sqrt{k}} \leqq \frac{1}{2}$, also (vgl. 7.3)

$$\log\left(1+\frac{t}{\sqrt{k}}\right) \geqq \frac{t}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{k}.$$

Daher ist

$$\int_{-\varrho}^{\varrho} \left(1+\frac{t}{\sqrt{k}}\right)^k e^{-t\sqrt{k}}\,dt \geqq \int_{0}^{\varrho} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt.$$

Aus (7.2) folgt nun

$$|s(\lambda_{n+1})| \int_0^{\varrho} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt \leqq |t_k''| + M\int_{-\infty}^{-\varrho} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt + M\int_{\varrho}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt,$$

und für $n \to \infty$, was auch $k = k(n) \to \infty$ bedeutet,

$$\left(\overline{\lim_n}\,|s(\lambda_n)|\right) \int_0^{\varrho} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt \leqq M\int_{-\infty}^{-\varrho} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt + M\int_{\varrho}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt.$$

Die letzte Ungleichung gilt für jedes $c>0$. Indem wir $c\to\infty$, also $\varrho\to\infty$, gehen lassen, erhalten wir $\overline{\lim_n}\,|s(\lambda_n)| = 0$. Somit ist $\sum_n u_n$ konvergent (zur Summe 0). Damit ist die Aussage II aus **4**, und damit auch Satz 2, bewiesen.

8. Schlußbemerkungen. Die Bedingung (1.5) in Satz 2 läßt sich nicht abschwächen in folgendem Sinn. Ist eine Folge $\{\vartheta_n\}$ gegeben mit $\vartheta_n > 0$ und $\vartheta_n \to 0$, so läßt sich (1.5) nicht ersetzen durch die Forderung $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq \vartheta_n \sqrt{\lambda_n}$. Der nach üblicher Methode zu führende Nachweis sei hier unterdrückt.

Der in **4**, Aussage I, zum Ausdruck kommende Beweisgedanke ist auch sonst brauchbar. Zum Beispiel läßt sich auf diese Weise das high-indices-Theorem für das Taylor-Verfahren T_α (vgl. MEYER-KÖNIG und ZELLER [1958], S. 49, Satz 6) in dem (a.a.O. nicht ausgeführten) Fall $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ erledigen. Auch beim Verfahren S_α (vgl. ZELLER [1958], S. 142) kann man so vorgehen.

Liegen die Konstante $a>0$ und die (nicht notwendig (1.5) erfüllende) Folge $\lambda = \{\lambda_n\}$ vor, so werde die Matrix mit den Elementen (3.1) durch $T_{\lambda,a}$ bezeichnet. Das durch $T_{\lambda,a}$ in der Reihe-Reihe-Form gegebene Summierungsverfahren („Dirichlet-Taylor-Verfahren") hängt eng zusammen, ist aber nicht identisch, mit dem in **2** betrachteten $V_{\lambda,a}$-Verfahren. Existiert $T_{\lambda,a}\text{-}\sum_n u_n$, so gilt $\sigma \geqq a$ für die Dirichlet-Reihe (1.1). Wir unterscheiden reguläre und singuläre $T_{\lambda,a}$-Summierbarkeit von $\sum_n u_n$, je nach Regularität bzw. Singularität von $u(z)$ an der Stelle $z=a$. Aus der regulären $T_{\lambda,a}$-Summierbarkeit einer

Reihe folgt ihre $V_{\lambda,a}$-Summierbarkeit. Dementsprechend gilt der in 3 für das $V_{\lambda,a}$-Verfahren formulierte Umkehrsatz auch für das reguläre $T_{\lambda,a}$-Verfahren. Die Beschränkung auf reguläre $T_{\lambda,a}$-Summierbarkeit ist hierbei wesentlich. Dies beweist man ebenso wie die analoge Aussage beim Taylor-Verfahren T_α (vgl. MEYER-KÖNIG und ZELLER [1958], S. 49, Satz 7).

Literatur

CARLSON, F., u. E. LANDAU [1921]: Neuer Beweis und Verallgemeinerungen des Fabryschen Lückensatzes. Gött. Nachr. 184–188.

HARDY, G. H. [1949]: Divergent series. Oxford.

MEYER-KÖNIG, W. [1952]: Das Taylorsche Verfahren zur Limitierung von Funktionen. Math. Z. **56**, 179–205.

MEYER-KÖNIG, W., u. K. ZELLER [1956]: Lückenumkehrsätze und Lückenperfektheit. Math. Z. **66**, 203–224.

MEYER-KÖNIG, W., u. K. ZELLER [1958]: Funktionalanalytische Behandlung des Taylorschen Summierungsverfahrens. Centre Belge de Recherches Mathématiques. Colloque sur la théorie des suites, Tenu à Bruxelles du 18 au 20 décembre 1957, Paris u. Louvain, 32–53.

ZELLER, K. [1951]: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463–487.

ZELLER, K. [1953]: FK-Räume in der Funktionentheorie. I. Math. Z. **58**, 288–305.

ZELLER, K. [1958]: Theorie der Limitierungsverfahren. Berlin-Göttingen-Heidelberg.

Stuttgart, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 24. Februar 1960)

HOFMANN, K. H.
Math. Zeitschr. 74, 232–277 (1960)

Topologische Halbgruppen mit dichter submonogener Unterhalbgruppe

Herrn ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

KARL HEINRICH HOFMANN

EINLEITUNG. Beim Studium topologisch algebraischer Strukturen, seien es topologische Gruppen, topologische Loops oder topologische Halbgruppen, sieht man sich sehr häufig genötigt, die einparametrigen Unterstrukturen zu untersuchen, die algebraisch isomorphe Bilder von Unterstrukturen der additiven Gruppe aller reellen Zahlen sind. Der bekannteste Fall ist die Untersuchung einparametriger stetiger Untergruppen in topologischen Gruppen, die sich bei der Lösung des fünften Hilbertschen Problems als so fundamental erwiesen hat (s. z.B. [*9*], [*10*], besonders [*19*] und die dort aufgeführte Bibliographie). Ähnlich wichtig ist die Kenntnis von Einparameterhalbgruppen bei der Strukturuntersuchung gewisser Klassen topologischer Halbgruppen ([*2*], [*4*], [*6*], [*12*], [*20*], [*24*]), und schließlich zeigte sich auch beim Studium nichtassoziativer topologisch algebraischer Strukturen, welch tragkräftiges methodisches Hilfsmittel die Verwendung einparametriger Unterstrukturen darstellt [*13*], [*14*], [*18*]. Drückt man sich anschaulich aus, so kann man die große Bedeutung der stetigen Einparameterstrukturen darauf zurückführen, daß sie die minimalen zusammenhängenden Unterstrukturen sind, die man in einer topologisch algebraischen Struktur finden kann; sie entsprechen daher in gewisser Weise den monogenen, d.h. von einem Element erzeugten Unterstrukturen in algebraischen Strukturen, die dort als die feinsten Bausteine anzusehen sind. Man hat sich diese letztere Erkenntnis auch für die Behandlung topologisch algebraischer Strukturen zunutze gemacht, indem man die abgeschlossenen Hüllen der von jeweils einem Element erzeugten Unterstrukturen in einer topologisch algebraischen Struktur, insbesondere in Halbgruppen untersuchte; diese Studien erscheinen sämtlich im Gefolge jenes klassischen Lemmas von A. WEIL [*25*], daß nämlich eine monogene Untergruppe in einer lokalkompakten topologischen Gruppe entweder einer unendlich diskreten monogenen Gruppe isomorph oder in einer kompakten Untergruppe dicht ist ([*11*], [*16*], s. dazu auch [*27*]). Die vorliegende Arbeit kann in gewisser Weise als simultane Behandlung der stetigen Einparameterhalbgruppen und der im topologischen Sinne von einem Element erzeugten Halbgruppen angesehen werden; wir untersuchen nämlich solche Halbgruppen, in denen eine Unterhalbgruppe dicht ist, die von höchstens abzählbar vielen Elementen algebraisch erzeugt wird; der Leitgedanke dabei ist der folgende: Ist E eine Einparametergruppe in einer topologischen Gruppe und h ein stetiger algebraischer Homomorphismus der additiven Gruppe R' aller reellen Zahlen auf E, so gibt es

in E mit einer natürlichen Zahl p eine Folge $h(1)$, $h(1/p)$, $h(1/p^2)$, die eine dichte Untergruppe von E algebraisch erzeugt. Es gibt natürlich viele Folgen ähnlicher Art mit dieser Eigenschaft. Nimmt man für p eine Primzahl, so hat diese Untergruppe gewisse Minimalitätseigenschaften, die sie für den Zweck unserer Untersuchungen besonders brauchbar macht. Gruppen und Halbgruppen, die von einer Folge sukzessiver Wurzeln von der Art des Beispiels erzeugt werden, nennen wir submonogen. (Dieser Begriff ist mit dem Begriff „quasizyklisch" aus der Theorie der abelschen Gruppen nahe verwandt [7]; jede quasizyklische Gruppe ist submonogen, aber auch eine eindimensionale rationale Vektorgruppe ist mit dem später genau zu definierenden Begriff submonogen.) Ist nun eine topologisch algebraische Struktur K gegeben, so ist es recht oft möglich, eine submonogene Untergruppe oder Unterhalbgruppe zu finden. Häufig hat man z. B. eine unstetige Einparametergruppe F in K, in der sich natürlich viele submonogene Untergruppen finden lassen. Denken wir uns, um ein anderes Beispiel zu geben, eine kompakte zusammenhängende topologische Halbgruppe K mit genau zwei idempotenten Elementen e und f und bezeichnen mit $K(2^n)$ die Menge aller 2^n-ten Potenzen in K. Die monotone Folge der kompakten und zusammenhängenden Teilräume $K(2^n)$ hat einen nichttrivialen, zusammenhängenden Durchschnitt, der e und f enthält und in dem jedes von e und f verschiedene Element eine von ihm verschiedene zweite Wurzel hat. Die Folge der Quadratwurzeln eines von e und f verschiedenen Elementes erzeugt algebraisch eine submonogene Unterhalbgruppe. Die Frage, die man in allen solchen Fällen immer stellen kann, ist die, ob eine submonogene Unterhalbgruppe in einer topologischen Oberstruktur stets eine Einparameterhalbgruppe oder wenigstens eine zusammenhängende Halbgruppe als abgeschlossene Hülle hat. Diese Frage ist sicher mit nein zu beantworten, wie schon das Beispiel eines vollständigen rational-p-adischen Körpers zeigt; hier enthält die additive Gruppe natürlich vielerlei submonogene Untergruppen, deren Hülle aber sicher total unzusammenhängend ist. Wenn im folgenden eine allgemeine Theorie der Halbgruppen entfaltet werden soll, die eine dichte submonogene Unterhalbgruppe enthalten, so muß sie auch Beispiele dieser Art umfassen. Die von uns verfolgte Theorie gilt in erster Linie für kompakte topologische Halbgruppen; zugleich ist sie aber so angelegt, daß auch eine sehr weite Klasse lokalkompakter Halbgruppen miterfaßt wird, nämlich auch alle diejenigen lokalkompakten und nicht kompakten Halbgruppen K, deren Multiplikation $(x, y) \to xy$ sich so auf ihre Einpunktkompaktifizierung $K = K \cup \{a\}$ durch die Festsetzung $xa = ax = a$ fortsetzen läßt, daß sie höchstens im Punkt (a, a) unstetig wird. K nennen wir dann eine kompakte fasttopologische Halbgruppe. So werden z. B. alle lokalkompakten Unterhalbgruppen lokalkompakter topologischer Gruppen in diese Klasse fallen Die kennzeichnende Eigenschaft der lokalkompakten Halbgruppen, die sich zu kompakten fasttopologischen Halbgruppen erweitern lassen, läuft im wesentlichen darauf hinaus, daß bei sämtlichen Translationen kompakte Bildräume auch kompakte Urbildräume haben. Das folgende Beispiel gibt eine lokalkompakte topologische Halbgruppe, die sich nicht in eine kompakte

fasttopologische Halbgruppe einbetten läßt: R' bezeichne die additive Gruppe aller reellen Zahlen in der natürlichen Topologie, und R die Halbgruppe aller nicht negativen reellen Zahlen. Auf dem direkten Produkt $R' \times R$ sei γ diejenige Kongruenzrelation, die alle Paare (r, s), (r', s') aus $R' \times R$ mit $s = s'$ identifiziert, wenn $s \geqq 1$ ist. Die Restklassenhalbgruppe $(R' \times R)/\gamma$ nach dieser Kongruenzrelation weist nicht kompakte Teilräume, etwa $\gamma(R' \times \{0\})$ auf, die durch Translation, etwa mit dem Element $\gamma(0, 2)$ auf einen kompakten Teilraum, der hier nur aus einem Punkt besteht, abgebildet werden. $(R' \times R)/\gamma$ ist homöomorph einem Dreieck, von dessen Rand man nur eine offene Seite und die gegenüberliegende Ecke übrigläßt, in welcher ein offener Jordanbogen angehängt ist. Ersetzt man in dem Produkt $R' \times R$ den Faktor R' durch die eindimensionale Torusgruppe der reellen Zahlen modulo 1, so gehört die Restklassengruppe zu unserer Klasse; sie ist auch in der Tat ein Beispiel für eine Halbgruppe, in der eine submonogene Halbgruppe dicht sein kann; sie ist homöomorph einer abgeschlossenen Kreisscheibe, in deren Mittelpunkt ein offenes Intervall angehängt ist.

Wir untersuchen im §1 die algebraische Struktur aller submonogenen Halbgruppen, d.h. solcher Halbgruppen auf die es einen algebraischen Homomorphismus f von einer submonogenen Unterhalbgruppe von R gibt. Im dritten und wichtigsten Paragraphen wenden wir uns der Struktur fasttopologischer kompakter Halbgruppen K zu, in die eine submonogene Unterhalbgruppe G von R durch f dicht abgebildet wird. Wir bilden die beiden Teilräume $C = \bigcap \{\overline{f((0, r] \cap G)} : 0 < r\}$ und $D = \bigcap \{\overline{f((r, \infty) \cap G)} : 0 < r\}$, die den Schlüssel zu unserer Klassifikation liefern. Nach eventueller Entfernung des Ausnahmepunktes a von C und D bilden diese Teilräume nämlich lokalkompakte abelsche Gruppen. Ist G monogen, so ist C leer und D ist kompakt, was bei den Untersuchungen kompakter Halbgruppen mit dichter monogener Unterhalbgruppe längst bekannt ist ([11], [16]).

Die wichtigere Rolle in unseren Untersuchungen spielt die aus C hervorgehende Gruppe C, da ihr Umfang die Abweichung der Halbgruppe K von einer stetigen Einparameterhalbgruppe mißt; besteht nämlich C insbesondere nur aus dem Neutralelement 1, so ist in K in der Tat eine dichte Einparameterhalbgruppe enthalten; die Stetigkeit des algebraischen Homomorphismus f bezüglich der Intervalltopologie auf G liest man dann ja unmittelbar aus der Definition von C ab. Dieser Fall ist aber sehr speziell; im allgemeinen können wir in K nur dann mit Sicherheit die Existenz einer stetigen Einparameterhalbgruppe nachweisen, wenn C nicht leer ist und nicht nur den Ausnahmepunkt a, aber auch nicht ganz K enthält. In diesem Fall allerdings, und dies ist in knapper Form eines unserer Hauptergebnisse, können wir einen Homomorphismus des direkten Produktes $C \times R$ auf eine dichte Unterhalbgruppe von K angeben, bei dem $\{1\} \times R$ nicht trivial abgebildet wird; dieser Homomorphismus wird sehr genau analysiert werden.

Die Zusammenhangskomponente des Neutralelements von 1 in C ist kompakt. Wird die Gruppe G von einer Zahlenfolge $1, 1/p, 1/p^2, \ldots$ mit einer Primzahl p erzeugt, so können wir über C schärfere Aussagen machen: In

diesem Fall ist C kompakt, und die Faktorgruppe nach der Zusammenhangskomponente ist ein projektiver Limes monogener Gruppen von endlicher, zu p teilerfremder Ordnung. Eine rein algebraische Voraussetzung führt so zu Folgerungen nicht rein algebraischer Natur. Die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit sind am Schluß in einem Hauptsatz zusammengestellt. Ein Teil der Ergebnisse hat eine gewisse äußerliche Verwandtschaft zu den Resultaten einer Arbeit von MOSTERT und SHIELDS [20], obgleich in den Halbgruppen auf kompakten Mannigfaltigkeiten mit Rand dort ein wesentlich anderer Untersuchungsgegenstand zugrunde liegt als bei uns; die Klasse der betrachteten Halbgruppen ist in dieser vorliegenden Arbeit weniger durch strenge topologische, als vielmehr durch algebraische Voraussetzung begrenzt. Von den in jener Arbeit für allgemeinere Klassen von Halbgruppen gestellten Problemen (S. 142) sind die meisten auf unsere Halbgruppenklasse sinnvoll angewandten Fragen positiv zu beantworten, so z. B. P_1, P_3, P_6 und P_7. Es ist geplant, in einer weiteren Arbeit die durch die vorzutragende Theorie möglich gewordenen Anwendungen zusammenzustellen.

Der zweite Paragraph dieser Arbeit ist von den anderen Paragraphen nahezu unabhängig; auch ist seine Lektüre zum Verständnis des zentralen dritten Paragraphen nicht Voraussetzung. In diesem Abschnitt wird unter Angabe von zahlreichen Beispielen untersucht, welche Topologien auf einer submonogenen Unterhalbgruppe der nichtnegativen Halbgeraden auftreten können; insbesondere werden Konstruktionsprinzipien angegeben, wie solche Topologien aus schon vorhandenen neu aufgebaut werden können. Das wichtigste Resultat aus diesem Paragraphen ist das folgende: Ist G' eine nicht von einem Element erzeugte submonogene Untergruppe der additiven Gruppe aller reellen Zahlen, so gibt es Gruppentopologien auf G', die nicht diskret, aber echt feiner sind als die Intervalltopologie auf G'. Aus den Resultaten des dritten Paragraphen folgt, daß eine derartige topologische Gruppe nicht in einer lokalkompakten Gruppe dicht sein kann, wenn die induzierte Topologie mit der angegebenen übereinstimmen soll.

§ 1. Die algebraische Klassifikation submonogener Halbgruppen

Die im folgenden einzuführenden Bezeichnungen sollen in der ganzen Arbeit festgehalten werden.

(1.1) *R sei die additive Halbgruppe aller nichtnegativen reellen Zahlen, R' die additive Gruppe aller reellen Zahlen. N bezeichne die Folge aller natürlichen Zahlen.*

(1.2) G sei eine Unterhalbgruppe von R; es gebe Folgen $(r_i: i \in N)$ reeller und $(n_i: i \in N)$ natürlicher Zahlen, mit welchen G die folgenden Bedingungen erfüllt:

a) Für alle $i \in N$, $i > 1$ gilt $r_{i-1} = n_i r_i$.

b) G ist die Vereinigung der von r_i in $R \setminus \{0\}$ erzeugten Halbgruppen $\langle r_i \rangle$.

Sind diese Bedingungen befriedigt, so nennen wir *G eine submonogene Unterhalbgruppe von R*. Eine beliebige Halbgruppe heißt *submonogen*, wenn

eine submonogene Unterhalbgruppe von R existiert, deren algebraisch homomorphes Bild sie ist. Jedes algebraisch homomorphe Bild einer Untergruppe von R', die Vereinigung abzählbar vieler monogener, d.h. von einem Element erzeugter Untergruppen ist, heißt *eine submonogene Gruppe*. Die von einer submonogenen Unterhalbgruppe von R in R' erzeugte Untergruppe ist submonogen. Falls alle n_i von einem bestimmten Index an gleich 1 sind, ist G *monogen*, d.h. von einem Element allein erzeugt.

In dem Rest des Paragraphen werden wir in erster Linie submonogene Halbgruppen im Auge haben; es sei jedoch an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß große Stücke der dabei zu entwickelnden Theorie nicht nur für submonogene, sondern sogar noch für solche Halbgruppen gilt, die algebraisch homomorphe Bilder beliebiger Unterhalbgruppen von R sind.

(1.3) *Ist H eine beliebige, multiplikativ geschriebene Halbgruppe, in der eine Folge $(x_i: i \in N)$ so existiert, daß mit einer gewissen Folge $(n_i: i \in N)$ natürlicher Zahlen für alle $i \in N$, $i > 1$ die Beziehungen $x_{i-1} = x_i^{n_i}$ gelten und H die Vereinigung der von den Elementen x_i erzeugten monogenen Unterhalbgruppen ist, dann ist H submonogen.*

Beweis. Wir definieren die reellen Zahlen r_i durch $r_i = 1/n_1 \dots n_i$ und bilden die Vereinigung G der von den Zahlen r_i in R erzeugten monogenen Unterhalbgruppen. Die Abbildung, die einem beliebigen natürlichen Vielfachen qr_i von r_i das Element x_i^q zuordnet — daß diese Vorschrift wirklich eine Abbildung definiert, ist sofort zu sehen —, ist der nachzuweisende algebraische Homomorphismus von G auf H.

(1.4) *Ist eine Unterhalbgruppe der Halbgruppe aller positiven Rationalzahlen mit der Addition als Verknüpfung der Schnitt einer Untergruppe von R' mit R, so ist sie submonogen.*

Beweis. Die additive Gruppe aller Rationalzahlen ist submonogen, denn sie wird von den Elementen $r_i = 1/i!$, $i \in N$ erzeugt. Die Behauptung folgt damit aus dem folgenden Hilfssatz:

(1.5) *Jede Untergruppe einer submonogenen Gruppe ist submonogen.*

Beweis. Es sei G die Vereinigung der aufsteigenden Folge monogener Untergruppen $\langle x_i \rangle$. Ist H eine Untergruppe von G, so ist $H \cap \langle x_i \rangle$ eine monogene Untergruppe $\langle y_i \rangle$ von H und H ist die Vereinigung aller $\langle y_i \rangle$.

Die in der folgenden Nummer definierten Begriffe spielen in der Klassifikation der submonogenen Halbgruppen eine wichtige Rolle.

(1.6) *G sei eine submonogene Unterhalbgruppe von R oder R selbst und f ein algebraischer Homomorphismus von G auf die Halbgruppe H. Die Teilmengen J_1 und J_2 von G seien durch die nachstehend angegebenen Bedingungen definiert:*

a) $J_1 = \{r$: *Es gibt ein* $s \in G$ *mit* $0 \leqq s < r$ *und* $f(s) = f(r)\}$,

b) $J_2 = \{r$: *Es gibt ein* $s \in G$ *mit* $r < s$ *und* $f(s) = f(r)\}$.

Das Bild von J_1 in H nennen wir I. Aus den Definitionen folgt sofort, daß J_1, J_2 und I Ideale in dem bei Halbgruppen gebräuchlichen Sinn in G bzw. H

darstellen. Wir setzen

$$j_1 = \begin{cases} \inf J_1, & \text{wenn } J_1 \neq \emptyset \\ \infty, & \text{wenn } J_1 = \emptyset \end{cases} \quad \text{und} \quad j_2 = \begin{cases} \inf J_2, & \text{wenn } J_2 \neq \emptyset \\ \infty, & \text{wenn } J_2 = \emptyset. \end{cases}$$

Es gilt $j_1 \leqq j_2$.

(1.7) *Ist* $j_1 = \infty$, *so ist* f *ein algebraischer Isomorphismus.*

Der Beweis ist trivial, weil unter diesen Voraussetzungen f eineindeutig ist.

(1.8) *Es sei* $j_1 < j_2 \leqq \infty$. *Dann ist* $I = f(J_1)$ *algebraisch isomorph einer submonogenen Untergruppe der additiven Gruppe aller rationalen Zahlen modulo* 1 *oder isomorph zur additiven Gruppe aller reellen Zahlen modulo* 1, *letzteres genau dann, wenn* $G = R$. *Das Intervall* $[0, j_2) \cap G$ *wird durch* f *eineindeutig abgebildet. Die Zahl* $j_2 - j_1 = j$ *liegt in* G, *und für alle* $r \in G$, $r > j_1$ *gilt* $f(r+j) = f(r)$.

Beweis. Um zu zeigen, daß I eine Gruppe ist, genügt es, zu beweisen, daß in I die Gleichung $f(r)\, f(x) = f(s)$ stets nach $f(x) \in I$ auflösbar ist. Wegen $s \in J_1$ gibt es sicher ein $z = s + h$ mit $h \in G$ und $h > 0$ so, daß $f(s) = f(s+h) = f(s)\, f(h)$. Da dann für alle natürlichen Zahlen m auch die Beziehung $f(s) = f(s + mh)$ gilt, können wir o.B.d.A. sogar $h \in J_1$ annehmen. Nun suchen wir eine natürliche Zahl n, die so groß ist, daß $x = nh + s - r$ in J_1 liegt. Dann bekommen wir $f(r)\, f(x) = f(nh + s) = f(nh)\, f(s) = f(s)$, und dies war zu zeigen. Mit V bezeichnen wir die Menge aller Elemente v in G, für welche stets $f(r)\, f(v) = f(r)$ gilt, wie auch r aus J_1 gewählt wird. V umfaßt alle Urbilder des Neutralelementes von I. Liegen nun die Elemente v und w mit $v > w$ in V, so liegt auch $v - w$ darin, denn es gilt $f(r)\, f(v-w) = \big(f(r)\, f(w)\big)\, f(v-w) = f(r)\, f(v) = f(r)$. Demnach ist V der Schnitt einer Untergruppe V' von R' mit R. Diese Untergruppe ist auf R' hinsichtlich der Intervalltopologie auf R' diskret und daher monogen: Liegt nämlich in dem Intervall (j_1, j_2) kein Element von G, so ist dies trivialerweise richtig, da dann die submonogene Halbgruppe G in der Intervalltopologie diskret und also monogen ist; aus der Definition von j_1 und j_2 ergibt sich in diesem Fall, daß V' von $j = j_2 - j_1$ erzeugt wird. Nun sei $r \in G \cap (j_1, j_2)$; dann liegt in dem Intervall $(0, j_2 - r)$ kein Element v aus V; andernfalls nämlich müßte $f(r+v) = f(r)$ mit $j_1 < r < r + v < j_2$ gelten, was zur Definition von j_2 in Widerspruch steht. Somit ist V' diskret und daher von einem Element j erzeugt, für welches $j \geqq j_2 - j_1$ gilt. Wäre aber $j > j_2 - j_1$, so würde das Intervall $[j_1, j_1 + j)$, das in dem Fall einer nicht monogenen Halbgruppe G das Intervall $[j_1, j_2]$ echt umfaßt, durch die Abbildung f eineindeutig abgebildet werden, was mit der Definition von j_2 nicht verträglich wäre. Es gibt eine eindeutig bestimmte kleinste natürliche Zahl n derart, daß nj in J_1 liegt. $f(nj)$ ist das Neutralelement von I. Die Abbildung g, die durch $g(x) = f\big(j(n+x)\big)$ definiert ist, stellt einen algebraischen Homomorphismus der Unterhalbgruppe $\frac{1}{j}G$ von R auf I dar, der auf den Klassen modulo 1 konstant ist. Er läßt sich, da das Bild eine Gruppe ist, zu einem algebraischen Homomorphismus der von $\frac{1}{j}G$ in R' erzeugten Gruppe $\frac{1}{j}G'$ auf I fortsetzen; der

Kern ist dabei die von 1 erzeugte Untergruppe von R'. Damit ist die Behauptung bewiesen.

(1.9) *Wir nennen eine submonogene Halbgruppe (bzw. Gruppe) scharf submonogen, wenn sie algebraisch homomorphes Bild einer Unterhalbgruppe G von $R \setminus \{0\}$ (bzw. einer Untergruppe G' von R') ist, für welche man eine Erzeugendenfolge $(r_i: i \in N)$ mit $r_1 = 1$, $r_i = p r_{i+1}$, $i = 2, \ldots$ findet, wo p eine feste Primzahl ist. Gelegentlich nennen wir p den Teiler von G. Die einzigen submonogenen nicht monogenen Unterhalbgruppen von G (bzw. Untergruppen von G') sind die Halbgruppen $nG = \{nr: r \in G\}$ (bzw. die Gruppen nG') mit einer natürlichen Zahl n, die von p nicht geteilt wird. Demnach hat G' als endliche algebraisch homomorphe Bilder die monogenen Gruppen der Ordnung n, $p \nmid n$. Die Gruppe $G'/\langle 1\rangle$ ist algebraisch isomorph einer Prüferschen Gruppe $Z(p^\infty)$ und hat keine nicht monogene Untergruppe außer sich selbst. $G'/\langle n\rangle$ (mit $p \nmid n$) ist isomorph dem direkten Produkt von $Z(p^\infty)$ und der monogenen Gruppe der Ordnung n. Da sich jeder algebraische Homomorphismus von G in eine Gruppe zu einem Homomorphismus von G' in die Gruppe fortsetzen läßt, sind dies auch die einzigen algebraisch homomorphen Bilder von G, die Gruppen sind.*

Beweis. Wir können uns auf die Behandlung von G' beschränken. Jedes Element von G' ist durch p^i, $i \in N$ dividierbar, denn die Gleichung $p^i x = r$ hat in G' die Lösung $x = s \cdot r_{i+m+1}$, wenn $r = s/p^m = s \cdot r_{m+1}$ mit $m \in \{0, 1, \ldots\}$. Es sei nun G_0' eine von allen Untergruppen nG', $p \nmid n$ verschiedene Untergruppe von G', und $(s_i: i \in N)'$ mit $s_1 = s_0/p^{m_0}$, $(s_0, p) = 1$ und $s_i = n_{i+1} s_{i+1}$ sei ein Erzeugendensystem für die submonogene Untergruppe G_0'. Dann existiert ein $i_0 \in N$ derart, daß für alle $i \geqq i_0$ alle n_i Primzahlpotenzen von p sind, denn s_0 enthält nur endlich viele Primfaktoren. O.B.d.A. sei jetzt $i_0 = 1$. Dann ist aber G_0' von in $s_0 G'$ enthalten und enthält andererseits s_0. Wären alle p-Potenzen n_i von 1 verschieden, so wäre demnach $G_0' = s_0 G'$ im Widerspruch zur Annahme, daß G_0' von allen nG' mit $p \nmid n$ verschieden sein sollte. Danach sind für alle hinreichend großen i die Zahlen $n_i = 1$ und G_0' ist monogen. Es sei n eine natürliche Zahl mit $p \nmid n$. Dann ist die Gruppe $G'/\langle n\rangle$ algebraisch isomorph einer Untergruppe der additiven Gruppe aller rationalen Zahlen modulo 1 und jedes Element hat eine Ordnung der Form $p^m t$ mit $t \mid n$, $p \nmid t$. Damit folgt die angegebene Struktur von $G'/\langle n\rangle$ aus der bekannten Struktur jener Gruppe. Es sei angemerkt, daß die Nichtexistenz monogener Faktorgruppen einer Gruppe für ihre Dividierbarkeit notwendig und hinreichend ist [3].

(1.10) *G' sei eine submonogene, aber nicht monogene Untergruppe von R'. Dann gibt es zwei möglicherweise nicht beide nichtleere Mengen P_1 und P_2 von Primzahlen, so daß eine Primzahl höchstens in einer der beiden Mengen und dann nur einmal enthalten ist und daß für jedes von 0 verschiedene Element d aus G' die folgenden Aussagen gelten:*

a) *Zu jedem $p \in P_1$ gibt es eine eindeutig bestimmte scharf submonogene Untergruppe $G_p'(d) = \{x: x = d\, m/p^n, m, n \text{ ganz}\}$ in G'.*

b) *Zu jedem $p \in P_2$ gibt es eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl $n(p)$, die definiert ist als die größte unter den natürlichen Zahlen m, für welche die*

Gleichung $p^m \cdot x = d$, *eine Lösung in* G' *besitzt; die monogene Gruppe* $G'_p(d) = \langle d/p^{n(p)} \rangle$ *ist in* G' *enthalten.*

c) G' *ist die Summe aller Gruppen* $G'_p(d)$, $p \in P_1 \cup P_2$; *der Durchschnitt von zwei beliebigen dieser Gruppen ist* $\langle d \rangle$.

Beweis. G' sei erzeugt von den Elementen r_i, die den Rekursionsformeln $r_i = n_{i+1} r_{i+1}$, $r_1 = d$, $i \in N$ genügen. P_1 sei die Menge der Primzahlen p, die in unendlich vielen der n_i aufgehen, P_2 die Menge derjenigen Primzahlen, die nur in endlich vielen der n_i als Teiler enthalten sind. G' ist dann durch alle Potenzen der in P_1 liegenden Primzahlen dividierbar, und jedes feste Element von G' durch eine wohlbestimmte größte Potenz jeder in P_2 liegenden Primzahl. Damit ist a) und b) nachgewiesen. Für zwei teilerfremde ganze Zahlen r und s existieren stets zwei ganze Zahlen m und n derart, daß $m\,d/r + n\,d/s = d/rs$. Daraus folgt schließlich $G' = \Sigma\{G'_p(d) : p \in P_1 \cup P_2\}$. Die Behauptung über den Durchschnitt von zwei der Gruppen $G'_p(d)$ ist auf Grund der Definition dieser Gruppe unmittelbar einzusehen.

Die Untergruppe $\Sigma\{G'_p(d) : p \in P_2\}$ kann wohl submonogene und nicht monogene Untergruppen enthalten, nicht aber scharf submonogene Untergruppen. Insbesondere braucht also eine submonogene nicht monogene Gruppe keine scharf submonogenen Untergruppen zu besitzen. Die in Satz (1.10) gegebene Summendarstellung braucht für submonogene Halbgruppen nicht zu gelten.

(1.11) *G sei eine scharf submonogene Halbgruppe mit dem Teiler* p; *mit den Bezeichnungen von* (1.6) *gelte* $j_1 < \infty$ *und* $j_1 = j_2$. *Dann ist* $I = f(J_1)$ *eine monogene Gruppe mit endlicher zu* p *teilerfremder Ordnung.*

Beweis. V bezeichne wieder wie in (1.8) die Menge aller Elemente $v > 0$, für die mit allen Elementen $r \in J_1$ die Beziehung $f(r+v) = f(r)$ gilt. Aus der Definition von j_1 und j_2 und der Beziehung $j_1 = j_2$ folgt, daß $\inf V = 0$ ist. Da V' eine Untergruppe der submonogenen Gruppe G' ist, für die $V = V' \cap R \setminus \{0\}$ gilt, ist V eine submonogene Unterhalbgruppe von G, die wegen $\inf V = 0$ nicht monogen ist; es gilt $V = nG$ mit einer natürlichen Zahl n, die von p nicht geteilt wird, und $V' = nG'$. Ist $v \in V$ und $v > j_1$, so ist $r \to f(v+r)$ ein algebraischer Homomorphismus von G auf $f(v+G) = f(v+J_1) = f(J_1) = I$, der sich zu einem algebraischen Homomorphismus von G' auf I fortsetzen läßt, und dessen Kern nG' ist. Dann ist I algebraisch isomorph zu G'/nG', und diese Gruppe ist monogen von der Ordnung n.

(1.12) *H sei eine submonogene Halbgruppe, und mit den Bezeichnungen von* (1.6) ff. *sei* $j_1 < \infty$ *und* $j_1 = j_2$. *Das Urbild von H heiße wieder G, und G' sei die von G in R' erzeugte Untergruppe. I ist ein nicht treues algebraisch homomorphes Bild von G' und ist algebraisch isomorph einer Untergruppe der Gruppe aller Rationalzahlen modulo* 1.

Beweis. Zu einem $w \in V$ sei die natürliche Zahl n so gewählt, daß $f(nw)$ das Neutralelement der Gruppe $I = f(J_1)$ ist. Dann ist die Abbildung $x \to f(nw + x)$

ein algebraischer Homomorphismus von G in I und wegen $f(nw+J_1)=f(J_1)=I$ sogar auf I. Dieser Homomorphismus ist nicht eineindeutig, da I eine Gruppe ist, nicht aber G. Eine Fortsetzung dieses algebraischen Homomorphismus zu einem algebraischen Homomorphismus von G' auf I ist leicht möglich; diese Fortsetzung heiße $\bar{f}$. Ist d ein Element des Kerns K von $\bar{f}$ und D die von ihm erzeugte monogene Gruppe, so ist G'/D isomorph einer Untergruppe der rationalen Zahlen modulo 1 und I ist isomorph zu $(G'/D)/(K/D)$. Modulo D zerfällt aber G' nach (1.10) in eindeutig bestimmte charakteristische direkte Summanden. Die Gruppen $G'_p(d)/D$, $p\in P_1$ sind isomorph zu den Prüferschen Gruppen $Z(p^\infty)$, und jedes ihrer homomorphen Bilder ist zu $Z(p^\infty)$ selbst isomorph oder einelementig. Die homomorphen Bilder einer Gruppe $\langle d/p^{n(p)}\rangle/D$ sind wieder monogene p-Gruppen und daher Untergruppen von $Z(p^\infty)$. Da die additive Gruppe der rationalen Zahlen modulo 1 direkte Summe der Gruppen $Z(p^\infty)$, von denen zu jeder Primzahl genau eine als Summand auftritt, ist I in der Tat isomorph einer Untergruppe dieser Gruppe. Wegen $\inf V=0$ umfaßt K/D unendlich viele Elemente.

(1.13) Die in den Nummern (1.8), (1.11) und (1.12) beschriebenen Typen treten auch wirklich auf.

Beweis. G' sei eine submonogene Untergruppe von R' oder sei gleich R' und f sei ein algebraischer Homomorphismus von G' auf eine Gruppe I'. Es sei j eine beliebige reelle Zahl aus R. Mit G werde der Durchschnitt $G'\cap R\setminus\{0\}$ bezeichnet und mit ϱ diejenige Äquivalenzrelation auf der Menge $G\cup I'$, deren Klassen nur den Punkt x enthalten, wenn $x\in G$, $x<j$ oder $x\in I'$ aber $x\notin f\big([j,\infty)\cap G'\big)$, deren Klassen aber aus den zwei Elementen x und $f(x)$ bestehen, wenn $x\in G\cap[j,\infty)$ oder $f(x)\in f\big(G\cap[j,\infty)\big)$. Auf dem Klassenraum $H=(G\cup I')/\varrho$ wird eine Verknüpfung definiert durch die Festsetzungen

a) $\varrho(x)\cdot\varrho(y)=\varrho(x\,y)$, wenn $x,y\in I'$,

b) $\varrho(s)\cdot\varrho(t)=\varrho\big(f(s+t)\big)$, wenn $s,t\in G$,

c) $\varrho(s)\cdot\varrho(y)=\varrho\big(f(s)\,y\big)$, wenn $s\in G$, $y\in I'$.

Auf $\varrho(G)\cap\varrho(I')$, d.h. der Menge der zweielementigen Klassen ist diese Definition wegen $f(s+t)=f(s)\,f(t)$ zulässig; ϱ ist auf I' eine algebraisch isomorphe Abbildung und auf G ein algebraischer Homomorphismus. Auf die rechnerische Nachprüfung der Assoziativität im Ganzen verzichten wir, ebenso begnügen wir uns mit dem Hinweis, daß sich mit diesem Konstruktionsverfahren jeder der in (1.8), (1.11) und (1.12) genannten Typen herstellen läßt.

Die Ergebnisse dieses Paragraphen fassen wir in dem folgenden Satz zusammen:

SATZ I

(1.15) *H sei eine submonogene Halbgruppe oder ein algebraisch homomorphes Bild von R; G sei eine submonogene Unterhalbgruppe von R oder R selbst, und f ein algebraischer Homomorphismus von G auf H. Die Ideale J_1 und J_2 in G seien definiert wie in* (1.4), *ebenso die Elemente j_1 und j_2 aus $R\cup\{\infty\}$.*

Dann sind folgende Fälle möglich:

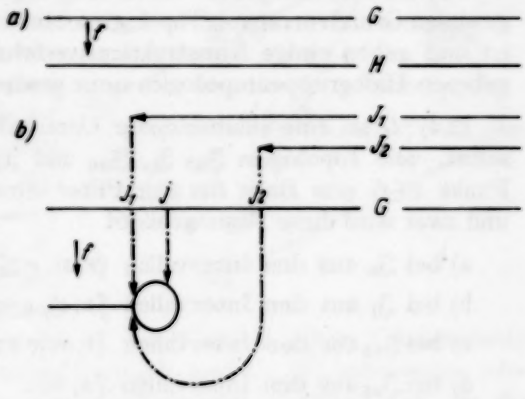
a) $j_1=\infty$. *H ist isomorph einer submonogenen Unterhalbgruppe der Halbgruppe R aller nicht negativen reellen Zahlen oder isomorph zu R. Ist G submonogen, so läßt sich G isomorph in die additive Gruppe aller Rationalzahlen einbetten.*

b) $j_1<j_2\leqq\infty$.

ba) *Wenn $G=R$ ist, dann ist $I=f(J_1)$ eine Gruppe, die isomorph ist zur additiven Gruppe aller reellen Zahlen modulo* 1.

bb) *Wenn G submonogen ist, dann ist I einer Untergruppe der additiven Gruppe aller rationalen Zahlen modulo* 1 *isomorph.*

In beiden Fällen wird das Intervall $[0, j_1]\cap G$ durch f eineindeutig abgebildet. Die Zahl j_2-j_1 liegt in G, und es gibt eine kleinste natürliche Zahl n derart, daß $(j_2-j_1)n\in J_1$; dann ist $f((j_2-j_1)n)\in J_1$ das Neutralelement der Gruppe I; die Zahlen j_1, j_2 und n bestimmen die algebraische Struktur bei gegebenem Urbild G bis auf Isomorphie eindeutig.



c) $j_1=j_2<\infty$.

ca) *Falls H zum Teiler p scharf submonogen ist, dann ist I eine monogene Gruppe mit zu p primer Ordnung.*

cb) *Falls H submonogen aber nicht scharf submonogen ist, dann ist I isomorph einer Untergruppe der additiven Gruppe aller rationalen Zahlen modulo* 1.

cc) *Falls $G=R$ ist, ist I ein algebraisch homomorphes Bild der additiven Gruppe aller reellen Zahlen modulo* 1. *In allen drei Fällen wird das Intervall $[0, j_1]\cap G$ durch f eineindeutig abgebildet.*

§ 2. Topologische submonogene Halbgruppen in *R*

(2.1) Ist $(E, \mathfrak{O})$ ein topologischer Raum, so sagen wir, die Topologie $\mathfrak{O}$ (oder auch der Raum E) genüge dem *Trennungsaxiom* T_0, wenn von zwei verschiedenen Punkten wenigstens einer eine Umgebung besitzt, die den anderen nicht enthält, dem *Trennungsaxiom* T_1, wenn jeder von zwei verschiedenen Punkten eine Umgebung hat, die den anderen nicht enthält, und schließlich dem *Trennungsaxiom* T_2, wenn zwei verschiedene Punkte zwei elementefremde Umgebungen besitzen. Im letzten Fall nennen wir den topologischen Raum auch *Hausdorffsch*. Nur ausnahmsweise betrachten wir in diesem Paragraphen nicht Hausdorffsche Räume, im dritten Paragraphen überhaupt nicht mehr.

Ist F eine Teilmenge von E, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{O}|F$ die von auf F *induzierte Topologie.*

(2.2) Eine Halbgruppe G mit der Verknüpfung $(x, y) \to xy$ heißt topologisch, wenn auf der Elementemenge von G eine Topologie $\mathfrak{O}$ erklärt ist, bezüglich der die Verknüpfung eine stetige Abbildung von $G \times G$ in G ist.

(2.3) Jeder algebraische Homomorphismus einer Halbgruppe G auf eine Halbgruppe H definiert eine Kongruenzklassenzerlegung auf G, bei der alle die Punkte in eine Klasse zusammengefaßt werden, die auf einen und denselben Punkt abgebildet werden. Der Klassenraum ist hinsichtlich der in naheliegender Weise auf ihm definierten Verknüpfung algebraisch isomorph zu H. Der Isomorphismus der Kongruenzklassenhalbgruppe auf H heiße der *kanonische Isomorphismus.* Sind G und H topologische Halbgruppen, so heißt ein algebraischer Homomorphismus von G auf H ein *Homomorphismus*, wenn er stetig ist und der kanonische Isomorphismus den Kongruenzklassenraum mit der Quotiententopologie homöomorph auf H abbildet.

Für die submonogenen Unterhalbgruppen von R definieren wir nun einen gewissen Grundvorrat von Topologien, hinsichtlich derer die Verknüpfung stetig ist und geben einige Konstruktionsverfahren an, mit welchen sich aus gegebenen Halbgruppentopologien neue gewinnen lassen.

(2.4) G sei eine submonogene Unterhalbgruppe von R oder sei gleich R selbst. Die Topologien $\mathfrak{I}_0$, $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_{00}$ und $\mathfrak{I}_{01}$ werden definiert, indem jedem Punkt $x \in G$ eine Basis für den Filter seiner Umgebungen zugeordnet wird, und zwar wird diese Basis gebildet

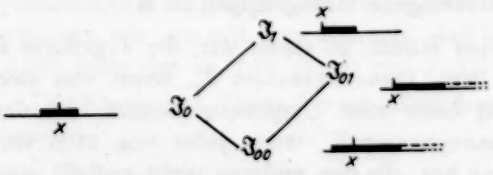
a) bei $\mathfrak{I}_0$ aus den Intervallen $[r, s)$, $r \leqq x$, $x < s$ und $r = x$ nur für $x = 0$,

b) bei $\mathfrak{I}_1$ aus den Intervallen $[x, s)$, $x < s$,

c) bei $\mathfrak{I}_{00}$ aus den Intervallen $[r, \infty)$, $r \leqq x$ und $r = x$ nur für $x = 0$,

d) bei $\mathfrak{I}_{01}$ aus den Intervallen $[x, \infty)$.

Ist eine Topologie $\mathfrak{O}$ feiner als eine Topologie $\mathfrak{O}'$, so schreiben wir $\mathfrak{O} \succ \mathfrak{O}'$. Mit dieser Bezeichnung gelten dann die Beziehungen $\mathfrak{I}_0 < \mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_{00} < \mathfrak{I}_{01}$, $\mathfrak{I}_{00} < \mathfrak{I}_0$ und $\mathfrak{I}_{01} < \mathfrak{I}_1$. In einem Diagramm lassen sich diese Relationen folgendermaßen veranschaulichen; neben den Kennzeichen für die Topologien sind dabei jeweils die typischen Gestalten der betreffenden Basisumgebungen von x angedeutet:



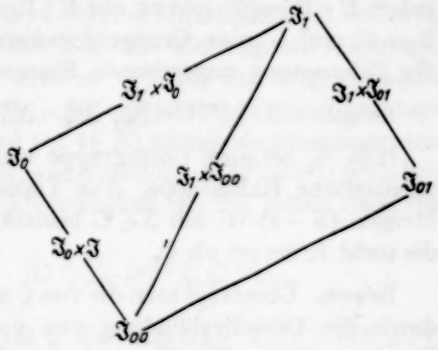
$\mathfrak{I}_1$ ist die obere Grenze der beiden Topologien $\mathfrak{I}_{01}$ und $\mathfrak{I}_0$; deren untere Grenze ist $\mathfrak{I}_{00}$.

(2.5) Sind $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{P}$ zwei Topologien auf G und ist $\mathfrak{O}$ feiner als $\mathfrak{P}$, ist ferner x ein Element aus R, so verstehen wir unter $\mathfrak{O} x \mathfrak{P}$ die gröbste unter den Topologien $\mathfrak{O}'$, für welche $\mathfrak{O}'|[0, x) \cap G = \mathfrak{O}|[0, x) \cap G$ und $\mathfrak{O}'|[x, \infty) \cap G = \mathfrak{P}|[x, \infty) \cap G$ gilt. Sind $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{P}$ mit der Addition auf G verträglich, so ist

auch $\mathfrak{O} \times \mathfrak{P}$ mit der Addition verträglich für alle x; denn zu jeder $\mathfrak{O} \times \mathfrak{P}$-Umgebung W von $u+v$ in G mit $u, v \in G$ existiert eine $\mathfrak{O} \times \mathfrak{P}$-Umgebung U von u und eine $\mathfrak{O} \times \mathfrak{P}$-Umgebung V von v derart, daß $U+V \subseteq W$; wenn $u+v<x$, so sind für U und V geeignete $\mathfrak{O}$-Umgebungen zu nehmen, da dann W jedenfalls eine $\mathfrak{O}$-Umgebung ist, aber keine $\mathfrak{P}$-Umgebung zu sein braucht. In allen anderen Fällen genügt es, bei U und V auf $\mathfrak{P}$-Umgebungen zurückzugreifen. Dabei ist davon Gebrauch gemacht, daß $\mathfrak{O}$ feiner war als $\mathfrak{P}$.

(2.6) Es sei s ein stetiger algebraischer Isomorphismus von G in eine kompakte topologische Gruppe. Überträgt man die Topologie des Bildraums durch s^{-1} auf G und nennt die dabei entstehende und mit der Addition verträgliche Topologie $\mathfrak{J}$, so gilt $\mathfrak{J}_0 < \mathfrak{J} < \mathfrak{J}_{00}$.

(2.7) In dem nachfolgenden Diagramm sind alle Topologien, die feiner sind als eine Topologie $\mathfrak{J}_0 \times \mathfrak{J}$ Hausdorffsch; alle anderen Topologien genügen dem Trennungsaxiom T_0, nicht aber dem Trennungsaxiom T_1. In allen Topologien, die gröber sind als eine Topologie $\mathfrak{J}_0 \times \mathfrak{J}_{00}$ gilt der Satz von HEINE-BOREL. $\mathfrak{J}_0$ ist die einzige lokalkompakte Topologie. Dabei heißt ein Raum kompakt, wenn er Hausdorffsch ist und in ihm der Satz von HEINE-BOREL gilt ([1] Chap. I, § 10, No 1, S. 91).



(2.8) *$(G, \mathfrak{O})$ sei eine das Element 0 enthaltende Unterhalbgruppe von R, auf der eine Topologie $\mathfrak{O}$ erklärt sei, bezüglich der die Halbgruppe topologisch ist. G sei der Schnitt einer Untergruppe G' von R' mit R. Diese Voraussetzung ist sicher erfüllt, wenn G das Element 0 enthält und $G \setminus \{0\}$ submonogen oder $G=R$ ist. Auf G' existiert dann eine wohlbestimmte Topologie $\mathfrak{O}^{(1)}$, die die gröbste ist unter allen Topologien $\mathfrak{P}$, die auf G eine Topologie induzieren, die nicht gröber ist als $\mathfrak{O}$, die G' zu einer topologischen Halbgruppe machen, und bezüglich der die sämtlichen Translationen $x \to x+t$, $t \in G$ die Unterhalbgruppe G homöomorph in sich abbilden. Ferner existiert auf G' eine Topologie $\mathfrak{O}^{(2)}$, hinsichtlich welcher G' eine topologische Gruppe bildet und die die feinste Gruppentopologie auf G' ist, welche nicht feiner ist als $\mathfrak{O}^{(1)}$.*

Beweis. Wir bezeichnen den Umgebungsfilter des Punktes $x \in G$ bezüglich der Topologie $\mathfrak{O}$ mit $\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}}(x)$. Die Topologie $\mathfrak{O}^{(1)}$ wird auf G' dadurch definiert, daß wir den Filter $\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}^{(1)}}(x)$ erzeugen durch die Filterbasis, die aus allen Mengen der Form $x+U$, $U \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{O}}(0)$ besteht. Die Filterbasis $\mathfrak{B}(x)$ aus den Mengen $x+U$, wo U die Menge der $\mathfrak{O}$-offenen Umgebungen von 0 durchläuft, ist eine Basis offener Umgebungen von x in der Topologie $\mathfrak{O}^{(1)}$. Durch diese Definition entsteht auf G' tatsächlich eine Topologie: dazu hat man zu zeigen, daß zu einem y aus einer Umgebung U aus $\mathfrak{B}(x)$ eine Umgebung V aus $\mathfrak{B}(y)$ existiert, die in U enthalten ist. Aus $y \in U \subseteq x+G$ folgt zunächst $x \leqq y$.

Infolge der Stetigkeit der Addition bezüglich $\mathfrak{O}$ existiert eine $\mathfrak{O}$-offene Umgebung W aus $\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}}(0)=\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}^{(1)}}(0)$ derart, daß $y-x+W\subseteq V-x$, woraus dann $y+W\subseteq V$ folgt, was zu zeigen war. Auf Grund der Definition der Topologie $\mathfrak{O}^{(1)}$ ist leicht zu sehen, daß alle Abbildungen $x\to x+t$ auf ihrem Bildbereich eine stetige Umkehrabbildung haben, wenn diese Topologie zugrunde gelegt wird. Daß die Gruppenoperation auf G' stetig ist, folgt unmittelbar daraus, daß für alle $U\in\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}}(0)=\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}^{(1)}}(0)$ ein $W\in\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}}(0)$ existiert, für welches $W+W\subseteq U$ gilt. Da jede Halbgruppentopologie auf G', die auf G eine Topologie induziert, die nicht gröber ist als $\mathfrak{O}$, in dem Filter ihrer Nullumgebungen den Filter $\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}}(0)$ enthalten muß, da ferner eine Halbgruppentopologie $\mathfrak{P}$ auf G', mit der die Abbildungen $x\to x+t$ von G in sich Homöomorphismen sind, in jedem ihrer Umgebungsfilter $\mathfrak{U}_{\mathfrak{P}}(x)$ den Filter $x+\mathfrak{U}_{\mathfrak{P}}(0)$ enthalten muß, hat $\mathfrak{O}^{(1)}$ in der Tat die behaupteten Eigenschaften.

Die Mengen $U-U$ mit $U\in\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}^{(1)}}(0)$ erzeugen einen Filter $\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}^{(2)}}(0)$. Zu jedem $U\in\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}^{(2)}}(0)$ gibt es ein $V\in\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}^{(2)}}(0)$ so, daß $V-V\subseteq U$. Also definiert $\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}^{(2)}}(0)$ auf G' eine Gruppentopologie, die wir mit $\mathfrak{O}^{(2)}$ bezeichnen. Die in der Behauptung angegebenen Eigenschaften von $\mathfrak{O}^{(2)}$ sind evident.

Es gilt z.B. $\mathfrak{I}_1^{(2)}|G=\mathfrak{I}_0$, $\mathfrak{I}_{00}^{(2)}=\mathfrak{I}_{01}^{(2)}=$ triviale Topologie.

(2.9) G' sei eine Untergruppe von R' und mit $G=G'\cap R$ sei $(G,\mathfrak{O})$ eine topologische Halbgruppe. Die Topologie $\mathfrak{O}(x)$ auf G, $x\in G$, die aus allen Mengen $(S-x)\cap G$ mit $S\in\mathfrak{O}$ besteht, ist eine Halbgruppentopologie auf G', die nicht feiner ist als $\mathfrak{O}$.

Beweis. Überträgt man die von $\mathfrak{O}$ auf $[x,\infty)\cap G$, $x\geqq 0$ induzierte Topologie durch die Umkehrabbildung von $y\to y+x$ auf G, so entsteht gerade die Topologie $\mathfrak{O}(x)$. Die Eigenschaften dieser Topologie folgen aus der Stetigkeit der Addition auf G bezüglich $\mathfrak{O}$.

(2.10) *Der Durchschnitt $\mathfrak{D}\mathfrak{O}=\bigcap\{\mathfrak{O}(x)\colon x\in G\}$ ist eine Halbgruppentopologie auf G, mit der alle Translationen $y\to y+t$ Homöomorphismen von G auf das Bild von G darstellen.*

Beweis. $S\in\mathfrak{D}\mathfrak{O}$ ist gleichwertig zu

a) $S+x\in\mathfrak{D}\mathfrak{O}|G+x$ für alle $x\in G$.

Die Beziehung $S+t\in\mathfrak{D}\mathfrak{O}|G+t$ ist gleichwertig mit

b) $S+t+x\in\mathfrak{O}|G+t+x$ für alle $x\in G$.

Aber aus a) folgt b).

(2.11) *Genügt $\mathfrak{O}$ dem Trennungsaxiom T_1, so gilt dasselbe auch für $\mathfrak{D}\mathfrak{O}$.*

Beweis. Es seien u_1 und u_2 Elemente aus G mit $u_1<u_2$. Zu jedem Element x aus G suchen wir Mengen S_x und T_x derart, daß S_x+x eine $\mathfrak{O}$-offene Umgebung von u_1+x und T_x+x eine $\mathfrak{O}$-offene Umgebung von u_2+x bildet und daß $u_2+x\notin S_x+x$ und $u_1+x\notin T_x+x$ gilt. Die Mengen $S=\bigcup\{S_x\cap G\colon x\in G\}$ und $T=\bigcup\{T_x\cap G\colon x\in G\}$ sind $\mathfrak{D}\mathfrak{O}$-Umgebungen von u_1 bzw. u_2, und S enthält nicht u_2 und T enthält nicht u_1.

(2.12) Die aus $\mathfrak{O}$ abgeleiteten Topologien auf G und G' und die zwischen ihnen nachgewiesenen Relationen haben folgende Bedeutung: Anschaulich gesprochen ist $\mathfrak{O}^{(1)}$ die gröbste Verfeinerung und $\mathfrak{D}\mathfrak{O}$ die feinste Vergröberung von $\mathfrak{O}$ unter den Topologien, die G so homogenisieren, daß alle Translationen von G stetig und auf dem Bild umkehrbar stetig sind. Die Verschiedenheit von $\mathfrak{O}^{(1)}$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{O}$ gibt ein anschauliches Maß, in welchem die Topologie $\mathfrak{O}$ für sehr große $r \in G$ gröber ist als für solche r, die in der Intervalltopologie nahe bei 0 liegen.

(2.13) P sei die additive Halbgruppe aller nichtnegativen ganzen Zahlen und $\mathfrak{P}$ eine beliebige Topologie auf P, bezüglich der $(P, \mathfrak{P})$ eine topologische Halbgruppe darstellt. Ist $(r_i: i \in N)$, $r_1 = r$ eine Erzeugendenfolge für eine submonogene Unterhalbgruppe $G \setminus \{0\}$ von R, zu der das Element 0 hinzugenommen wird, so gibt es einen algebraischen Isomorphismus von P auf $\langle r \rangle \cup \{0\}$. Überträgt man die Topologie $\mathfrak{P}$ auf $\langle r \rangle \cup \{0\}$ mit Hilfe dieses Isomorphismus, so wird insbesondere in $\langle r \rangle \cup \{0\}$ eine Filterbasis $\mathfrak{B}(0)$ definiert, die alle Umgebungen von 0 in H hinsichtlich der übertragenen Topologie enthält. Die Mengen $x + U$, $x \in G$, U offen in $\langle r \rangle \cup \{0\}$ aus $\mathfrak{B}(0)$ erzeugen auf G eine Halbgruppentopologie $\mathfrak{P}_G(r)$. Ist umgekehrt $\mathfrak{O}$ eine beliebige Halbgruppentopologie auf der von 0 und $(r_i: i \in N)$ erzeugten submonogenen Unterhalbgruppe G so wird auf $\langle r \rangle \cup \{0\}$ eine Topologie $\mathfrak{O}\langle r \rangle = \mathfrak{O} | (\langle r \rangle \cup \{0\})$ induziert, die dort mit der Verknüpfung verträglich ist. Es gelten dann die Beziehungen

$$(\mathfrak{O}\langle r \rangle)_G(r)^{(1)} \geqq \mathfrak{O}^{(1)} G, \qquad (\mathfrak{O}\langle r \rangle)_G(r)^{(2)} \geqq \mathfrak{O}^{(2)} G.$$

Ist für eine Halbgruppentopologie $\mathfrak{O}$ auf G die Topologie $\mathfrak{O} | \langle x \rangle$ mit $x \in G$ nicht diskret, so ist auch $\mathfrak{O} | \langle n \cdot x \rangle$ nicht diskret für alle natürlichen Zahlen n, denn die Abbildung $y \to n \cdot y$ ist stetig. Alle Aussagen dieser Nummer gelten entsprechend auch für G' an Stelle von G.

(2.14) *G sei eine submonogene Unterhalbgruppe von R. Auf G sei eine T_2-Topologie $\mathfrak{O}$ mit abzählbarer Basis für die offenen Mengen so gegeben, daß $(G, \mathfrak{O})$ eine topologische Halbgruppe bildet. Ist $x \in G$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x)$ die Menge aller in G gegen x hinsichtlich der Topologie $\mathfrak{O}$ konvergenten Folgen F, also $\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x) = \{F: F = (x_i: i \in N), x_i \in G, \lim_i x_i = x\}$. Es gelten dann die folgenden Aussagen:*

a) *Die Menge $\mathfrak{M}$ aller Folgen auf G bildet bezüglich der komponentenweisen Addition $(x_i: i \in N) + (y_i: i \in N) = (x_i + y_i: i \in N)$ eine kommutative reguläre Halbgruppe, und zwar eine Unterhalbgruppe der kommutativen Gruppe $\mathfrak{M}'$ aller Folgen der von G in R' erzeugten Untergruppe G' mit der komponentenweisen Addition.*

b) *Für alle $x, y \in G$, $(F_1, F_2) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x) \times \mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(y)$ gilt immer $F_1 + F_2 \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x + y)$.*

c) *E sei die Menge aller Endomorphismen φ von $\mathfrak{M}$, für welche eine eineindeutige Abbildung $n \to m(n)$ von N in sich existiert, die bis auf eine endliche Menge ordnungserhaltend ist und mit der $\varphi(x_i: i \in N) = (x_{m(i)}: i \in N)$ gilt.*

ca) $\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x)$ *enthält die konstante Folge* $(x_i\colon i\in N,\ x_i=x)$.

cb) $\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x)$ *wird von allen Endomorphismen aus* E *in sich abgebildet.*

cc) *Liegt* F *nicht in* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x)$, *so gibt es einen Endomorphismus* $\varphi\in E$ *derart, daß* $\psi(\varphi(F))\notin\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x)$ *gilt für alle* $\psi\in E$.

Gibt es umgekehrt eine Abbildung $x\to\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x)$ *von* G *in die Menge der Teilmengen von* $\mathfrak{M}$, *die den in* b) *und* c) *genannten Bedingungen genügt, so gibt es auf* G *eine Halbgruppentopologie* $\mathfrak{O}$, *die dem Trennungsaxiom* T_1 *genügt, und in der die Folgen aus* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x)$ *gegen* x *konvergieren.*

Beweis. Die Bedingungen ca), cb) und cc) sind bekanntlich notwendig dafür, daß auf G eine Hausdorfftopologie mit abzählbaren Basen für sämtliche Umgebungsfilter existiert, hinsichtlich welcher die Folgen aus $\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x)$ gegen x konvergieren. Die Bedingung b) ist eine Folge der Stetigkeit der Addition. Sind umgekehrt die Bedingungen b) und c) erfüllt, so definieren wir die Topologie $\mathfrak{O}$ als die Menge aller Komplemente der Mengen B mit $\widetilde{B}=B$; dabei ist $\widetilde{B}$ die Menge aller x, für die ein $F\in\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x)$ mit Elementen aus B existiert. So entsteht ein topologischer Raum, in dem jede Menge aus einem Punkt abgeschlossen ist, der also dem Trennungsaxiom T_1 genügt. Die abgeschlossene Hülle $\overline{B}$ einer Menge B in der Topologie $\mathfrak{O}$ ist gegeben durch $\overline{B}=B\cup\widetilde{B}\cup\widetilde{\widetilde{B}}\ldots$, denn es gilt $(B_1\cup B_2)\tilde{}=\widetilde{B}_1\cup\widetilde{B}_2$, woraus $\widetilde{\overline{B}}=\widetilde{B}\cup\widetilde{\widetilde{B}}\cup\widetilde{\widetilde{\widetilde{B}}}\ldots=\overline{B}$ und also erst recht $\overline{\overline{B}}=\overline{B}$ folgt. Die Abbildung $(x,y)\to x+y$ ist mit dieser Topologie stetig, denn wegen b) gilt $\widetilde{B}_1+\widetilde{B}_2\subseteq(B_1+B_2)\tilde{}$, woraus $\overline{B}_1+\overline{B}_2\subseteq(B_1+B_2)^-$ folgt. Sei $F=(x_i\colon i\in N)$ eine gegen x konvergente Folge, und sei $(y_i\colon i\in N)$ diejenige Folge, die nur aus den Elementen $x=y_i$ besteht, wenn in F nur endlich viele Elemente x_i von x verschieden sind und die in allen anderen Fällen aus F durch Weglassen aller mit x übereinstimmenden Folgenelementen besteht. Im ersten Fall konvergiert F sicher bezüglich $\mathfrak{O}$ gegen x, im zweiten Fall gilt $\{y_i\colon i\in N\}\tilde{}=\{y_i\colon i\in N\}\cup\{x\}$, woraus wegen $\{y_i\colon i\in N\}\tilde{}=\{y_i\colon i\in N\}^{\sim}$ auch $\{y_i\colon i\in N\}^-\ \{y_i\colon i\in N\}\cup\{x\}$ folgt, was auch für alle Teilfolgen von $(y_i\colon i\in N)$ gilt. Daher konvergiert F in der Topologie $\mathfrak{O}$ gegen x.

(2.17) G *sei eine um* 0 *erweiterte submonogene Unterhalbgruppe von* R *mit einer* T_2*-Topologie* $\mathfrak{O}$, *die mit der Addition verträglich ist und für jeden Umgebungsfilter eine abzählbare Basis hat. Die Folge der erzeugenden Elemente von* G *sei* $(1/p_i\colon i\in N)$, $p_i=n_1\ldots n_i$, $n_1=p_1=1$. *Dann gelten mit den Bezeichnungen von* (2.8) *und* (2.13) *die Beziehungen*

a) *Wenn* $\mathfrak{O}^{(2)}|\langle x\rangle$ *diskret ist für ein* $x\neq 0$, $x\in G$, *so gilt* $\mathfrak{O}^{(2)}\geqq\mathfrak{J}_0$.

b) $\mathfrak{O}^{(1)}\leqq(\mathfrak{O}\langle 1\rangle)_{G'}(1)^{(1)}$ *und* $\mathfrak{O}^{(2)}\leqq(\mathfrak{O}\langle 1\rangle)_{G'}(1)^{(2)}$.

c) *Ist* B *ein beschränktes Intervall auf* G *so gilt* $\mathfrak{J}_1|B\leqq\mathfrak{O}^{(1)}|B$ *und* $\mathfrak{J}_0|B\leqq\mathfrak{O}^{(2)}|B$.

Beweis. G' sei die von G in R' erzeugte submonogene Gruppe. Wir betrachten die topologische Gruppe $(G',\mathfrak{O}^{(2)})$. Jedes Element x von G' läßt

sich in eindeutiger Form darstellen als Summe $\Sigma\{n_i(x)/p_i : i \in N\}$ mit ganzen Zahlen $n_i(x)$, die den folgenden Bedingungen unterworfen sind:

a) $n_i(x) \neq 0$ höchstens für endlich viele $i \in N$.

b) Aus $x < 0$ folgt $n_0(x) \leqq 0$, $-n_i < n_i(x) \leqq 0$ für $i \in N$.

c) Aus $x \geqq 0$ folgt $n_0(x) \geqq 0$, $n_i > n_i(x) \geqq 0$ für $i \in N$.

Die Abbildung p: $x \to (n_i(x) : i \in N)$ ist eine eineindeutige Abbildung von G' in den Produktraum $P_{\mathfrak{P}} = \times\{Q_i : Q_0 = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}, Q_i = -n_i, \ldots, n_i$ für $i \in N\}$; die Räume Q_i seien dabei für $i \in N$ diskret topologisiert, während Q_0 mit einer Topologie $\mathfrak{P}$ versehen sei, mit der $(Q_0, \mathfrak{P})$ mit der Addition eine topologische Gruppe bildet. Die Abbildung p ist genau dann stetig, wenn $x \to n_0(x)$ stetig ist und zu jeder gegen $x \in G'$ konvergenten Folge $(x_i : i \in N)$ zu jeder natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl $m(n)$ existiert, so daß $q_i(x_j) = q_i(x)$ gilt für alle $j > m(i)$. Bezüglich der Intervalltopologie $\mathfrak{J}_0$ auf G' ist p genau dann stetig und sogar ein Homöomorphismus, wenn $\mathfrak{P}$ die diskrete Topologie ist, d.h. wenn auch schließlich $n_0(x_i)$ von i nicht mehr abhängt. Ist umgekehrt $\mathfrak{O}^{(2)}$ eine Topologie auf G', bezüglich der p stetig ist, wenn $\mathfrak{P}$ die diskrete Topologie ist, so ist $\mathfrak{O}^{(2)}$ notwendig feiner als die Intervalltopologie, d.h. es gilt dann $\mathfrak{J}_0 \leqq \mathfrak{O}^{(2)}$. Zum Beweis zeigen wir zunächst, daß für jede gegen $x \in G'$ konvergente Folge $(x_i : i \in N)$ auf G' stets alle $n_i(x_j)$ für $i \in N$ für hinreichend große j von j nicht mehr abhängen. Angenommen, für eine Folge $(x_i : i \in N)$, die gegen x konvergiere und für eine feste natürliche Zahl k habe die Folge $(n_k(x_j) : j \in N)$ keinen konstanten Endabschnitt. Wir können o.B.d.A. $x = 0$ annehmen. Da wir erforderlichenfalls am Nullpunkt spiegeln und eine Teilfolge auswählen können, bedeutet auch die Annahme $x_i \geqq 0$ und $q_k(x_i) = r > 0$ keine Einschränkung. Wir können dann x_i in der Form $x_i = r/p_k + y_i$ mit $y_i \in G'$, $y_i \geqq 0$ darstellen. Da die Translationen bezüglich der Topologie $\mathfrak{O}^{(2)}$ Homöomorphismen sind, konvergiert die Folge $(y_i : i \in N)$ gegen ein $y \in G$. Es müßte dann $0 = r/p_k + y \geqq r/p_k > 0$ gelten, und dies ist ein Widerspruch. Da in unserem Fall $\mathfrak{P}$ diskret angenommen war, ist auch die Folge $(n_0(x_i) : i \in N)$ schließlich konstant. Konvergiert eine Folge $(x_i : i \in N)$ in der Topologie $\mathfrak{O}^{(2)}$ dann auch in der Intervalltopologie, da die Abbildung p^{-1} unter den jetzigen Umständen bezüglich J_0 auf G' stetig ist. Dann ist aber $\mathfrak{J}_0 \leqq \mathfrak{O}^{(2)}$. Ist B ein beschränktes Intervall in G', das 0 enthält und ist $(x_i : i \in N)$ eine auf B gegen $x \in B$ konvergente Folge, so ist außer den Folgen $(n_i(x_j) : j \in N)$, $i \in N$ auch die Folge $(n_0(x_j) : j \in N)$ schließlich konstant, da die Menge $n_0(B)$ endlich ist. Die Abbildung p von B in $P_{\mathfrak{P}}$ ist dann für alle $\mathfrak{P}$ stetig, und die von $\mathfrak{O}^{(2)}$ auf B induzierte Topologie ist nie gröber als die Intervalltopologie $\mathfrak{J}_0$. Die bislang bewiesenen Tatbestände lassen sich sofort zu der folgenden Aussage verschärfen: Die Topologie $\mathfrak{O}^{(2)}$ ist genau dann nicht gröber als die Intervalltopologie $\mathfrak{J}_0$, wenn für jede $\mathfrak{O}^{(2)}$-Nullfolge $(x_i : i \in N)$ die Folge $(n_0(x_i) : i \in N)$ schließlich konstant gleich 0 ist, oder, was dasselbe bedeutet, beschränkt ist. Ist dies aber nicht der Fall, so induziert $\mathfrak{O}^{(2)}$ auf der von $r_1 = 1/p_1 = 1$ erzeugten Untergruppe eine nichtdiskrete Topologie $\mathfrak{P} = \mathfrak{O}^{(2)} | \langle 1 \rangle$. Die Abbildung p von $(G', \mathfrak{O})$ in $P_{\mathfrak{P}}$ ist dann stetig: Setzen wir für eine beliebige Folge $(x_i : i \in N)$

immer $n_0(x_i)=y_i$ und $x_i-y_i=z_i$, so ist nach dem Bewiesenen für jede $\mathfrak{O}^{(2)}$-Nullfolge die Folge $(z_i: i\in N)$ eine $\mathfrak{O}^{(2)}$- und eine $\mathfrak{P}_{G'}(1)$-Nullfolge, und $(y_i: i\in N)$ ist eine $\mathfrak{P}$-Nullfolge auf Q_0.

Die Topologie $\mathfrak{O}^{(2)}$ stimmt genau dann mit $\mathfrak{P}_{G'}(1)$ überein, wenn für alle $\mathfrak{O}^{(2)}$-Nullfolgen $(x_i: i\in N)$ eine feste natürliche Zahl i_0 existiert, so daß $n_j(x_i)=0$ für alle $j\in N$ und $i>i_0$ gilt. Andernfalls gäbe es eine Teilfolge $(x_i: i\in M\subseteqq N)$ und eine Folge $(j_i: i\in M)$ natürlicher Zahlen derart, daß $n_{j_i}(x_i)\neq 0$ für $i\in M$ gilt, und die Folge $(x_i: i\in N)$ tritt aus jeder $\mathfrak{P}_{G'}(1)$-Umgebung von 0 immer wieder heraus. Im allgemeinen werden in der Topologie $\mathfrak{O}^{(2)}$ mehr Nullfolgen vorhanden sein als in der Topologie $\mathfrak{P}_{G'}(1)$, so daß jene also gröber ist als diese. So ist z.B. die Topologie $\mathfrak{I}$ (vgl. (2.6)) echt gröber als die aus $\mathfrak{I}$ abgeleitete Topologie $\mathfrak{P}_{G'}(1)$.

(2.18) *Die Bezeichnungen der vorigen Nummer seien beibehalten. Auf G existiert eine nichtdiskrete Topologie $\mathfrak{H}$, die echt feiner ist als die Intervalltopologie und bezüglich der die Folge $(1/p_i: i\in N)$ gegen 0 konvergiert. Es gibt genau eine feinste Topologie dieser Art.*

Beweis. $\mathfrak{M}'$ sei die abelsche Gruppe aller Folgen von Elementen aus G' mit der komponentenweisen Addition; E' sei der von allen Endomorphismen von $\mathfrak{M}'$ erzeugte Ring, die die Fortsetzung von den Endomorphismen aus E von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}'$ bilden. Mit diesem Ring als Operatorenbereich bildet $\mathfrak{M}'$ einen E'-Modul. Wir definieren $\mathfrak{H}$ durch die Angabe des E'-Moduls $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}(0)$ aller auf G' gegen 0 konvergenten Folgen. Eine Folge $X=(x_i: i\in N)$ gehöre genau dann zu $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}(0)$, wenn es eine natürliche Zahl $C(X)$ derart gibt, daß $n_i(x_j)=0$ für alle $j\geqq C(X)+i$ gilt. Die Eigenschaften $C(X)=C(-X)$ und $C(X+Y)\leqq \max\big(C(X), C(Y)\big)+1$ sind leicht nachzuprüfen. Da $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}(0)$ bei allen E'-Endomorphismen als Ganzes invariant bleibt, ist $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}(0)$ ein E'-Modul. Für die durch $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}(0)$ erklärte Folgentopologie gilt speziell $\tilde{\tilde{A}}=\tilde{A}$, also $A=\bar{A}$; mit dem Nachweis dieser Eigenschaft ist dann gezeigt, daß $\mathfrak{H}$ echt feiner ist als die Intervalltopologie, denn es gibt $\mathfrak{I}_0$-Nullfolgen, die nicht bezüglich der Topologie $\mathfrak{H}$ gegen 0 konvergieren. Es sei also A eine beliebige Teilmenge aus G' und x ein Element aus $\tilde{\tilde{A}}$, d.h. es gebe eine Folge $X=(x_i: i\in N)\in\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}(0)$ mit $n_i(x_j)=0$ für $j\geqq C(X)+i$, und es gelte $x+x_i\in\tilde{A}$ für $i\in N$. Dann existieren Folgen $X_i=(x_{ij}: j\in N)\in\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}(0)$ mit $n_k(x_{ij})=0$ für $j\geqq C(X_i)+k$, so daß $x+x_i+x_{ij}\in A$ für $i,j\in N$ erfüllt ist. Nun sei $(m_i: i\in N)$ eine Folge natürlicher Zahlen mit der Eigenschaft, daß $m_i-C(X_i)$ größer ist als i. Nun setzen wir $y_i=x_{i\,m_i}$. Aus $i\geqq k$ folgt dann $m_i-C(X_i)>i\geqq k$ und $m_i>C(X_i)+k$ und daraus $n_k(y_i)=0$. Also gehört die Folge $Y=(y_i: i\in N)$ zu $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}(0)$ und $Z=(z_i: i\in N)$ mit $z_i=x_i+y_i$ gehört ebenfalls zu $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}(0)$; außerdem aber liegt $x+z_i$ in A für alle $i\in N$, weshalb x in $\tilde{A}$ liegt, und das war zu zeigen. Die feinste Topologie $\mathfrak{H}_0$, hinsichtlich welcher die Folge $(1/p_i: i\in N)$ gegen 0 konvergiert, ist diejenige Topologie, die aus dem von $P=(1/p_i: i\in N)$ erzeugten E'-Modul $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}_0}(0)$ als Menge der Nullfolgen hervorgeht.

Die wichtigsten Resultate dieses Paragraphen fassen wir in dem folgenden Satz zusammen:

SATZ II:

(2.19) *G' sei eine submonogene Untergruppe* [vgl. (1.2)] *von R', der additiven Gruppe aller reellen Zahlen und G sei gleich $G' \cap R$, wo R die additive Halbgruppe aller nichtnegativen reellen Zahlen bezeichnet. $\mathfrak{D}$ sei eine mit der Addition von G verträgliche Topologie. $\mathfrak{J}_0'$ sei die Intervalltopologie auf G' und $\mathfrak{J}_{01}'$ diejenige Topologie auf G', bezüglich der jede Obermenge von $x+G$, $x \in G'$ eine Umgebung von x darstellt. Dann gelten folgende Aussagen:*

a) *Unter allen Halbgruppentopologien $\mathfrak{D}'$ auf G, bezüglich der die sämtlichen Translationen $x \to x+t$, $t \in G$ Homöomorphismen von G auf $G+t$ mit der dort von $\mathfrak{D}'$ induzierten Topologie bilden, gibt es eine gröbste Topologie $\mathfrak{D}^{(1)}$, die nicht gröber ist als $\mathfrak{D}$ und eine feinste Topologie $\mathfrak{T}\mathfrak{D}$, die nicht feiner ist als $\mathfrak{D}$. Wenn $\mathfrak{D}$ dem Trennungsaxiom T_1 genügt, dann trifft dies auch für $\mathfrak{D}^{(1)}$ und $\mathfrak{T}\mathfrak{D}$ zu.*

b) *Zu jeder Halbgruppentopologie $\mathfrak{D}$ auf G gibt es eine wohlbestimmte feinste Gruppentopologie $\mathfrak{D}^{(2)}$ auf G' (bezüglich der also auch die Bildung des Inversen stetig vonstatten geht), die gröber ist als $\mathfrak{D}^{(1)}$. Ist die aus dem Punkt 0 bestehende Menge in G bezüglich $\mathfrak{D}^{(2)}$ abgeschlossen, dann ist $\mathfrak{D}^{(2)}$ Hausdorffsch.*

c) *Der Umgebungsfilter von 0 bezüglich $\mathfrak{D}^{(2)}$ habe eine abzählbare Basis. Dann induziert $\mathfrak{D}^{(2)}$ auf jeder monogenen Untergruppe eine nichtdiskrete Topologie, oder $\mathfrak{D}^{(2)}$ ist nicht gröber als die Intervalltopologie $\mathfrak{J}_0$. Auf jedem beschränkten Intervall von G' induziert $\mathfrak{D}^{(2)}$ immer eine Topologie, die feiner ist als die Intervalltopologie. Es gibt auf G' nichtdiskrete Gruppentopologien, die echt feiner sind als die Intervalltopologie und unter diesen eine feinste; eine Folge von erzeugenden Elementen der submonogenen Gruppe G' kann dabei so vorgegeben werden, daß sie in diesen Topologien gegen 0 konvergiert.*

§ 3. Submonogene Halbgruppen in topologischen kompakten Halbgruppen

(3.1) (*Wiederholung einer Definition aus* (2.4)). *Die Intervalltopologie auf der Menge R aller nichtnegativen reellen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathfrak{J}_0$; als offene Mengen enthält sie alle Vereinigungen von Intervallen (r, s) mit $r<s$ und Intervallen $[0, s)$ mit $0<s$. Die Topologie, die als offene Mengen die sämtlichen Vereinigungen von Intervallen $[r, s)$ mit $r<s$ enthält, nennen wir Halbintervalltopologie und bezeichnen sie mit $\mathfrak{J}_1$.*

(3.2) *Ein topologischer Raum $(E, \mathfrak{D})$ heißt kompakt, wenn in ihm der Satz von Heine-Borel-Lebesgue gilt und der Raum Hausdorffsch ist* [vgl. (2.7)]. *Ein topologischer Raum heißt lokalkompakt, wenn er Hausdorffsch ist und jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Ein topologischer Raum heißt folgenkompakt, wenn er Hausdorffsch ist und jede (abzählbare) Folge von Punkten einen Häufungspunkt hat; gilt dies nur für eine Umgebung eines jeden Punktes, so heißt der Raum lokal folgenkompakt. Jeder kompakte Raum ist folgenkompakt, aber das Umgekehrte ist nicht richtig.*

(3.3) Setzt man in einer lokalkompakten, nicht kompakten topologischen Gruppe H die Verknüpfung $(x, y) \to xy$ auf die Einpunktkompaktifizierung $H \cup \{a\}$ fort, indem man $xa = ax = a$ für alle $x \in H \cup \{a\}$ festsetzt, so entsteht dabei nie eine topologische Halbgruppe; das sofort gegenwärtige Beispiel der durch einen Punkt abgeschlossenen Zahlengeraden oder der Riemannschen Zahlenkugel läßt sich sofort auf den allgemeinsten Fall ausweiten. Immerhin ist für eine topologische Gruppe die so definierte Abbildung $(x, y) \to xy$ von $(H \cup \{a\}) \times (H \cup \{a\})$ auf $H \cup \{a\}$ stetig außer im Punkt (a, a). Falls H nur eine topologische Halbgruppe ist, braucht dies nicht mehr richtig zu sein. (Beispiel: Wird R so mit einer Topologie ausgestattet, daß jeder Punkt aus $[0, 1)$ eine offene Menge bildet und auf $[1, \infty)$ die Topologie von den Intervallen (r, s), $r < s$ erzeugt wird, so ist die Addition auf R hinsichtlich dieser Topologie stetig. [Mit den Bezeichnungen von (2.5) und $\mathfrak{D}$ als der diskreten Topologie auf R ist gerade $\mathfrak{D}1\mathfrak{I}_0$ die so definierte Topologie.] Ist $R \cup \{a\}$ die Einpunktkompaktifizierung der damit erklärten lokalkompakten topologischen Halbgruppe R, so konvergiert die Folge $(1/i : i \in N)$ gegen a, aber die Folge $(2 + \frac{1}{i} : i \in N)$ konvergiert gegen 2 und nicht gegen $2 + \lim 1/i = a$). In diesen Fällen sind die Unstetigkeitspunkte jedenfalls in der Menge $\big((H \cup \{a\}) \times \{a\}\big) \cup \big(\{a\} \times (H \cup \{a\})\big)$ enthalten. Um später den Fall nicht kompakter lokalkompakter topologischer Gruppen in unsere Betrachtungen einbeziehen zu können, greifen wir zu der folgenden Definition:

(3.4) *Ein kompakter topologischer Raum $(K, \mathfrak{O})$ heißt eine fasttopologische kompakte Halbgruppe, wenn folgende Aussagen gelten:*

a) *Auf K ist eine assoziative Verknüpfung überall erklärt. Die Verknüpfung wird multiplikativ geschrieben: $(x, y) \to xy$.*

b) *Es gibt höchstens ein Element $a \in K$ mit den folgenden Eigenschaften:*

ba) *Es gilt $a^2 = a$, d.h. a ist ein idempotentes Element.*

bb) $(K - \{a\})(K - \{a\}) \subseteq K - \{a\}$.

bc) *$(x, y) \to xy$ ist mit Ausnahme des Punktes (a, a) überall stetig.*

a heißt Ausnahmepunkt. Ist ein Ausnahmepunkt wirklich vorhanden, dann nennen wir K eigentlich fasttopologisch; andernfalls ist K natürlich topologisch, d.h. jede topologische kompakte Halbgruppe ist insbesondere fasttopologisch.

(3.5) *K sei eine topologische Halbgruppe, die den folgenden Bedingungen genügt:*

a) *K ist lokalkompakt aber nicht kompakt.*

b) *Sind W_1 und W_2 kompakte Teilräume von K, so sind $\{x : xW_1 \subseteq W_2\}^-$ und $\{x : W_1 x \subseteq W_2\}^-$ kompakte Teilräume von K.*

Dann ist die Einpunktkompaktifizierung $K \cup \{a\}$ von K mit der durch $xa = ax = a$ für alle $x \in K \cup \{a\}$ erweiterten Multiplikation eine kompakte fasttopologische Halbgruppe.

Die Bedingung b) *folgt aus der Bedingung*

c) *Die Translationen* $f_d\colon x \to xd$ *bzw.* $g_s\colon x \to sx$ *sind Homöomorphismen von* K *in* K *und die Abbildungen* $(x, d) \to f_d^{-1}(x)$ *und* $(x, s) \to g_s^{-1}(x)$ *sind stetig auf* $f_d(K) \times K$ *bzw.* $g_s(K) \times K$.

Hinreichend für die Gültigkeit von c) *ist*

d) K *ist Unterhalbgruppe einer lokalkompakten topologischen Gruppe.*

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß die Abbildung $(x, y) \to xy$ z.B. im Punkt (a, b), $b \neq a$ stetig ist. Dazu müssen wir nach Vorgabe eines kompakten Teilraums B von K einen kompakten Teilraum B' und eine Umgebung V von b so finden, daß $(K \setminus B')\, V \cap K \subseteq K \setminus B$ oder $(K \setminus B')\, V \cap B = \emptyset$ gilt. Ist aber V eine kompakte Umgebung von b, so ist die Menge $M(V)$ der x mit $xV \subseteq B$ relativ kompakt in K nach b) und es gilt $\left(K \setminus \overline{M(V)}\right) V \cap B = \emptyset$. Dann ist $B' = \overline{M(V)}$ der verlangte kompakte Teilraum von K. Wegen $\{x\colon x W_1 \subseteq W_2\} = f_{W_1}^{-1}(W_2)$ und $\{x\colon W_1 x \subseteq W_2\} = g_{W_1}^{-1}(W_2)$ folgt b) aus c), und daß c) aus d) folgt, ist trivial.

(3.6) *Ein stetiger algebraischer Homomorphismus einer fasttopologischen kompakten Halbgruppe* K *in eine fasttopologische Halbgruppe* K' *sei eine stetige Abbildung* f, *die überall mit der Verknüpfung verträglich ist, d.h. die Identität* $f(xy) = f(x) f(y)$ *befriedigt.*

(3.7) Es ist bequem, für das Folgende eine technisch formale Übereinkunft der folgenden Art zu treffen: *Ist* K *eine fasttopologische kompakte Halbgruppe, so bezeichne* A_K *(oder auch bloß* A, *wenn Verwechslungen nicht zu befürchten sind) die leere Menge immer, wenn* K *topologisch ist, und die Menge* $\{a\}$ *bestehend aus dem Ausnahmepunkt, wenn* K *eigentlich fasttopologisch ist. Für alle Teilmengen* L *von* K *sei*

$$\underline{L} = L \setminus A_K = \begin{cases} L, & \text{wenn } K \text{ kompakt topologisch ist} \\ L \cap (K \setminus \{a\}), & \text{wenn } K \text{ eigentlich fasttopologisch ist.} \end{cases}$$

$L \to \underline{L}$ *ist also der naheliegende Verbandshomomorphismus des Verbandes der Teilmengen von* K *auf den Verband der Teilmengen von* $\underline{K} = K \setminus A_K$.

(3.8) $(K, \mathfrak{O})$ *oder kurz* K *sei eine kompakte fasttopologische Halbgruppe;* H *sei eine submonogene Unterhalbgruppe von* K, *die in* K *dicht sei; es gebe nämlich eine submonogene Unterhalbgruppe* G *der additiven Halbgruppe* $R \setminus \{0\}$ *aller positiven reellen Zahlen und einen algebraischen Homomorphismus* f *von* G *auf* H. *(Diese Bezeichnungen werden im ganzen Paragraphen festgehalten.) Wir setzen*

a) $C = \bigcap \left\{ \overline{f\left((0, r) \cap G\right)}\colon r > 0 \right\}$,

b) $D = \bigcap \left\{ \overline{f\left((r, \infty) \cap G\right)}\colon r \in R \right\}$.

In dem kompakten Raum K *ist* $D \neq \emptyset$, *und* $C = \emptyset$ *gilt dann und nur dann, wenn* G *monogen ist, also ein* $r > 0$ *existiert, so daß* $(0, r) \cap G = \emptyset$ *ist. Grundlegend für alles folgende ist die Behauptung:*

$\underline{C}$ *und* $\underline{D}$ *sind leer oder lokalkompakte topologische Untergruppen von* $\underline{K}$. *Falls* $\underline{C} \neq \emptyset$ *ist ,setzen wir* f *stets durch* $f(0) = 1$ *(= Neutralelement von* $\underline{C}$*) auf*

$G \cup \{0\}$ *fort. Beim Beweis dieser Behauptung benützen wir den folgenden Hilfssatz*

(3.9) $C = \{x$: Es gibt eine Nullfolge $(r_i: i \in N)$ auf G hinsichtlich der Intervalltopologie $\mathfrak{I}_0$ mit $x = \lim_i f(r_i)\}$,

$D = \{x$: Es gibt eine über alle Grenzen wachsende Folge $(r_i: i \in N)$ auf G mit $x = \lim_i f(r_i)\}$.

Anmerkung: *Der Ausdruck Nullfolge bedeutet hinfort im ganzen Paragraphen, falls nicht ausdrücklich anders betont, Nullfolge bezüglich der Intervalltopologie* $\mathfrak{I}_0$ *auf* G.

Beweis. Wir führen den Beweis für C; der zweite Teil des Hilfssatzes wird genau so bewiesen. Die in der Behauptung auf der rechten Seite der zu beweisenden Gleichung stehende Menge heiße vorübergehend C'. Die Beziehung $C' \subseteq C$ ist trivial. Es sei nun umgekehrt x ein Element von C. Dann gibt es eine Nullfolge $(r_i: i \in N)$ auf G derart, daß zu jedem $i \in N$ eine Nullfolge $(r_{ij}: j \in N)$ auf $(0, r_i) \cap G$ mit $x = \lim_j f(r_{ij})$ existiert, denn G ist abzählbar. Wir weisen nun die Existenz von Folgen $(n_k: k \in N)$ und $(m_k: k \in N)$ natürlicher Zahlen nach, mit welchen die Beziehung $\lim_k f(r_{n_k m_k}) = x$ erfüllt und $(n_k: k \in N)$ unbeschränkt ist. Dann liegt aber x in C' und es gilt $C = C'$. Nun sei also $\mathfrak{B}$ eine Basis für den Filter der Umgebungen von x. Zu $i \in N$ und $U \in \mathfrak{B}$ wählen wir ein Element $r(i, U)$ aus der Folge $(r_{ij}: j \in N)$ derart, daß $r(i, U)$ in U liegt; dies ist möglich, da $f(r_{ij})$ für wachsende j gegen x konvergiert. Auf der Menge M aller Paare $\big(i, r(i, U)\big)$ definieren wir eine Filterordnung $\prec$, indem wir $\big(i, r(i, U)\big) \prec \big(i', r(i', U')\big)$ genau dann setzen, wenn $i < i'$ und $U \subset U'$ gilt. M wird dadurch zu einer abzählbaren, gerichteten Menge, in der es eine Folge $\big((i_k, s_k): k \in N\big)$ mit der Eigenschaft gibt, daß zu jedem $\big(i, r(i, U)\big) \in M$ ein $k \in N$ mit $\big(i, r(i, U)\big) \prec (i_k, s_k)$ existiert. Das Netz der Elemente $F\big((i, r(i, U)\big) = f\big(r(i, U)\big)$ konvergiert gegen x, also auch die Folge $\big(f(s_k): k \in N\big)$. Die Folge $(s_k: k \in N)$ ist aber eine Folge $(r_{n_k m_k}: k \in N)$ der verlangten Art.

Beweis von (3.8). x und y seien beliebige Elemente aus C. Es gibt dann Nullfolgen $(r_i: i \in N)$ und $(s_i: i \in N)$ auf G mit $x = \lim f(r_i)$ und $y = \lim f(s_i)$. Wir können o.B.d.A. $r_i < s_i$ annehmen, denn zu jedem s_i gibt es eine natürliche Zahl k_i derart, daß $r_{k_i} < s_i$ gilt, weil die r_i eine Nullfolge bilden; eine Umnumerierung der Folge $(r_{k_i}: i \in N)$ liefert dann die gewünschte Normierung. Von dieser Normierungsmöglichkeit werden wir auch weiterhin gelegentlich Gebrauch machen. Die Folge $(s_i - r_i: i \in N)$ ist eine Nullfolge; da C kompakt ist, können wir ferner auch $c = \lim f(s_i - r_i) \in C$ annehmen, da wir gegebenenfalls eine konvergente Teilfolge auswählen können. Falls nun nicht $x = c = a$ ist, gilt $xc = \lim f(r_i) \lim f(s_i - r_i) = \lim f(r_i) f(s_i - r_i) = \lim f(s_i) = y$, denn die Multiplikation ist höchstens in (a, a) unstetig. Wenn aber x und y von a verschieden sind, so ist sicher auch c von a verschieden, denn es gilt $xa = a$. Demnach ist in $\underline{C}$ jede Gleichung der Form $xc = y$ nach $c \in \underline{C}$ lösbar, d.h. $\underline{C}$ ist eine lokalkompakte abelsche Gruppe mit stetiger Multiplikation. Diese ist dann sogar topologisch, d.h. die Bildung des Inversen $x \to x^{-1}$ ist stetig [5].

Die Tatsache, daß K fasttopologisch ist, d.h. daß die Multiplikation auch in den Punkten (x, a) und (a, x) stetig ist, sofern nur $x \neq a$ gilt, ist beim Beweis entscheidend ausgenützt worden. Im weiteren Verlauf der Untersuchung werden wir feststellen, daß für scharf submonogene Halbgruppen G die Gruppe $\underline{C}$ entweder leer oder aber kompakt ist, so daß dann in diesem Fall $\underline{C} = C$ und $A \not\subset C$ gilt.

(3.10) *Es sei $C \neq \emptyset$ und $C \neq \{a\}$; mit C_0 sei eine abgeschlossene Untergruppe von $\underline{C}$ bezeichnet. Dann liegt jedes Element von K in genau einer in $\underline{K}$ abgeschlossenen Untermenge der Form $C_0 x$. Auf diese Weise wird K in Äquivalenzklassen $\varrho(x) = C_0 x$ zerlegt, und die Abbildung $x \to \varrho(x)$ ist ein Homomorphismus auf den Restklassenraum K/ϱ, den wir auch mit K/C_0 bezeichnen, und auf dem die Quotiententopologie eingeführt ist. Das Bild $\varrho(\underline{K}) = \underline{K}/C_0$ von $\underline{K}$ ist eine lokalkompakte topologische Halbgruppe, in der die submonogene Halbgruppe $\varrho(f(G))$ dicht ist.*

Die Menge $\underline{C}^* = \bigcap \{\overline{\varrho(f((0, r) \cap G))} : r > 0\}$ in $\underline{K}/C_0$ ist gleich $\varrho(\underline{C})$.

Beweis. Jedes Element x von K liegt in einer Menge der Form yC_0: Für $x = a$ ist dies im Fall einer eigentlich fasttopologischen Halbgruppe K trivial mit $y = a$. Es sei nun aber $x \in \underline{K}$. Dann existiert eine Folge $(r_i : i \in N)$ auf G mit $x = \lim f(r_i)$. Es sei 1 das Neutralelement von $\underline{C}$ (und von C_0), und es gelte $1 = \lim f(e_i)$ mit einer geeigneten Nullfolge $(e_i : i \in N)$ auf G. Nach einem eventuellen Übergang zu einer Teilfolge können wir $e_i < r_i$ und wegen der Kompaktheit von K auch die Existenz von $\lim f(r_i - e_i) = y$ annehmen. Wegen $1 \notin A_K$ gilt $y1 = \lim f(r_i - e_i) \lim f(e_i) = \lim f(r_i - e_i) f(e_i) = x$. Da aber x in $\underline{K}$ liegt, liegt auch y in $\underline{K}$. Auf dem Teilraum yC_0 wirkt C_0 durch Rechts- (und infolge der Kommutativität auch durch Links-) multiplikation transitiv, und 1 wirkt als identische Abbildung; also gilt $x1 = 1x = x$ für alle $x \in K$; insbesondere ist die in (3.8) definierte Fortsetzung von f auf $G \cup \{0\}$ ein algebraischer Homomorphismus. Die Mengen $\varrho(x) = C_0 x$ definieren eine Äquivalenz- und sogar eine Kongruenzklassenzerlegung: Es sei $C_0 x \cap C_0 y \neq \emptyset$; es gebe also Elemente c und c' mit $cx = c'y$, $c, c' \in C_0$. Dann gilt $y = c'^{-1} c x \in C_0 x$ und $C_0 y \subseteq C_0 x$, woraus aus Symmetriegründen sofort $C_0 y = C_0 x$ folgt; die Klassen $\varrho(x)$ sind die Transitivitätssysteme (orbits) der auf K wirkenden Transformationsgruppe C_0. Daß es sich bei der Äquivalenzrelation ϱ um eine Kongruenzrelation handelt, die der Identität $\varrho(x)\,\varrho(y) = \varrho(xy)$, also $C_0 x \cdot C_0 y = C_0 xy$ genügt, folgt unmittelbar aus der Gruppeneigenschaft von C_0 und der Kommutativität von K. Wird auf K/ϱ die Quotiententopologie betrachtet, so ist nach den Definitionen $x \to \varrho(x)$ ein Homomorphismus von K auf K/ϱ [vgl. (2.3)]; man beachte daß K/ϱ nicht Hausdorffsch zu sein braucht; und zwar ist K/ϱ genau dann Hausdorffsch, wenn C_0 kompakt ist, was wir hier ohne Beweis anführen. Wir zeigen jetzt, daß die Einschränkung von ϱ auf $\underline{K}$ eine offene Abbildung ist; da keine Verwechslungen zu befürchten sind, bezeichnen wir weiterhin diese Einschränkung ebenfalls mit ϱ. Es genügt, nachzuweisen, daß UC_0 ein offener Teilraum in $\underline{K}$ ist, wenn immer U in $\underline{K}$ offen ist. Ist $x \in UC_0$, so gibt es ein $c \in C_0$ so, daß $x \in Uc$. Dann aber gilt

$xc^{-1} \in U1 = U$. Infolge der Stetigkeit der Abbildung $y \to yc^{-1}$ gibt es eine Umgebung V von x derart, daß $Vc^{-1} \subseteq U$, was $V1 = V \subseteq Uc$ und damit die Offenheit von UC_0 nach sich zieht. Wir beweisen jetzt die Gültigkeit des Hausdorffschen Trennungsaxioms in $\underline{K}/\varrho$. Es sei $x \notin C_0 y$. Angenommen für alle Umgebungen U von x bzw. V von y gebe es Elemente $c_U u_U = c_V v_V$ in $C_0 U \cap C_0 V$ mit $u_U \in U$, $v_V \in V$ und c_U, $c_V \in C_0$. Durchlaufen dann die Umgebungen U und V die Umgebungsfilter von x bzw. y, so gilt $\lim x_U = x$, $\lim y_V = y$ (denn K ist Hausdorffsch), und wegen der Kompaktheit von K können wir auch $\lim c_U^{-1} c_V = c$ in C annehmen. Wegen $y \notin A_K$ gilt $x = cy$, woraus zusammen mit $x \in \underline{K}$ schließlich $y \in \underline{K}$ folgt. Nun ist aber C_0 abgeschlossen in $\underline{K}$, also liegt c in C_0 (da es ja nicht gleich a sein kann) und x in $C_0 y$ im Widerspruch zur Annahme. Damit ist die Gültigkeit des Axioms T_2 für $\underline{K}/C_0$ nachgewiesen. Da eine kompakte Umgebung U aus $\underline{K}$ auf eine kompakte Umgebung von $\underline{K}/C_0$ abgebildet wird, ist $\underline{K}/C_0$ lokalkompakt; daß $\varrho\big(f(G)\big)$ in $\underline{K}/C_0$ dicht ist, ist unmittelbar einzusehen. Die Einpunktkompaktifizierung $\varrho(\underline{K}) \cup \{a'\}$ von $\varrho(\underline{K})$ ist mit der üblichen Festsetzung $xa' = a'x = a'$ für alle $x \in \varrho(\underline{K}) \cup \{a'\}$ jedenfalls dann eine fasttopologische Halbgruppe, wenn C_0 kompakt ist. (Man beachte, daß diejenige Abbildung von $\varrho(\underline{K}) \cup \{a'\}$ auf $\varrho(K)$, die a' auf $\varrho(a)$ abbildet und auf $\varrho(\underline{K})$ die identische Abbildung ist, stetig ist, aber i.a. nicht ihre Umkehrabbildung; dies trifft genau in dem schon oben kurz erwähnten Fall zu, daß C_0 kompakt und dann K/ϱ Hausdorffsch ist). Es sei zum Beweis $(x_i : i \in L)$ ein Netz mit einer gerichteten Indexmenge L, das gegen eine Element $x \in \varrho(\underline{K})$ konvergiert, und $(y_i : i \in L')$ sei ein gegen a' konvergentes Netz. Ferner sei u ein Punkt aus $\varrho^{-1}(x)$ und U eine kompakte Umgebung von u in $\underline{K}$. Dann existiert für jedes hinreichend große $i \in L$ ein $u_i \in U$ mit $\varrho(u_i) = x_i$. O.B.d.A. sei $\lim_L u_i = u$. Ferner bestimmen wir ein Netz $(v_i : i \in L')$ mit $\varrho(v_i) = y_i$ und $v = \lim_L v_i \in K$; dabei haben wir von der Möglichkeit der Auswahl eines auf dem kompakten Raum K konvergenten Teilnetzes Gebrauch gemacht. Notwendigerweise ist nun $v = a$. Es sei, eventuell nach Auswahl einer geeigneten gerichteten Teilmenge L'' in dem Produkt $L \times L'$, die Beziehung $\lim\big(x_i y_j : (i,j) \in L''\big) = z \in \varrho(\underline{K}) \cup \{a'\}$ erfüllt. Wäre nun $z \in \varrho(\underline{K})$, $w \in \varrho^{-1}(z)$, so würde dies bedeuten, daß mit einer kompakten Umgebung V von w in $\underline{K}$ für alle hinreichend großen $(i,j) \in L''$ stets $u_i v_j C_0 \subseteq V C_0$ oder auch $u_i v_j \in V C_0$ gelten müßte. Nun ist aber VC_0 als stetiges Bild des kompakten Produktes $V \times C_0$ kompakt und das Netz $\big(u_i v_j : (i,j) \in L''\big)$ verliefe schließlich ganz in einem kompakten Teilraum von $\underline{K}$, was aber zur Gültigkeit von $\lim\big(u_i v_j : (i,j) \in L''\big) = \lim_L u_i \lim_{L'} v_j = uv = ua = a$ im Widerspruch steht. Also ist die Multiplikation auf $\underline{K}/C_0 \cup \{a'\}$ in der Tat stetig außer vielleicht im Punkt (a', a').

Um die Behauptung über $\underline{C}^*$ nachzuweisen, genügt es, daß wir die Beziehung $\bigcap \{\varrho\big(f((0,r) \cap G)\big)^- : r > 0\} \subseteq \varrho(\underline{C})$ nachprüfen; daß $\varrho(\underline{C})$ in $\varrho(\underline{C}^*)$ enthalten ist, ist trivial. Es sei $x = \lim \varrho\big(f(r_i)\big) \in \varrho(\underline{K})$ mit einer Nullfolge $(r_i : i \in N)$ auf G. Zu jeder kompakten Umgebung $V \subseteq K$ eines Punktes $z \in \varrho^{-1}(x)$ mit $\mathring{V}$ als Innerem gibt es ein $j \in N$ derart, daß für alle $i > j$ immer $\varrho\big(f(r_i)\big) \in \varrho(\mathring{V})$ oder $C_0 f(r_i) \subseteq C_0 \mathring{V}$ gilt, woraus $C_0 f(r_i) \cap \mathring{V} \neq \emptyset$ folgt. Es gibt also Elemente

$c_i \in C_0$, $i > j$ derart, daß $c_i f(r_i)$ im Inneren $\mathring{V}$ von V liegt. Es sei $\lim c_i f(r_i) = u \in V$ und W eine beliebige kompakte Umgebung von u in K. Für $i > k$ liege $c_i f(r_i)$ in $\mathring{W}$. Für alle $i > j$ gibt es eine Nullfolge $(r_{ii'}: i' \in N)$ auf G so, daß $\lim \left(f(r_{ii'}): i \in N\right) = c_i \in C_0 \subseteq \underline{C}$; zu jedem $i > K$ existiert also eine natürliche Zahl $n(i)$ so, daß für $i' > n(i)$ die Beziehung $f(r_{ii'}) f(r_i) = f(r_{ii'} + r_i) \in \mathring{W}$ erfüllt ist. Für eine Folge natürlicher Zahlen $m_i > n(i)$, für welche $(r_{im_i}: i \in N)$ eine Nullfolge auf G ist, liegt demnach die Folge $\left(f(r_{im_i} + r_i): i \in M\right)$, $M \subseteq N$, in W. Eine Teilfolge hiervon konvergiert gegen ein Element aus W, das aber andererseits in C liegen muß. Also enthält W einen Punkt aus $\underline{C}$. Da K kompakt und also erst recht regulär ist, gibt es beliebig kleine kompakte Umgebungen W von u und daher in jeder beliebigen Nähe von u Elemente aus $\underline{C}$. Da $\underline{C}$ abgeschlossen ist liegt u in $\underline{C}$ und $\varrho(u)$ in $\varrho(\underline{C})$; also liegt x in $\varrho(\underline{C})$ und das war zu zeigen.

Dieser Hilfssatz wird bei der Untersuchung der Struktur von $\underline{C}$ wichtige Dienste leisten. Jedesmal, wenn eine Annahme über $\underline{C}$ zu einem Widerspruch geführt werden soll, kann dies dadurch geschehen, daß man mit einer abgeschlossenen Untergruppe C_0 von $\underline{C}$ das homomorphe Bild $\underline{K}/C_0$ von $\underline{K}$ untersucht und dort einen Widerspruch ableitet; ist C_0 kompakt, so können wir dabei sogar annehmen, daß das Bild K/C_0 fasttopologisch ist. Bei jedem solchen Widerspruchsbeweis können wir also $\underline{C}$ durch eines seiner homomorphen Bilder ersetzen. Dieses noch wiederholt anzuwendende Prinzip nennen wir das *„Prinzip des homomorphen Bildes"*.

(3.11) *K sei eine kompakte fasttopologische Halbgruppe und $f(G)$ eine dichte submonogene Halbgruppe. σ sei ein Homomorphismus von $\underline{K}$ auf die lokalkompakte topologische Halbgruppe $\sigma(\underline{K})$. Ferner sei g ein algebraischer Homomorphismus von $G \cup \{0\}$ in $\sigma(\underline{K})$ der auf $G \cup \{0\}$ hinsichtlich der Halbintervalltopologie $\mathfrak{I}_1$ stetig ist* (3.1). *Dann gestattet g eine Fortsetzung zu einem algebraischen Homomorphismus von R in $\sigma(\underline{K})$, der hinsichtlich der Intervalltopologie $\mathfrak{I}_0$* (3.1) *stetig ist und ebenfalls mit g bezeichnet wird.*

Beweis. Es sei r ein beliebiges Element aus R, und $(r_i: i \in N)$ sei eine beliebige, von oben her gegen r $\mathfrak{I}_0$-konvergente (oder, was dasselbe besagt $\mathfrak{I}_1$-konvergente) Folge auf G. $\sigma(\underline{K}) \cup \{a'\}$ sei die Einpunktkompaktifizierung von $\sigma(\underline{K})$. Dann können wir $y_r = \lim g(r_i) \in \sigma(\underline{K}) \cup \{a'\}$ annehmen. Für eine zweite, von oben gegen r $\mathfrak{I}_0$-konvergente Folge $(s_i: i \in N)$ auf G gelte $z_r = \lim g(s_i) \in \underline{K}$; falls für alle von oben gegen r konvergenten Folgen auf G stets alle Häufungspunkte ihrer g-Bilder gleich a' sind, ist $g(r) = a'$ zu setzen. Wir können nach einem schon früher angewandten Normierungsvorgang $r_i \geqq s_i$ annehmen. Wegen $\lim g(r_i - s_i) = g(0) \neq a'$ und $\lim g(s_i) \in \sigma(\underline{K})$ gilt dann $z_r = \lim g(s_i) = \lim g(s_i)\, g(0) = \lim g(s_i) \lim g(r_i - s_i) = \lim g(r_i) = y_r$. Also stimmen die Häufungspunkte aller Folgen $\left(g(r_i): i \in N\right)$ mit einer gegen $r \in R$ mit der Halbintervalltopologie konvergenten Folge $(r_i: i \in N)$ auf G überein. Es existiert also $\lim \left(g(s): s \to r \text{ bezüglich } \mathfrak{I}_1,\ s \in G\right)$ und wird gleich $g(r)$ gesetzt. Damit ist eine Fortsetzung von $G \cup \{0\}$ auf R geleistet, die bezüglich der Halbintervalltopologie stetig ist (zur Fortsetzung einer Funktion von einem dichten Unterraum auf den ganzen Raum s. z. B. [*1*], Chap. I, § 6, No 7, S. 54.

Ist U eine kompakte Umgebung von $g(0)$ in $\sigma(\underline{K})$, so gibt es zu jedem $r \in G$ ein Intervall $[r, r+d(r)]$, $d(r)>0$ mit $g\big([r, r+d(r)]\big) \in g(r)\, U \subseteq \sigma(\underline{K})$; da ganz R von den Intervallen $[r, r+d(r)]$ überdeckt wird, ist $g(s) \neq a'$ für alle $s \in R$, d.h. $g(R)$ liegt in $\sigma(\underline{K})$. Wir haben jetzt noch nachzuweisen, daß g auf R auch hinsichtlich der Intervalltopologie $\mathfrak{I}_0$ stetig ist. Es sei also $r \in R$, $0 < R$. Zum Beweis der Behauptung reicht es aus, zu zeigen, daß mit jeder von unten gegen r $\mathfrak{I}_0$-konvergenten Folge $(r_i : i \in N)$ auf R die Beziehung $\lim g(r_i) = g(r)$ gilt. U bezeichne eine kompakte Umgebung von $g(0)$, und $q \in R$ sei so ausgewählt, daß $g\big([0, q)\big) \subseteq U$; dies ist möglich, da g bezüglich $\mathfrak{I}_1$ stetig ist. Bezeichnen wir $r - r_i$ mit t_i, so können wir o.B.d.A. $t_i \in \left[0, \frac{q}{2}\right)$ annehmen, da $(r_i : i \in N)$ gegen r konvergiert. Nun liegen alle Elemente $g(r_i)$ in $g\left(r - \frac{q}{2}\right) g\big([0, q)\big)$ also auch in dem kompakten Raum $g\left(r - \frac{q}{2}\right) U$. Danach kann man immer eine Teilfolge $(r_{i_j} : j \in N)$ so ausfindig machen, daß $\big(g(r_{i_j}) : j \in N\big)$ gegen $z \in g\left(r - \frac{q}{2}\right) U$ konvergiert. Für diese Teilfolge gilt aber $z = \lim g(r_{i_j}) = \lim g(r_{i_j})\, g(0) = \lim g(r_{i_j}) \lim g(t_{i_j}) = \lim g(r_{i_j})\, g(t_{i_j}) = g(r)$, und dies gilt für jede konvergente Teilfolge; damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

(3.12) *Die Bezeichnungen seien dieselben wie in* (3.10). *Wiederum sei* $C \neq \emptyset$ *und* $C \neq A_k$. *Die Abbildung* ϱ *sei durch* $\varrho(x) = \underline{C}\, x$ *definiert; wir setzen also* $C_0 = \underline{C}$. *Dann gestattet die Abbildung* g; *die durch die folgende Festsetzung definiert ist:* $g(r) = \begin{cases} \varrho\big(f(r)\big), & \text{wenn } r \in G,\ r > 0 \\ \underline{C}, & \text{wenn } r = 0 \end{cases}$ *eine Fortsetzung zu einem stetigen algebraischen Homomorphismus von* R *in* $\underline{K}/\underline{C}$.

Beweis. Wegen (3.11) genügt es festzustellen, daß die auf $G \cup \{0\}$ definierte Abbildung g bezüglich der Halbintervalltopologie stetig ist. Dafür ist aber gerade hinreichend, daß $\bigcap \{\overline{g\big((0, r) \cap G\big)} : r > 0\} = \{g(0)\}$ gilt, und die Richtigkeit dieser Beziehung wurde in (3.10) bewiesen (setze $C_0 = \underline{C}$!).

(3.13) *K sei eine kompakte, fasttopologische Halbgruppe, in der eine scharf submonogene Halbgruppe $f(G)$ zum Teiler q dicht sei. Es gelte $C \neq \emptyset$, $C \neq A_K$. Wenn $\underline{C}$ diskret ist, dann ist $\underline{C}$ eine monogene endliche Gruppe mit zu q teilerfremder Ordnung.*

Beweis. Die Abbildung ϱ sei definiert durch $\varrho(x) = x\underline{C}$, und g sei der in (3.12) eingeführte $\mathfrak{I}_0$-stetige algebraische Homomorphismus von R in $\underline{K}/\underline{C}$. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist ϱ ein lokaler Isomorphismus; denn es gibt eine kompakte Umgebung U von 1 und eine kompakte Umgebung W von $\varrho(1)$ in $\underline{K}/\underline{C}$, so daß $U \cap \varrho^{-1}(W)$ bei ϱ eineindeutig und also homöomorph in $\underline{K}/\underline{C}$ abgebildet wird: Es sei nämlich U eine kompakte Umgebung von 1, deren Schnitt $U \cap \underline{C}$ mit $\underline{C}$ nur 1 enthält. Angenommen, es existierte eine gegen 1 konvergente Folge $(u_i : i \in N)$ von Elementen in U mit der Eigenschaft, daß zu jedem $i \in N$ ein $c_i \in \underline{C}$ derart existierte, daß $c_i u_i \in U$ und $c_i u_i \neq u_i$ gilt. Da U (bzw. C) kompakt ist, können wir $\lim c_i u_i = u \in U$ (bzw. $\lim c_i = c \in C$) annehmen. Wegen $\lim u_i = 1 \in \underline{C}$ gilt $u = c \cdot 1 = c \neq a$. Daraus folgt wegen

$U \cap C = \{1\}$ notwendig $c = 1$. Da aber $\underline{C}$ diskret ist, gibt es ein $j \in N$, so daß für alle $i > j$ immer $c_i = c = 1$ gilt im Widerspruch zu $c_i u_i \neq u_i$. Es gibt demnach eine Umgebung W von $\varrho(1)$ in $\varrho(K)$, so daß aus $cu = u \in \varrho^{-1}(W) \cap U$ stets $c = 1$ folgt.

Es gibt eine reelle Zahl $q > 0$ so, daß $[0, q]$ von g in W und außerdem eineindeutig abgebildet wird. Die Zuordnung $f' : r \to \varrho^{-1}\big(g(r)\big) \cap U$ für $r \in [0, q]$ ist eine homöomorphe Abbildung von $[0, q]$ in $\varrho^{-1}(W) \cap U$ mit der Eigenschaft, daß aus $r_1, r_2, r_1 + r_2 \in [0, q]$ immer $f'(r_1 + r_2) = f'(r_1)\, f'(r_2)$ folgt. Die Menge $\varrho^{-1}\big(g([0, q])\big)$ ist gleich $f'([0, q])\, \underline{C}$ und dieses Produkt ist direkt; denn aus $f'(r_1) c_1 = f'(r_2) c_2 \in f'([0, q])\, \underline{C}$ folgt $f'(r_1) = f'(r_2) c_2 c_1^{-1}$ und daraus $r_1 = r_2 = r$, was infolge $f'(r) c_2 c_1^{-1} = f'(r) \in \varrho^{-1}(W) \cap U$ dann $c_2 c_1^{-1} = 1$ und $c_2 = c_1$ nach sich zieht. Ist $(u_i : i \in L)$ ein auf $f'([0, q])\, \underline{C}$ gegen u konvergentes Netz, und gilt $u_i = f'(r_i) c_i$ und $u = f'(r) c$, so können wir $c' = \lim_L c_i \in C$ für ein gewisses Teilnetz $(c_i : i \in L')$, $L' \subseteq L$ annehmen. Wegen $\lim f'(r_i) = f'(r)$ ist aber c' von a verschieden, und es gilt $c' = c$. Jedes Teilnetz von $(c_i : i \in L)$ konvergiert also gegen c; demnach konvergiert dieses Netz selbst gegen c. Die Projektion $\mathfrak{p}$ von $f'([0, q])\, \underline{C}$ auf $\underline{C}$ ist demnach stetig. Da $\underline{C}$ diskret und $\mathfrak{p}$ stetig ist, gilt für $0 < r < q$ immer $\mathfrak{p}\big(\overline{f((0, r) \cap G)}\big) \subseteq \overline{\mathfrak{p}\big(f((0, r) \cap G)\big)} = \mathfrak{p}\big(f((0, r) \cap G)\big)$. Danach bekommen wir $\underline{C} = \mathfrak{p}(\underline{C}) = \mathfrak{p}\big(\bigcap \{f((0, r) \cap G) : 0 < r < q\}\big) \subseteq \bigcap \{\mathfrak{p}\big(\overline{f((0, r) \cap G)}\big) : 0 < r < q\} = \bigcap \{f_0((0, r) \cap G) : 0 < r < q\} = P$ mit $f_0 = p \circ f$. Wäre f_0 auf $(0, r)$ für ein r mit $0 < r < q$ eineindeutig, so wäre der Durchschnitt P leer im Gegensatz zu der Voraussetzung $\underline{C} \neq \emptyset$; es gibt also eine submonogene, nicht monogene Unterhalbgruppe G_0 von G, die bei f_0 auf $1 \in \underline{C}$ abgebildet wird. Da G scharf submonogen ist, ist $G_0 = nG$ mit einer natürlichen Zahl n, die von q nicht geteilt wird und $\underline{C} \cong G'/nG'$ ist monogen von der endlichen Ordnung n.

(3.14) *Die Behauptung der vorigen Nummer ist nicht mehr richtig, wenn G nicht scharf submonogen ist.*

Beispiel. Es sei G die von $\big(1/(2.3)^i : i \in N\big)$ in R erzeugte submonogene Unterhalbgruppe. Diese werde zunächst durch f_1 algebraisch homomorph auf eine Untergruppe der additiven Gruppe der rationalen Zahlen modulo 1 abgebildet; das Bild ist ein direktes Produkt der Gruppe $Z(2^\infty)$ und der Gruppe $Z(3^\infty)$. Nun sei K das direkte Produkt der Gruppe $Z(2^\infty)$ mit der diskreten Topologie und der Gruppe T, der additiven Gruppe aller reellen Zahlen modulo 1 mit der natürlichen Topologie. Das Neutralelement dieser Gruppe werde mit $0'$ bezeichnet. T enthält ein durch den algebraischen Isomorphismus h vermitteltes Bild der Gruppe $Z(3^\infty)$ als dichte Untergruppe. Die Abbildung f_2 sei ein algebraischer Isomorphismus von $Z(2^\infty) \times Z(3^\infty)$ in $\underline{K} = Z(2^\infty) \times T$, der einem Element (x, y) das Element $\big(x, h(y)\big)$ zuordnet. Ist $f = f_2 \circ f_1$, so ist $f(G)$ dicht in $\underline{K}$ und $\underline{C} = Z(2^\infty) \times \{0'\}$; denn jedes Element dieser Untergruppe von $\underline{K}$ hat ein Urbild der Form $(r + G_3') \cap G$, wo G_3' die von $1/3^i$, $i \in N$ in R' erzeugte Untergruppe bezeichnet, und dieses Urbild hat mit jedem Intervall $(0, r) \cap G$, $0 < r$ einen nichtleeren Durchschnitt.

(3.15) *Die Voraussetzungen von (3.13) seine dadurch abgeschwächt, daß $\underline{C}$ nicht mehr als diskret, sondern nur als total unzusammenhängend vorausgesetzt*

wird. Dann ist C kompakt und projektiver Limes monogener Gruppen mit zu q primer Ordnung.

Beweis. In einer total unzusammenhängenden lokalkompakten abelschen Gruppe hat das Neutralelement eine Umgebungsbasis aus kompakten und offenen Untergruppen. Es sei C_0 eine von diesen. Dann ist $\underline{C}/C_0$ diskret. Nach dem Prinzip des homomorphen Bildes (3.10) folgt dann aus der vorhergehenden Nummer, daß $\underline{C}/C_0$ eine monogene Gruppe mit zu q primer Ordnung sein muß. Da dies für alle offenen und kompakten Untergruppen C_0 gilt, ist die Behauptung bewiesen.

(3.16) *K sei eine kompakte, fasttopologische Halbgruppe mit einer submonogenen dichten Untergruppe $f(G)$, die Bild einer scharf submonogenen Unterhalbgruppe G von R ist. Es gelte $C \neq \emptyset$, $C \neq A_K$. Dann ist C isomorph dem direkten Produkt einer n-dimensionalen Vektorgruppe R^n und einer kompakten Gruppe Z.*

Beweis. Es sei C_0 die Zusammenhangskomponente von 1 in $\underline{C}$. Dann ist in $\underline{K}/C_0$ die Untergruppe $\underline{C}/C_0$ total unzusammenhängend. Nach dem Prinzip des homomorphen Bildes (3.10) und nach (3.15) ist dann $C_0/\underline{C}$ kompakt. Die Behauptung über die Struktur von $\underline{C}$ folgt aus bekannten Sätzen aus der Theorie der lokalkompakten abelschen Gruppen ([25], S. 109ff.). Im folgenden wenden wir uns dem allgemeineren Fall zu, bei dem G nicht mehr notwendigerweise scharf submonogen zu sein braucht.

(3.15) *K sei eine kompakte fasttopologische Halbgruppe, in der eine submonogene Halbgruppe $f(G)$ dicht sei. $\underline{C}$ sei nicht leer und ϱ sowie g seien wie in (3.12) definiert. Jedem r aus R, der Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen, wird die folgende Teilmenge von $\underline{C}$ zugeordnet:*

a) $C(r) = \{c: c \in \underline{C};$ *es gibt ein* $x \in \underline{K}$ *mit* $\varrho(x) = g(r)$ *und* $cx = x\}$.

Die Abbildung $r \to C(r)$ von R in die Menge der Teilräume von $\underline{C}$ hat folgende Eigenschaften:

b) $C(r)$ *ist eine abgeschlossene Untergruppe von C.*

c) $C(0) = \{1\}$.

d) *Aus* $s \leqq r$ *folgt* $C(s) \subseteq C(r)$.

e) $C(r) = \bigcap\{C(s): r < s\}$.

f) $C(r)$ *enthält keine nichtkompakten abgeschlossenen Hüllen von monogenen Untergruppen, d.h. keine torsionsfreien diskreten monogenen Untergruppen.*

Beweis. Sind x und y Elemente aus $\varrho^{-1}(g(r))$, so gibt es eine $c_0 \in \underline{C}$, so daß $c_0 x = y$. Ist also $cx = x$, so gilt auch $cy = cc_0x = c_0cx = c_0x = y$. Läßt c also ein Element aus $\varrho^{-1}(g(r))$ fest, so auch alle Elemente daraus. Jeder Grenzwert einer Filterbasis, deren Mengen aus solchen Elementen c von $\underline{C}$ besteht, läßt ebenfalls jedes Element aus $\varrho^{-1}(g(r))$ fest. Da Produkte und Inverse von Elementen aus $C(r)$ wieder zu $C(r)$ gehören, ist b) bewiesen. c) folgt aus der Gruppeneigenschaft von $\underline{C}$. Ist $s < r$, $\varrho(x) = g(s)$, $\varrho(y) = g(r-s)$

und $cx=x$, so gilt auch $cxy=xy$; wegen $\varrho(xy)=g(r)$ folgt daraus d). Nun sei $c\in C(s)$ für alle $r<s$. Dann gibt es in jeder Umgebung eines Elementes $x\in\varrho^{-1}(g(r))$ Elemente y, für welche $cy=y$ gilt. Dann ist aber auch $cx=x$. Damit ist e) bewiesen. Ist $\langle c\rangle$ eine diskrete torsionsfreie Untergruppe von $\underline{C}$, so gilt $\lim c^i=a$, wenn i über alle Grenzen wächst. Da K fasttopologisch ist, gilt $\lim c^i x=ax=a$. Also liegt $\langle c\rangle$ sicher nicht in $C(r)$ mit $\varrho(x)=g(r)$. Bei diesem Beweis des Punktes f) der Behauptung geht die Voraussetzung, daß K fasttopologisch sei, wiederum entscheidend ein.

(3.16) *K sei eine kompakte fasttopologische Halbgruppe mit dichter submonogener Unterhalbgruppe $f(G)$. Es sei $\underline{C}$ nicht leer und g sei nicht trivial, d.h. es gelte $\underline{C}\neq\underline{K}$. Es bedeutet dann keine Einschränkung der Allgemeinheit, g auf $[0,1]$ eineindeutig anzunehmen. Für alle $r\in[0,1]$ gelte $C(r)=\langle 1\rangle$. Dann gibt es einen stetigen algebraischen Homomorphismus h von R in K, für den $\varrho(h(r))=g(r)$ gilt und es gibt ein $r_0>0$ so, daß $\varrho^{-1}(g([0,r_0]))=Ch([0,r_0])$ ein lokales direktes Produkt ist. Dabei wird die Struktur von K benützt und nicht, daß K fasttopologisch ist. Der Satz gilt also auch für alle homomorphen Bilder von K gemäß* (3.10).

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß wir g auf $[0,1]$ eineindeutig annehmen dürfen. Würde nämlich kein Intervall $[0,q]$ mit $0<q$ durch g homöomorph abgebildet werden, so würde mit den Bezeichnungen von § 1 $j_1=j_2=0$ folgen, und das Bild von R bei g wäre eine Gruppe, also eine Einparametergruppe; g ließe sich zu einem stetigen algebraischen Homomorphismus von R' auf diese Gruppe fortsetzen, dessen Kern einerseits nicht diskret und andererseits wegen der Stetigkeit von g abgeschlossen wäre und daher mit R' übereinstimmen müßte, was mit der Nichttrivialität von g unverträglich wäre.

Wir setzen $U=\varrho^{-1}(g([0,1/3]))$, so daß also $UUU=\varrho^{-1}(g([0,1]))$ gilt. Die Translationen $x\to ux$, $u\in UU$ sind auf U eineindeutig: Aus $ux_1=ux_2$ folgt zunächst $\varrho(u)\,\varrho(x_1)=\varrho(u)\,\varrho(x_2)$, also $\varrho(x_1)=\varrho(x_2)$ oder $x_1=cx_2\in\varrho^{-1}(g(s))$ mit $c\in C$; wegen $C(s)=\langle 1\rangle$ ist aber $c=1$.

Auf dem Halbgruppenproduktkeim $U\times U$ betrachten wir die Äquivalenzrelation Θ, für die $(x_1,y_1)\,\Theta\,(x_2,y_2)$ genau dann gelte, wenn $x_1y_2=y_1x_2$ gilt. Liegen die Relationen $(x_1,y_1)\,\Theta\,(x_2,y_2)$ und $(x_2,y_2)\,\Theta\,(x_3,y_3)$, so haben wir nach Definition die Bedingungen $x_1y_2=y_1x_2$ und $x_2y_3=y_2x_3$. Multipliziert man die erste Gleichung mit y_3 und die zweite mit y_1 durch, so folgt die Identität $x_1y_2y_3=y_1y_2x_3$. Da die in dieser Gleichung auftretenden Elemente in $UUU=\varrho^{-1}(g([0,1]))$ liegen, gilt $x_1y_3=y_1x_3$, d.h. $(x_1,y_1)\,\Theta\,(x_3,y_3)$. Θ ist also eine Äquivalenzrelation auf dem Halbgruppenkeim $U\times U$ die, wie man unmittelbar sieht, mit der Multiplikation auf $U\times U$ verträglich ist. Der topologische Halbgruppenkeim $U'=(U\times U)/\Theta$ ist aber ein topologischer Gruppenkeim: Das Inverse von $\Theta(x,y)$ ist $\Theta(y,x)$, denn es gilt $\Theta(x,y)\,\Theta(y,x)=\Theta(1,1)$; die Klasse, die aus allen Paaren (z,z) besteht ist das Neutralelement 1 von U'. Die Abbildung $\Theta(x,y)\to\Theta(y,x)$ ist ein Homöomorphismus von U', denn $(x,y)\to(y,x)$ ist ein Homöomorphismus von $U\times U$. Die Abbildung $x\to\Theta(x,1)$ bildet den Halbgruppenkeim $U=\varrho^{-1}(g([0,1/3]))$ isomorph

in U' ab, denn aus $\Theta(x,1)=\Theta(y,1)$ folgt $x\cdot 1=y\cdot 1$. Jedes Element $\Theta(x,y)\in U'$ läßt sich in der Form $\Theta(z,1)$ oder $\Theta(1,z)$ darstellen; es sei nämlich $\varrho(x)=g(r)$; $\varrho(y)=g(s)$ und etwa $r\geqq s$. Ist z' ein beliebiges Element aus $\varrho^{-1}\big(g(r-s)\big)$ so gilt $x=yz'c$ mit $c\in\underline{C}$ oder $x=yz$ mit $z=z'c$. Also ist $\Theta(x,y)=\Theta(yz,y)=\Theta(z,1)$. Entsprechendes gilt für $r\leqq s$. Die Untergruppe $\underline{C}'=\Theta(\underline{C}\times\underline{C})$ von U' ist isomorph zu $\underline{C}$. Nun bezeichne ϱ' diejenige Äquivalenzrelation auf U', deren Klassen aus den Mengen $\Theta(x,y)\,\underline{C}'=\Theta(x,y)\,\Theta(\underline{C}\times\underline{C})=\Theta(x\underline{C}\times y\underline{C})$ bestehen. Die Abbildung $r\to g(r)\to\Theta\big(\varrho^{-1}(g(r)),\,\underline{C}\big)$ von $[0,1/3]$ in U'/ϱ' ist ein lokaler Isomorphismus, der sich zu einem lokalen Isomorphismus g' von $[-1/3,1/3]$ in U'/ϱ' fortsetzen läßt, indem man für $r\in[-1/3,0]$ jeweils $g'(r)=\Theta\big(\underline{C},\,\varrho^{-1}((g)r)\big)$ setzt. Da nach einer Bemerkung von vorhin jedes Element in U' die Form $\Theta(x,1)$ oder $\Theta(1,x)$ hat, ist g' ein lokaler Isomorphismus von $[-1/3,1/3]$ auf U'/ϱ'. Nun ist also U' ein lokalkompakter abelscher Gruppenkeim mit einer abgeschlossenen lokalkompakten Untergruppe $\underline{C}'$ und einer zu einer lokalen Einparametergruppe isomorphen lokalen Faktorgruppe $U'/\underline{C}'$.

Nun sei u ein Element aus $\varrho'^{-1}\big(g'(1/6)\big)$; dann liegt die Menge $\langle u\rangle'$ der Elemente $\underline{1}$, $u^{\pm 1}$, $u^{\pm 2}$ in U'. Wir betrachten auf $U''=\varrho'^{-1}\big(g'([-1/6,1/6])\big)$ die Kongruenzrelation σ, die zwischen zwei Elementen x und y aus U' genau dann besteht, wenn xy^{-1} und yx^{-1} in $\langle u\rangle'$ liegen. Sind x und y Elemente aus U'' mit $\varrho'(x)=g'(r)$ und $\varrho'(y)=g'(s)$ und ist $0\leqq r\leqq s<1/6$, so gilt $-1/6\leqq s-1/6<r$; und wählen wir ein beliebiges Element $v'\in\varrho'^{-1}\big(g'(r-s+1/6)\big)$ so gilt $u^{-1}y\cdot v'=cx$, woraus mit $v=v'c^{-1}$ die Beziehungen $u^{-1}y\cdot v=x$ und $\sigma(y)\,\sigma(v)=\sigma(x)$ folgt. Noch einfacher ist die Existenz eines Elementes $w\in U''$ einzusehen, für welches $\sigma(x)\,\sigma(w)=\sigma(y)$ gilt. Damit ist aber nachgewiesen, daß U''/σ eine Gruppe bildet, die zu dem Gruppenkeim U' lokal isomorph ist. In der abelschen lokalkompakten Gruppe U''/σ gibt es aber eine Einparametergruppe, die die Faktorgruppe $(U''/\sigma)/(\underline{C}'/\sigma)$ deckt, d.h. bei dem Restklassenhomomorphismus σ auf die Faktorgruppe abgebildet wird. Da U''/σ und U' lokal isomorph sind, gibt es in U' eine lokale Einparametergruppe, die die lokale Faktorgruppe $U'/\underline{C}'$ deckt; es existiert also eine homöomorphe Abbildung h' des Intervalls $[-1/3,1/3]$ in U', so daß für alle $r_1, r_2, r_1+r_2\in[-1/3,1/3]$ die Beziehung $h'(r_1)\,h'(r_2)=h'(r_1+r_2)$ und außerdem für alle $r\in[-1/3,1/3]$ stets $\varrho'\big(h'(r)\big)=g'(r)$ gilt. U' ist das lokale direkte Produkt von $\underline{C}'$ und $h'([-1/3,1/3])$. Bezeichnet für den Augenblick φ die Umkehrabbildung der Abbildung $x\to\Theta(x,1)$ von $\varrho^{-1}\big(g([0,1/3])\big)$ auf $\varrho'^{-1}\big(g'([0,1/3])\big)$, so ist die durch $h(r)=\varphi\big(h'(r)\big)$ auf $[0,1/3]$ definierte Abbildung h ein stetiger lokaler Isomorphismus von R in $\underline{K}$, der sich auf natürliche Weise zu einem stetigen algebraischen Homomorphismus von R in K fortsetzen läßt. h hat die in der Behauptung verlangten Eigenschaften.

(3.17) *K sei eine kompakte fasttopologische Halbgruppe mit dichter submonogener Halbgruppe $j(G)$; es sei $\underline{C}\neq\emptyset$. Dann gelten folgende Behauptungen:*

a) *$\underline{C}$ enthält keine zu einer Vektorgruppe R'^n, $n>0$ isomorphe Untergruppe, d.h. die Zusammenhangskomponente von $\underline{1}$ in $\underline{C}$ ist stets kompakt.*

b) *Enthält $\underline{C}$ keine beliebig kleinen Untergruppen, d.h. gibt es eine Umgebung V von 1 in $\underline{C}$, die außer $\langle 1\rangle$ keine Untergruppen enthält, so ist bekanntlich* ([19], [25]) *$\underline{C}$ eine abelsche Liegruppe, in der die Zusammenhangskomponente von 1 nach* a) *eine endlichdimensionale Torusgruppe sein muß. Dann gibt es einen stetigen algebraischen Homomorphismus h von R in $\underline{K}$ mit $\varrho(h(r))=g(r)$.*

Beweis. a) $\underline{C}$ enthalte eine zu einer mindestens eindimensionalen Vektorgruppe isomorphe Untergruppe C_n. Dann ist $\underline{C}$ das direkte Produkt einer Untergruppe F, die eine kompakte und offene Untergruppe enthält und der Gruppe C_n. Die sämtlichen Untergruppen $C(r), r\in R$ sind dann in der Gruppe F enthalten, da sie anderenfalls unendliche monogene und diskrete Untergruppen enthalten müßten, was in (3.15, f) gerade ausgeschlossen war. Wir zerlegen C_n in das direkte Produkt $C_1\times C_{n-1}$ einer ein- und einer $n-1$-dimensionalen Vektorgruppe. Wir wenden auf $\underline{K}$ das Prinzip des homomorphen Bildes (3.10) an und bilden $\underline{K}/C_{n-1}F$. Von nun an können wir also annehmen, daß $\underline{C}$ eine eindimensionale Vektorgruppe sei. Wenn nun $\underline{C}=\underline{K}$ wäre, dann müßte ein algebraisch homomorphes Bild der Halbgruppe G in der Vektorgruppe R^1 dicht sein; da R^1 torsionsfrei ist, müßte dieses Bild eineindeutig sein und daher ganz in einer der beiden Unterhalbgruppen $(-\infty, 0)$ oder $(0, \infty)$ enthalten und könnte dann hinwiederum in R' nicht dicht sein. Also sei jetzt $\underline{C}\neq\underline{K}$. Durch den nichttrivialen Homomorphismus g von R in $\underline{K}$ werde das Intervall $[0, 1]$ eineindeutig abgebildet; nach einer Bemerkung zu Beginn des Beweises von (3.16) ist diese Annahme gerechtfertigt. Außerdem ist $C(r)=\langle 1\rangle$ für alle $r\in R$, wie wir vorhin feststellten. Nach (3.16) ist jetzt $\varrho^{-1}(g([0, 1/3]))$ ein direktes Produkt $\underline{C}h([0, 1/3])$ aus $\underline{C}$ und einer lokalen Einparameterhalbgruppe $h([0, 1/3])$. Der Unterraum $f([0, 1/3]\cap G$ ist dicht in diesem Produkt. Die Projektion dieses Unterraums auf den Faktor $\underline{C}$ liefert dort einen dichten Unterraum; andererseits ist diese Projektion ein algebraisch isomorphes Bild des Halbgruppenkeims $[0, 1/3]\cap G$ und liegt daher ganz in einem Halbstrahl von $\underline{C}$, der in dem isomorphen Bild R'^1 von $\underline{C}$ einem der Intervalle $(-\infty, 0)$ oder $(0, \infty)$ entspricht. Dann kann diese Projektion aber nicht in $\underline{C}$ dicht sein. Mit diesem Widerspruch ist a) bewiesen.

b) Um den zweiten Teil der Behauptung zu beweisen, setzen wir zunächst voraus, $\underline{C}$ sei zusammenhängend, also eine endlichdimensionale Torusgruppe. Im Falle $\underline{C}=\underline{K}$ ist die Behauptung trivial; also sei jetzt g nicht trivial. Jede zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $\underline{C}$ ist eine endlichdimensionale Torusgruppe, und jede aufsteigende Kette solcher Untergruppen bricht nach höchstens n Schritten ab, wenn n die Dimension von $\underline{C}$ angibt. Es gibt demnach nur endlich viele Stellen $0<r_1<\cdots<r_m$ in R, in denen die Dimension von $C(r)$ springt, d.h. für die aus $s<r_i$ jeweils $\dim C(s)<\dim C(r_i)$ folgt. Nun ist $C(s)$ für $0\leqq s<r_1$ diskret, denn $C(0)$ ist nulldimensional und jede nulldimensionale abgeschlossene Untergruppe von $\underline{C}$ ist diskret. $C(s)$ ist für diese Werte von s sogar endlich, und da der Durchschnitt der $C(s)\setminus\{1\}$, genommen über alle s mit $0<s<r_1$ wegen (3.15, c, e) leer ist, muß ein s_0 aus $(0, r_1)$ vorhanden sein, für welches $C(s_0)\setminus\{1\}$ leer ist. O.B.d.A. dürfen wir $s_0=1$ annehmen; eventuell ist f und damit auch g so umzunormieren,

daß f durch f' mit $f'(r)=f(rs_0')$ ersetzt wird, wo s_0' ein zwischen 0 und s_0 gelegenes Element aus G bezeichnet. Die Voraussetzungen von (3.16) sind wieder erfüllt; es gibt also einen stetigen algebraischen Homomorphismus h von R in $\underline{K}$ mit $\varrho\big(h(r)\big)=g(r)$ und $\underline{K}$ ist lokal dem direkten Produkt $\underline{C}\times R$ isomorph.

Nun lassen wir die Voraussetzung fallen, daß $\underline{C}$ zusammenhängend sein muß. Die Zusammenhangskomponente $\underline{C}'$ von 1 in $\underline{C}$ ist eine in $\underline{C}$ offene Torusgruppe einer endlichen Dimension, die gleich 0 oder größer ist. Diese Untergruppe ist dividierbar und ist daher in der abelschen Gruppe $\underline{C}$ ein algebraisch direkter Faktor mit einem Komplementärfaktor C_0. Da aber $\underline{C}'$ offen ist, ist dieser Faktor diskret und daher auch abgeschlossen; daher ist $\underline{C}$ das direkte Produkt von $\underline{C}$ und C_0 auch im topologischen Sinne. Wir zeigen nun, daß der Homomorphismus ϱ_0 von $\underline{K}$ auf $\underline{K}/C_0$ gemäß (3.10) ein lokaler Isomorphismus ist, d.h. daß eine Umgebung U von 1 in $\underline{K}$ vorhanden ist, die bei ϱ_0 eineindeutig abgebildet wird. Wäre dies nämlich nicht der Fall, dann gäbe es eine Folge $(x_i\colon i\in N)$ mit $\varrho(x_i)=g(r_i)$, $r_i>0$, die gegen 1 konvergierte, für die eine Folge $(c_i\colon i\in N)$ auf C_0 existieren müßte mit Elementen $c_i\neq 1$ und $c_i x_i=x_i$. Wegen $\lim x_i=1$ und der Kompaktheit von K sowie der Voraussetzung, K sei fasttopologisch, können wir $\lim c_i=c\in C_0$ annehmen. Da C_0 diskret ist, gibt es ein $j\in N$, so daß für $i>j$ immer $c_i=c$ gilt. Ohne Einschränkung sei jetzt $c_i=c$ für alle $i\in N$. Dann aber muß $c1=1$ und wegen $C(0)=1$ auch $c=1$ gelten im Widerspruch zu $c_i\neq 1$. Nach dem vorher Bewiesenen existiert in $\underline{K}/C_0$ eine Vertreterhalbgruppe für $(\underline{K}/C_0)/(\underline{C}/C_0)$, nämlich ein stetiger algebraischer Homomorphismus h_0 von R in $\underline{K}/C_0$ mit $\varrho\big(\varrho_0^{-1}(h_0(r))\big)=g(r)$. Es gibt eine positive reelle Zahl q derart, daß $[0,q]$ durch h_0 eineindeutig in $\varrho_0(U)$ abgebildet wird, da g ein solches Intervall für hinreichend kleines q sicher eineindeutig abbildet. Die Abbildung $x\to\varrho_0^{-1}(x)\cap U$ ist ein lokaler Isomorphismus von $\varrho_0(U)$ auf U und $r\to\varrho_0^{-1}\big(h_0(r)\big)$ ist ein Homöomorphismus von $[0,q]$ in $\underline{K}$, der sich zu einem stetigen algebraischen Homomorphismus h von R in $\underline{K}$ fortsetzen läßt, für den $\varrho\big(h(r)\big)=g(r)$ gilt.

(3.18) *$\underline{K}$ sei eine kompakte fasttopologische Halbgruppe mit dichter submonogener Unterhalbgruppe $f(G)$; $\underline{C}$ sei nicht leer. Dann existiert eine stetige algebraisch homomorphe Abbildung h von R in $\underline{K}$, für die $\varrho\big(h(r)\big)=g(r)$ gilt.*

Beweis. In $\underline{C}$ existiert eine Filterbasis $\mathfrak{F}$ aus kompakten Untergruppen C_0, für die $\underline{C}/C_0$ keine beliebig kleinen nichttrivialen Untergruppen enthält und deren Durchschnitt gleich $\{1\}$ ist; $\underline{C}$ ist der projektive Limes der Gruppen $\underline{C}/C_0$ (vgl. [19], [25], S. 110, S. 88).

$\mathfrak{H}$ sei die Menge aller in $K\cap\varrho^{-1}\big(g(R)\big)$ abgeschlossenen Unterhalbgruppen H, zu denen es ein C_0 aus der Filterbasis $\mathfrak{F}$ gibt, so daß HC_0/C_0 eine Einparameterhalbgruppe (d.h. also ein stetiges algebraisch homomorphes Bild von R) in $\underline{K}/C_0$ ist, die nicht ganz in $\underline{C}/C_0$ enthalten ist. $\mathfrak{H}$ ist sicher nicht leer, vielmehr enthält $\mathfrak{H}$ zu jedem C_0 aus $\mathfrak{F}$ wenigstens ein H mit diesen Eigenschaften, wie in der vorausgehenden Nummer gezeigt wurde. Jedem $H\in\mathfrak{H}$ ordnen wir die Menge $\mathfrak{F}(H)$ aller der $C_0\in\mathfrak{F}$ zu, für welche HC_0/C_0 eine Einparameterhalbgruppe in $\underline{K}/C_0$, aber nicht in $\underline{C}/C_0$ darstellt. In der Menge $\mathfrak{H}$ erklären wir

Ordnungsrelation, indem wir für zwei Elemente H und H' aus $\mathfrak{H}$ genau dann $H<H'$ setzen, wenn sowohl $\mathfrak{F}(H)\subseteq\mathfrak{F}(H')$, als auch $H'\subseteq H$ gilt. Wir zeigen, daß $\mathfrak{H}$ bezüglich $<$ induktiv ist: Liegt eine $<$-Kette (d.h. ein bezüglich $<$ vollständig geordnetes Teilsystem) $(H_i: i\in L)$ in $\mathfrak{H}$ vor, so ist $H_0=\cap\{H_i: i\in L\}$ ein Element aus $\mathfrak{H}$ und eine obere Schranke für die Kette: Da die $C_0\in\mathfrak{F}$ kompakt sind, ist $HC_0\cap C$ für jedes $C_0\in\mathfrak{F}(H)$ kompakt, weil es in C_0 enthalten ist. Dann ist auch $\varrho^{-1}(g(r))\cap HC_0$ als stetiges Bild von $HC_0\cap\underline{C}$ bei der Abbildung $c\to cx$ mit $x\in\varrho^{-1}(g(r))\cap HC_0$ kompakt. Ist nun H ein bestimmtes Element aus der Kette $(H_i: i\in L)$, so sind für alle H_i mit $H<H_i$ die Mengen $H_i\cap\varrho^{-1}(g(r))$ kompakte Teilräume von $HC_0\cap\varrho^{-1}(g(r))$, $C_0\in\mathfrak{F}(H)$. Dann ist aber der Durchschnitt dieser Räume nicht leer, d.h. es gilt $H_0\cap HC_0\varrho^{-1}(g(r))\neq\emptyset$ für alle $r\in R$. Dann aber ist z.B. mit demselben $C_0\in\mathfrak{F}$ die Beziehung $H_0C_0/C_0=HC_0/C_0$ erfüllt; daher liegt H_0 in $\mathfrak{H}$. Da H_0 der Durchschnitt aller Kettenglieder H_i ist und sicher $\mathfrak{F}(H_0)\subseteq\cup\{\mathfrak{F}(H_i): i\in L\}$ gilt, ist H_0 tatsächlich eine obere Schranke der Kette. Nach dem Zornschen Lemma existieren Elemente in $\mathfrak{H}$, die bezüglich $<$ maximal sind; es sei H ein solches. Wir setzen $C_1=\cap\{C_0: C_0\in\mathfrak{F}(H)\}$; dann ist HC_1/C_1 eine Einparameterhalbgruppe; dies folgt aus der Tatsache, daß für jedes $r\in R$ die Menge $HC_1\cap\varrho^{-1}(g(r))$ modulo C_1 nur aus einem Punkt besteht; zum Beweis beachten wir, daß es ein $x\in H\cap\varrho^{-1}(g(r))$ derart gibt, daß für alle C_0 aus $\mathfrak{F}(H)$ stets $HC_0\cap\varrho^{-1}(g(r))=xC_0$ ist, denn HC_0/C_0 ist eine Einparameterhalbgruppe mit der Eigenschaft, daß genau eine Klasse modulo C_0 aus ihr bei ϱ auf $g(r)$ abgebildet wird (3.17). Dann ist $HC_1\cap\varrho^{-1}(g(r))$ in dem Durchschnitt $\cap\{xC_0: C_0\in\mathfrak{F}(H)\}$ enthalten, der die Berührmenge der Filterbasis der endlichen Durchschnitte der kompakten Teilräume xC_0 ist. Diese ist aber dann das Produkt von x mit der Berührmenge der Filterbasis, die von $\mathfrak{F}(H)$ erzeugt wird und ist daher gleich xC_1. Daß HC_1/C_1 wirklich eine stetige Einparameterhalbgruppe ist, folgt aus der Abgeschlossenheit von H in $\varrho^{-1}(g(R))$ und der von HC_1/C_1 in $\varrho^{-1}(g(R))/C_1$, sowie aus der Tatsache, daß für jedes $r\in R$ genau eine Klasse modulo C_1 aus HC_1 bei ϱ auf $g(r)$ abgebildet wird. Wenn jetzt noch gezeigt werden kann, daß C_1 nur das Element 1 enthält, ist die Behauptung des Satzes bewiesen, und zwar liefert dann bei geeigneter Parameternormierung der stetige algebraische Homomorphismus von R auf $HC_1/C_1=H$ gerade die in der Behauptung verlangte Abbildung h. Nun sei im Gegensatz zu der eben behaupteten Eigenschaft C_1 echt größer als $\{1\}$; dann existiert ein $C_2\in\mathfrak{H}$ derart, daß $\underline{C}/C_2$ keine beliebig kleinen Untergruppen enthält, und daß C_1 nicht in C_2 enthalten ist. Dann enthält HC_2/C_2 eine Einparameterhalbgruppe H_0C_2/C_2, $H_0<H$, die in HC_2/C_2 echt enthalten ist, denn C_2 liegt nicht in $\mathfrak{F}(H)$; in der Halbgruppe $\underline{K}/C_2$ ist nach (3.17) eine lokal offene Unterhalbgruppe enthalten, die lokal dem direkten Produkt $(\underline{C}/C_2)'\times R$ isomorph ist, wenn $(\underline{C}/C_2)'$ die Zusammenhangskomponente von C_2/C_2 in $\underline{C}/C_2$ bezeichnet; der Durchschnitt dieser Unterhalbgruppe mit HC_2/C_2 ist sicher nicht trivial, da sie in $\underline{K}/C_2$ offen ist; HC_2/C_2 ist lokalisomorph zu einer angularen Unterhalbgruppe von $(\underline{C}/C_2)'\times R$; sie enthält dann sicher eine Einparameterhalbgruppe H_0C_2/C_2, die nicht in $(\underline{C}/C_2)'$ enthalten ist, wenn wir noch die folgende Hilfsbemerkung bewiesen haben: *Ist T^n eine*

n-dimensionale Torusgruppe, R die Halbgruppe aller nicht negativen reellen Zahlen bezüglich der Addition und ist L eine abgeschlossene Unterhalbgruppe von $T^n \times R$, die mit allen Teilräumen $T^n \times \{r\}$, $r \in R$ nichttrivialen Durchschnitt hat, so enthält L eine Einparameterhalbgruppe E, die sich eineindeutig auf den Faktor $\langle 1 \rangle \times R$ projizieren läßt. Zum Beweis suchen wir eine Teilfolge M der Folge N der natürlichen Zahlen derart, daß erstens eine Folge $(c_i : i \in M)$ auf T^n so existiert, daß $\big((c_i, 1/i!) : i \in M\big)$ auf L gegen $(1, 0)$ konvergiert, und daß für alle rationalen Zahlen r aus R mit $r = n_i/i!$ der Grenzwert $\lim_M (c_i^{n_i}, n_i/i!) = c(r)$ existiert; dies ist möglich weil $L \cap \big(T^n \times \{1/i!\}\big)$ nicht leer und kompakt und weil $L \cap \big(T^n \times \{0\}\big)$ eine kompakte Liegruppe ist. Es ist sofort zu sehen, daß $r \to c(r)$ ein nichttrivialer algebraischer Homomorphismus der Unterhalbgruppe G aller Rationalzahlen in R in L ist. Die Einpunktkompaktifizierung von $c(G)$ ist eine kompakte fasttopologische Unterhalbgruppe der Einpunktkompaktifizierung von L, in der eine submonogene Halbgruppe dicht ist, und die die Voraussetzungen von (3.17, b) erfüllt. Also enthält sie nach dem dort Bewiesenen eine Einparameterhalbgruppe, die das Verlangte leistet.

Man vergleiche zu dieser Bemerkung verschiedene Argumentationen in [12], S. 265 ff. insbesondere Th. 8.7.1. Ferner sei in diesem Zusammenhang auch auf [26] verwiesen, wo die angularen Halbgruppen von lokalkompakten abelschen Gruppen bestimmt werden. Im Satz III dieser Arbeit wurde gezeigt, daß jede in der induzierten Topologie lokalkompakte Unterhalbgruppe einer kompakten Gruppe eine offene und kompakte Untergruppe ist. In dieser Behauptung ist das Wort „offen" zu streichen, denn in der Torusgruppe T^2 ist die Untergruppe T nicht offen.

Da nun für $C_0 \in \mathfrak{F}(H)$ stets $H_0 C_0/C_0$ in HC_0/C_0, aber nicht in C_0/C_0 enthalten und HC_0/C_0 eine Einparameterhalbgruppe ist, muß $H_0 C_0/C_0 = HC_0/C_0$ gelten, d.h. $H_0 C_0/C_0$ ist eine Einparameterhalbgruppe. Demnach gilt $\mathfrak{F}(H) \subseteqq \mathfrak{F}(H_0)$ und wegen $C_2 \notin \mathfrak{F}(H)$ entfällt die Gleichheit. Somit gilt $H < H_0$. Dies ist aber unverträglich mit der Maximalität von H.

(3.19) *Es gibt eine kompakte zusammenhängende topologische Halbgruppe K mit einer dichten submonogenen Unterhalbgruppe $j(G)$, für die $C = K$ ist.*

(Dieses Beispiel wurde von K. ZELLER vorgeschlagen.)

Beweis. K sei die eindimensionale Torusgruppe aller reellen Zahlen modulo 1. Es sei $(d_i : i \in N)$ eine Folge dyadischer positiver Rationalzahlen $d_i = m_i/2^{n_i}$, $m_i, n_i \in N$ in der jede positive dyadische Rationalzahl $m/2^n$ unendlich oft vorkommt. Ist $\bar{q}$ eine beliebige reelle Zahl, so bezeichnen wir im folgenden mit $\bar{q}$ ihre Restklasse modulo 1. Wir definieren nun eine zeilenfinite Matrix $(\bar{q}_{ij})_{i,j \in N}$ dyadischer Rationalzahlen modulo 1; mit $j(i)$ werde der kleinste Index bezeichnet, so daß $q_{ik} = 0$ für $k > j(i)$ gilt. Die definierenden Rekursionsvorschriften zur Bildung der Matrix lauten folgendermaßen:

a) $q_{11} = m_1$ (d.h. $\bar{q}_{11} = \bar{1}$).

b) $q_{ij+1} = \frac{1}{2} q_{ij}$ (d.h. $2\bar{q}_{ij} = \bar{q}_{ij+1}$) für $j < j(i)$; dabei ist $j(i)$ so bestimmt, daß $q_{ij(i)} < 1/i$ und $j(i) > n_i$ gilt, wo $d_i = m_i/2^{n_i}$ ist.

c) Für $i>1$ gelte $q_{i1}=m_i+\frac{1}{2}q_{i-1,j(i-1)}$ (daraus folgt $2\bar{q}_{i1}=\bar{q}_{i-1,j(i-1)}$).

Ist nun $\bar{d}$ eine beliebige Rationalzahl modulo 1 und U eine zusammenhängende offene Umgebung $\bar{d}$ derart, daß die Komponenten des Urbildes in der einfach zusammenhängenden Überlagerungsgruppe R' die Länge ε haben. Dann suchen wir ein $d_i=m_i/2^{n_i}$ mit $1/i-1<\varepsilon$. Das Matrixelement $q_{in_i}=m_i/2^{n_i}+q_{ij(i)}/2^{n_i}$ liegt dann modulo 1 sicher in U. Die Folge der Quadratwurzeln von $\bar{1}$, die durch die Elemente $\bar{q}_{ij}$ gebildet sind, liegen in der Untergruppe $Z(2)^\infty$ von K und damit in K dicht. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Dieses Beispiel läßt sich auf analoge Weise statt mit $Z(2^\infty)$ mit jeder Gruppe $Z(p^\infty)$ für jede Primzahl p und durch eine leichte Verallgemeinerung für ein abzählbares direktes Produkt $\Pi\{Z(p_i^\infty)\colon p_1<p_2<\cdots\}$ durchführen, das man sich in eine Torusgruppe abzählbarer Dimension dicht eingebettet denken kann. An die Stelle der eindimensionalen Torusgruppe in dem oben durchgeführten Beispiel kann also jede beliebige Torusgruppe mit nicht überabzählbarer Dimension treten.

Für den Fall $C=K$ gilt der folgende Satz, den man, wie Beispiele dartun, von denen wir eines anführen, nicht mehr verschärfen kann:

(3.20) *Ist K eine fasttopologische kompakte Halbgruppe mit einer dichten submonogenen Unterhalbgruppe $f(G)$, und gilt $C=K$, so ist die Zusammenhangskomponente $\underline{C}'$ von 1 in $\underline{C}=\underline{K}$ kompakt; $\underline{C}/\underline{C}'$ ist eine total unzusammenhängende Gruppe mit einer Umgebungsbasis von kompakten und offenen Untergruppen U für das Neutralelement 1, so daß $(\underline{C}/\underline{C}')/U$ eine Torsionsgruppe ist, die zu einer Untergruppe der additiven Gruppe aller rationalen Zahlen modulo 1 mit der diskreten Topologie isomorph ist. Ist G scharf submonogen zum Teiler q, so ist diese Gruppe monogen und $\underline{C}/\underline{C}'$ ist ein projektiver Limes monogener endlicher Gruppen mit zu q primer Ordnung, und $\underline{C}$ ist kompakt.*

Beweis. Der algebraische Homomorphismus f von G in die Gruppe $\underline{C}$ läßt sich zu einem algebraischen Homomorphismus f von G' in $\underline{C}$ fortsetzen. $\underline{C}'$ kann keine zu einer Vektorgruppe R^n, $n>0$ isomorphe Untergruppe enthalten (3.16) und ist daher kompakt. Nach dem Prinzip des homomorphen Bildes betrachten wir weiterhin $\underline{C}$ als total unzusammenhängend. Es gibt dann beliebig kleine offene und kompakte Untergruppen U, so daß also die Faktorgruppe $\underline{C}/U$ immer diskret ist. Jetzt sei $\underline{C}$ also sogar diskret. Daher ist $\underline{C}=f(G')$. Nun kann f nicht eineindeutig sein, denn in diesem Fall wäre $\underline{C}=\cap\{\overline{f((0,r)\cap G)}\colon 0<r\}$ leer. Es gibt also einen algebraischen Homomorphismus f_0 von G' auf eine submonogene Untergruppe G'' der Gruppe T aller reellen Zahlen modulo 1, die der Faktorgruppe von G' nach einer monogenen Untergruppe isomorph ist, und es gibt ferner einen algebraischen Homomorphismus f_1 von G'' auf $\underline{C}$. Es gibt nun zwei Mengen P und P' von Primzahlen, von denen jede eine Primzahl höchstens einmal enthält und die leeren Durchschnitt haben, so daß G'' das direkte algebraische Produkt Prüferscher Gruppen $Z(p^\infty)$, $p\in P$ und monogener Gruppen $Z(p^{n_p})$, $p\in P'$ von Primzahlpotenzordnung ist. Das direkte Produkt ist eindeutig bestimmt, die Faktoren sind

charakteristisch. Ist G scharf submonogen und von $(1/q^i : i \in N)$ erzeugt, so ist $P = \{q\}$, d.h. G'' enthält nur eine Prüfersche Untergruppe, und P' ist endlich; denn ist der Kern von f_0 von r erzeugt, so ist $\{Z(p^{n_p}) : p \in P'\}$ isomorph zu der Faktorgruppe $\langle 1\rangle/\langle r\rangle$. Infolge der Eindeutigkeit der Produktzerlegung für G'' gibt es eine Teilmenge P_1 von P und eine Teilmenge P_1' von P' derart, daß $f_1(G'') = \underline{C}$ dem direkten Produkt der Prüferschen Gruppen $Z(p^\infty)$, $p \in P_1$ und der monogenen Gruppen $Z(p^{m_p})$, $p \in P_1'$, $m_p | n_p$ isomorph ist. Der erste Teil der Behauptung, der beliebige submonogene Halbgruppen G betrifft, ist damit schon bewiesen. Es steht aber darüber hinaus fest, daß P_1 in P echt enthalten ist. Dies folgt daraus, daß für jede Nullfolge $(r_i : i \in N)$ auf G, für die die Folge $f_1(f_0(r_i))$ gegen ein Element c konvergiert, ein $j \in N$ vorhanden ist, so daß für alle $i > j$ stets $f_1(f_0(r_i)) = c$ ist, da doch $\underline{C} = \underline{K}$ diskret ist. Dies ist nur dann möglich, wenn der Kern von $f = f_1 \circ f_0$ auf G' in der Intervalltopologie nicht diskret, also nicht monogen ist, da anderenfalls f alle Elemente in einem hinreichend kleinen Intervall um 0 in G' eineindeutig abbilden müßte, was gerade eben widerlegt wurde. Ist nun G scharf submonogen, so ist $P_1 = \emptyset$, da P nur eine Primzahl enthält. Also ist $\underline{C}$ eine endliche monogene Gruppe, die algebraisch dem direkten Produkt $\{Z(p^{m_p}) : p \in P_1'\}$ isomorph ist. Kehren wir nun wieder zum allgemeinsten Fall zurück, so ist, falls G scharf submonogen vorausgesetzt wird, für alle offenen und kompakten Untergruppen UC'/C' von $\underline{C}/C'$ die Faktorgruppe endlich monogen mit zu q primer Ordnung; das bedeutet aber gerade, daß $\underline{C}/C'$ kompakt und projektiver Limes endlicher monogener Gruppen ist. Aus der Kompaktheit von $\underline{C}/C'$ und der Kompaktheit von C' folgt dann diejenige von $\underline{C}$ selbst. Den Inhalt des Satzes (3.20) erläutern wir an einem Beispiel:

G_q' bezeichne die von $(1/q^i : i \in N)$ mit einer natürlichen Zahl q erzeugte submonogene Untergruppe von R'. Die abgeschlossene Hülle dieser additiven rationalen Gruppe in dem vollständigen p-adischen Körper über dem Körper der rationalen Zahlen sei mit K bezeichnet. Ist $(p, q) = 1$, so ist jedes Element von K Grenzwert einer Folge $(r_i : i \in N)$ auf G_q' in der p-adischen Topologie, die bezüglich der Intervalltopologie gegen 0 konvergiert. Zum Beweis der Behauptung setzen wir $C = \bigcap \{\overline{(0, r) \cap G_q'} : 0 < r\}$. Da wegen $(p, q) = 1$ die Gruppe G_q' ganz im Bewertungsideal des vollständigen rational-p-adischen Körpers enthalten ist, welches in der p-adischen Topologie kompakt ist, ist auch $K = \underline{K}$ eine kompakte topologische Gruppe, und $\underline{C} = C$ ist eine kompakte topologische Untergruppe. Ist s ein beliebiges Element aus G_q', so gilt $sC \subseteqq \bigcap \{s\overline{(0, r) \cap G_q'} : 0 < r\} \subseteqq \bigcap \{\overline{(0, rs) \cap G_q'} : 0 < r\} = C$. C ist also ein Unterring von K in dem p-adischen Körper, der jedenfalls dann ganz G_q' enthält, wenn $1 \in C$; da G_q' in K dicht ist, haben wir dann $C = K$, womit die Behauptung bewiesen wäre. Nun gibt es zu jeder natürlichen Zahl i eine natürliche Zahl $n_i > i$ derart, daß $q^{n_i} \equiv 1 \ (p^i)$, denn wegen $(q, p) = 1$ gehört q zu der endlichen multiplikativen Gruppe der zu p^i primen Restklassen. Die Folge $(1/q^{n_i} : i \in N)$ konvergiert wegen $1 - 1/q^{n_i} = \frac{q^{n_i} - 1}{q^{n_i}} \equiv 0 \ (p^i)$ p-adisch gegen 1, und gegen 0 in

der Intervalltopologie. Also liegt 1 in der Tat in C, was zu zeigen war. Derselbe Beweis zeigt auch, daß in dem vollständigen rational-p-adischen Körper selbst jedes Element p-adischer Grenzwert einer rationalen Nullfolge in der Ordnungstopologie auf dem rationalen Körper ist.

Nun sei T die eindimensionale Torusgruppe, und f' ein algebraischer Homomorphismus von G_2' in T, für den die Folge $\left(f'(2^{-i}): i \in N\right)$ in T dicht ist; ein solcher Homomorphismus existiert nach (3.19). Den algebraischen Homomorphismus f von G_2' in die kompakte topologische Gruppe $T \times K$ (etwa mit $p=3$) definieren wir durch $f(r)=\left(f'(r), r\right)$; da nun $T \times \langle 0\rangle$ zu C gehört (wobei jetzt C zu f gebildet ist) und die Projektion von C auf den Faktor K nach dem vorhergehenden ganz K enthält, ist $C=T \times K$.

(3.21) *K sei eine kompakte fasttopologische Halbgruppe mit einer dichten submonogenen Unterhalbgruppe $f(G)$; es sei $\underline{C} \neq \emptyset$, $\underline{C} \neq \underline{K}$, und h sei ein stetiger algebraischer Homomorphismus von R in $\underline{K}$, für den $g(r)=\varrho\left(h(r)\right)=\varrho\left(f(r)\right)$ für alle $r \in G$ gilt; die Existenz eines solchen algebraischen Homomorphismus ist durch* (3.18) *gesichert. Die Abbildung $r \to C(r)$ von R in die Menge aller abgeschlossenen Untergruppen von $\underline{C}$ sei definiert wie in* (3.15). *Auf dem direkten Produkt $h(R) \times \underline{C}$ definieren wir eine Äquivalenzrelation σ:*

$\left(h(r_1), c_1\right)$ σ $\left(h(r_2), c_2\right)$ gelte dann und nur dann, wenn $h(r_1)=h(r_2)$ und $c_1 c_2^{-1} \in C(r_1)$ ist.

σ ist eine Kongruenzrelation und $\left(h(R) \times \underline{C}\right)/\sigma$ ist isomorph zu $\varrho^{-1}\left(g(R)\right)$.

Wir setzen $j_3=\begin{cases}\inf\{r:\ r \in R,\ h(r) \in D\}, & \text{falls } h(R) \cap D \neq \emptyset. \\ \infty, & \text{falls } h(R) \cap D = \emptyset.\end{cases}$ *Die Abbildung $r \to C(r)$ ist auf $[j_3, \infty)$ konstant, d.h. es gilt $C(r)=C(j_3)$ für alle $r \geqq j_3$; insbesondere ist $\varrho^{-1}\left(g([j_3, \infty))\right)$ isomorph zu dem direkten Produkt $h\left([j_3, \infty)\right) \times \underline{C}/C(j_3)$. Es sind folgende Fälle denkbar:*

a) $D=A$.

b) $D \neq A$, $j_3=\infty$.

c) $D \neq A$, $j_3 \neq \infty$.

In den Fällen a) *und* b) *ist h Isomorphismus; in den Fällen* b) *und* c) *ist $\varrho(D)$ eine zusammenhängende und kompakte abelsche Gruppe, in der eine Einparametergruppe dicht ist.*

Beweis. Ist $j_3<\infty$, so liegt $\underline{C}h(j_3)$ in $\underline{D}$: Ist nämlich $c=\lim f(r_i)$ mit $\lim r_i=0$, $r_i \in G$ ein beliebiges Element aus $\underline{C}$, und gilt $x=\lim f(r_i') \in \underline{D}$ mit einer unbeschränkten Folge $(r_i': i \in N)$, so gilt $xc=\lim f(r_i)\, f(r_i')=\lim f(r_i+r_i')$ mit einer unbeschränkten Folge $(r_i+r_i': i \in N)$; also gehört xc zu $\underline{D}$, was mit $x=h(j_3)$ behauptet war. Ist $r>j_3$ ein beliebiges Element aus R oberhalb j_3 und ist $c \in C(r)$, so gilt auch $c \in C(j_3)$; denn gilt $xc=x$ für alle $x \in \varrho^{-1}\left(g(r)\right)$, so existiert zu jedem solchen x, das nach dem eben Gezeigten in der Gruppe $\underline{D}$ liegt, ein $y \in \underline{D}$, mit dem $xy=h(j_3)$ gilt; dann ist $xyc=h(j_3)c=xy=h(d)$;

daraus folgt aber $c \in C(j_3)$. Damit ist die Konstanz von $C(r)$ auf $[j_3, \infty)$ nachgewiesen.

Daß σ eine Kongruenzrelation darstellt, ist sofort zu sehen. Die stetige algebraisch homomorphe Abbildung $(h(r), c) \to h(r)c$ von $h(R) \times C$ in $\varrho^{-1}(g(R))$ läßt sich zerlegen in den Homomorphismus σ: $(h(r), c) \to \sigma(h(r), c)$ von $h(R) \times C$ auf den Quotientenraum $(h(R) \times \underset{\sim}{C})/\sigma$ und den algebraischen Isomorphismus p: $(h(r), c) \to h(r)c$, der auf Grund einer wichtigen Eigenschaft der Quotiententopologie stetig ist (vgl. z.B. [1]).

Um zu zeigen, daß p ein Isomorphismus ist, haben wir die Offenheit von p nachzuweisen, oder, was dazu ausreichend ist, diejenige von $(h(r), c) \to h(r)c$. Jeder Punkt $(h(r), c)$ aus $h(R) \times \underset{\sim}{C}$ hat eine Umgebung der Form $h((r_1, r_2)) \times c\, V\, C(r)$, wo $r_1 < r < r_2$ und V eine kompakte Umgebung von 1 in $\underset{\sim}{C}$ ist. Wäre $h((r_1, r_2))\, c\, V\, C(r)$ keine Umgebung von $h(r)c$ in $h(R)\,\underset{\sim}{C}$, so gäbe es ein Netz $(h(s_i)\, c_i : i \in L)$, das auf $\varrho^{-1}(g((r_1, r_2)))$ gegen $h(r)c$ konvergieren würde, ohne $h((r_1, r_2))\, c\, V\, C(r)$ zu treffen. Infolge der Stetigkeit von h gilt $\lim_L h(s_i) = h(r)$; da K kompakt und fasttopologisch ist, können wir $\lim_L c_i = c_i \in \underset{\sim}{C}$ annehmen; es folgt dann $c'c^{-1} \in C(r)$ und für alle hinreichend großen $i \in L$ wäre c_i in der Umgebung $Vc(c'c^{-1})$ von c' enthalten. Dann ist aber auch für alle hinreichend großen $i \in L$ alle Netzelemente $h(s_i)\, c_i$ in $h((r_1, r_2))\, c\, V\, C(r)$ enthalten im Widerspruch zur Annahme.

g ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $j_3 = \infty$. Nach dem allerersten Beweisschritt ist diese Bedingung notwendig, denn ist g ein Isomorphismus, dann auch h; ist e das Neutralelement von $\underset{\sim}{D}$, so ist h': $r \to eh(r)$ ein Homomorphismus von R in D, der sich zu einem Homomorphismus von R' in D fortsetzen läßt. Ist $h(R) \cap \underset{\sim}{D} \neq \emptyset$, dann gilt $\underset{\sim}{D} = \overline{h([j_3, \infty))\,\underset{\sim}{C}}$, denn einerseits gilt $h([j_3, \infty))\,\underset{\sim}{C} \subseteq \underset{\sim}{D}$, aber andererseits enthält $\overline{h([j_3, \infty))\,\underset{\sim}{C}}$ die Teilmenge $f([j_3, \infty))$ und damit $\underset{\sim}{D}$. Dies ist aber unverträglich mit der Isomorphie von h, da dann $h'(R')$ als isomorphes Bild von R' in der Gruppe $\underset{\sim}{D}$ abgeschlossen und $h([j_3, \infty))\,\underset{\sim}{C}$ dem direkten Produkt $h([j_3, \infty)) \times \underset{\sim}{C}/C(j_3)$ isomorph ist, kann dieses Produkt nicht in $h'(R')\,\underset{\sim}{C}$ dicht sein; denn eine zu R' algebraisch stetig isomorphe Einparametergruppe ist entweder isomorph zu R' oder in einer kompakten Gruppe dicht.

Ist umgekehrt $j_3 = \infty$, so ist $h(R)$ ein isomorphes Bild von R, denn das Bild eines jeden beschränkten offenen Intervalls U auf $R \setminus \{0\}$ ist eine Umgebung eines jeden seiner Bildpunkte in $h(R)$, weil es anderenfalls unbeschränkte Folgen $(r_i : i \in N)$ auf R geben müßte, deren Bild gegen einen Punkt des Bildes von U konvergieren müßte, was durch $j_3 = \infty$ gerade ausgeschlossen ist. Mit $h(R)$ ist aber auch $g(R)$ ein isomorphes Bild von R.

Ist $j_1 < \infty$, so ist, wie schon gezeigt, $\overline{h'(R')}$ eine kompakte, zusammenhängende abelsche Gruppe, und das Produkt dieser kompakten Untergruppe mit der abgeschlossenen Untergruppe $e\,\underset{\sim}{C}$ ist abgeschlossen in $\underset{\sim}{D}$ und stimmt daher mit $\underset{\sim}{D}$ überein. Wenn C kompakt und zusammenhängend ist, ist auch $\underset{\sim}{D}$ kompakt und zusammenhängend; $\varrho(R) = \underset{\sim}{D}/e\,\underset{\sim}{C}$ ist kompakt und zusammenhängend.

Nun sei $\underline{D} \neq \emptyset$, aber $j_3 = \infty$; dann ist $\varrho(h(R)) = g(R)$ isomorphes Bild von R und $\varrho(h'(R'))$ ist dicht in $\varrho(\underline{D}) = \underline{D}/\underline{C}e$. Nach Definition von $\underline{D}$ gibt es eine unbeschränkte Folge $(r_i: i \in N)$ aus R und einen Punkt $d \in \underline{D}$ derart, daß $\varrho(d) = \lim g(r_i)$; dann ist aber auch $\varrho(d) = \lim \varrho(e)\, g(r_i) = \lim \varrho(h'(r_i))$; dann ist $\varrho \circ h'$ aber kein Isomorphismus von R' und $\varrho(\underline{D}) = \underline{D}/\underline{C}e$ ist eine kompakte Gruppe. Dann ist aber auch h' sicher kein Isomorphismus von R' in $\underline{D}$, denn die Zusammenhangskomponente des Neutralelementes im Kern $\underline{C}e$ des Homomorphismus ϱ von $\underline{D}$ auf $\underline{D}/\underline{C}e$ ist kompakt.

(3.22) *Die Fälle* a), b), c) *aus der vorigen Nummer treten allesamt auch wirklich auf.*

Beweis. Für a) ist dies trivial; für c) ist ein Beispiel sofort anzugeben: [Vgl. hierzu (1.14), (2.6), (2.7).] Es sei h' ein stetiger algebraischer Isomorphismus von R auf eine dichte Unterhalbgruppe einer kompakten und zusammenhängenden topologischen Gruppe $\underline{D}$. Auf dem Vereinigungsraum $[0, 1) \cup \underline{D}$ definieren wir eine Topologie, indem wir einen Punkt $x \in \underline{D}$ als Basis für den Filter seiner Umgebungen seinen Umgebungsfilter in $\underline{D}$ zu ordnen, sofern nicht $x = h'(1)$ ist; in diesem Fall sollen die Mengen $(r, 1) \cup U$ eine Basis für die Umgebungen von x bilden, wobei $0 \leqq r < 1$ gilt und U die Umgebungen von x in $\underline{D}$ durchläuft. Auf $[0, 1)$ wird wie auf $\underline{D}$ die dort als Intervalltopologie gegebene Topologie betrachtet. Der kompakte topologische Raum $[0, 1) \cup \underline{D}$ wird zu einer topologischen Halbgruppe, wenn die auf $[0, 1) \cup h'(R)$ durch

$$x \circ y = \begin{cases} x\,y; \text{ wenn } x, y \in \underline{D} \\ x + y, \text{ wenn } x, y \text{ und } x + y \in [0, 1) \\ h'(x + y), \text{ wenn } x, y \in [0, 1),\ x + y \in [0, 1) \\ h'(x)\, y, \text{ wenn } x \in [0, 1) \text{ und } y \in \underline{D} \end{cases}$$

definierte assoziative und stetige Verknüpfung durch Stetigkeit auf $[0, 1) \cup \underline{D}$ fortgesetzt wird.

Nun sei wieder h' ein stetiger algebraischer Homomorphismus von R auf eine dichte Unterhalbgruppe einer kompakten Gruppe $\underline{D}$. Zu jedem Punkt $x \in \overline{h'(R)} = D$ gibt es eine Basis von Umgebungen U mit der Eigenschaft, daß $h'^{-1}(h'(R) \cup U)$ aus unendlich vielen beschränkten Intervallen besteht; diese bezeichnen wir mit $V(U, i)$, $i \in N$. Auf der Vereinigungsmenge $R \cup D$ definieren wir eine Topologie, indem wir allen Punkten, die nicht auf $h'(R)$ liegen, als Basis für den Filter ihrer Umgebungen ihren Umgebungsfilter in R bzw. $\underline{D}$ zuordnen, und einem Punkt $x \in \overline{h'(R)} = D$ als Umgebungsbasis die Menge der Mengen $\{U \cup V(U, i)$: Es gibt eine endliche Teilmenge F von N, so daß $i \in N \setminus F\}$, wobei die oben beschriebene Umgebungsbasis von x durchläuft und F die Menge aller endlichen Teilmengen von N. Mit der so definierten Topologie ist $R \cup \underline{D}$ eine zusammenhängende, kompakte Halbgruppe, wenn

als Verknüpfung

$$x \circ y = \begin{cases} xy, & \text{wenn } x, y \in D \\ x + y, & \text{wenn } x, y \in R \\ x h'(y), & \text{wenn } x \in \underline{D},\ y \in R \end{cases}$$

festgesetzt wird. Auf eine genauere Beschreibung des skizzierten Gedankenganges verzichten wir.

Unsere bisherigen Bemühungen galten fast ausschließlich dem Fall, daß $\underline{C}$ nicht leer ist. Nun wenden wir uns dem Fall zu, daß $\underline{C}$ keine Elemente enthält.

(3.23) *K sei eine kompakte, eigentlich fasttopologische Halbgruppe mit einer dichten submonogenen Unterhalbgruppe $f(G)$. Es sei $C=\{a\}$ und $D \cap f(G)=\emptyset$. Dann ist $\underline{K}$ diskret.*

Beweis. Wenn $\underline{K}$ nichtdiskret ist, dann gibt es ein $r \in G$ und eine nicht konstante Folge $(r_i : i \in N)$ auf G derart, daß $f(r)=\lim f(r_i)$ gilt, ohne daß die Folge $(r_i : i \in N)$ ein konstantes Endstück oder auch eine konstante Teilfolge hätte: Wegen $C=\{a\}$ und $D \cap f(G)=\emptyset$ enthält $(r_i : i \in N)$ keine Nullfolge und ist beschränkt; sie liegt etwa in dem Intervall $[s, t]$ mit $0<s$. Es gibt dann eine Teilfolge, die gegen $v \in [s, t]$ konvergiert. Es sei also o.B.d.A. $\lim r_i = v \in R$ in der Intervalltopologie. Nun wählen wir Teilfolgen $(r_{j_i} : i \in N)$ und $(r_{k_i} : i \in N)$ mit $r_{j_i} < r_{k_i}$; wegen $\lim r_{j_i} = v$ konvergiert die Folge der $s_i = r_{k_i} - r_{j_i}$ bezüglich der Intervalltopologie gegen 0. Es gilt $f(r_{k_i}) = f(r_{j_i}) f(s_i)$. Da aber $\lim f(r_{k_i}) = \lim f(r_{j_i}) = f(r) \neq \{a\}$ ist, und alle Häufungspunkte von $(f(s_i) : i \in N)$ in C liegen und demnach mit a zusammenfallen, und weil die Multiplikation $(x, y) \to xy$ allenfalls in (a, a) unstetig ist, sind wir bei einem Widerspruch angelangt. Es sei angemerkt, daß wir hier wieder in vollem Umfang die Eigenschaften einer fasttopologischen Halbgruppe ausgenützt haben, für die (a, a) auch wirklich die einzige Unstetigkeitsstelle ist. Daß für beliebige lokalkompakte topologische Halbgruppen, in denen eine submonogene Halbgruppe dicht ist, der Satz im allgemeinen nicht richtig ist, zeigt eine leichte Abwandlung eines in (3.3) gegebenen Beispiels: G sei eine submonogene Unterhalbgruppe von $R \setminus \{0\}$ auf der die gröbste Topologie betrachtet wird, die auf $(0, 1) \cap G$ die diskrete und auf $[1, \infty) \cap G$ die Intervalltopologie induziert. Dann ist G in der lokalkompakten topologischen Halbgruppe $\underline{K}=G \cup [1, \infty)$ dicht und es gilt $C=D=\{a\}$, aber $\underline{K}$ ist nicht diskret.

(3.24) *K sei eine kompakte eigentlich fasttopologische Halbgruppe mit einer dichten submonogenen Unterhalbgruppe $f(G)$. Es sei $C=\{a\}$ und f sei nicht eineindeutig, und zwar gelte mit den Bezeichnungen von* (1.6) *$j_1 \leqq j_2 < \infty$. Dann ist $\underline{K}$ diskret.*

Der Beweis des vorigen Satzes läßt sich sofort übernehmen, wenn wir zeigen können, daß auch unter den jetzigen Voraussetzungen die dort

behandelte Folge $(r_i: i \in N)$ beschränkt ist. Nun gibt es aber zu jedem $r_i > j_2$ ein $r_i' \leqq j_2$ mit $f(r_i) = f(r_i')$. Wir können daher annehmen, daß die Folge $(r_i: i \in N)$ in $[0, j_2)$ enthalten ist.

(3.25) *K sei eine kompakte eigentlich fasttopologische Halbgruppe mit einer dichten submonogenen Unterhalbgruppe $f(G)$; es sei $\underline{C} = \emptyset$, $\underline{D} \neq \emptyset$. Es gibt ein im allgemeinen nicht eindeutig bestimmtes Element $j \in R \cup \{\infty\}$, $j > 0$, derart, daß $f\big((0, j) \cap G\big)$ diskret und $f\big((j, \infty) \cap G\big)$ in $\underline{D}$ dicht ist. Bezeichnet σ diejenige Äquivalenzrelation, die die Klassen $\sigma(x) = \{x\}$ für $x \notin \underline{D}$ und $\sigma(x) = \underline{D}$ für $x \in \underline{D}$ hat, dann ist $x \to \sigma(x)$ ein Homomorphismus von $\underline{K}$ auf den Restklassenraum $\underline{K}/\sigma$, den wir auch mit $\underline{K}/\underline{D}$ bezeichnen. Das Element $\bar{e} = \sigma(\underline{D})$ ist ein Idempotent von $\underline{K}/\underline{D}$ und zwar ein Nullelement.*

Beweis. Da $\underline{D}$ ein in $\underline{K}$ abgeschlossenes Ideal ist, sind die Behauptungen über σ evident. Für alle unbeschränkt wachsenden Zahlenfolgen $(r_i: i \in N)$ gilt $\lim \sigma\big(f(r_i)\big) = \bar{e}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) $\sigma \circ f$ ist eineindeutig,

b) $\sigma \circ f$ ist nicht eineindeutig.

Im Fall a) erfüllt $\underline{K}/\underline{D}$ die Voraussetzungen von (3.23) mit $\{\bar{e}\}$ an Stelle von D. Dann ist also $\underline{K}/\underline{D} \setminus \{\bar{e}\}$ diskret; dann ist aber auch $\underline{K} \setminus \underline{D}$ diskret, denn dieser Teilraum wird von σ isomorph abgebildet. Da $f(G)$ in $\underline{K} \setminus \underline{D}$ dicht ist, da ja $f(G) \cap \underline{D} = \emptyset$ ist, ist $f(G) = \underline{K} \setminus \underline{D}$ diskret, häuft sich aber gegen D, d.h. $\overline{f(G)}$ ist nicht diskret in K, sondern enthält D. In diesem Fall ist $j \leqq \infty$.

Im Fall b) ist die Menge $\{r: r \in G, \sigma\big(f(r)\big) = \bar{e}\}$ ein Ideal in G mit der unteren Grenze j_4. Nach (3.24) ist $\underline{K}/\underline{D} \setminus \{\bar{e}\}$ diskret; daher ist $f\big((0, j_4)\big)$ diskret und D ist die Hülle von $f\big([j, \infty) \cap G\big)$. Ist $j_4 = 0$, so ist $f(G) = \underline{D}$ eine Gruppe; für alle positiven reellen Zahlen j ist dann $f\big([0, j) \cap G\big)$ diskret und $\overline{f\big((j, \infty) \cap G\big)} = \underline{D}$; es sei nämlich etwa $0 \leqq r \leqq j$ und $f(r) = \lim f(r_i)$ mit einer $[0, j)$ gelegenen Folge $(r_i: i \in N)$; o.B.d.A. können wir annehmen, daß die Folge $(r_i: i \in N)$ auf dem kompakten Intervall $[0, j)$ bezüglich der Intervalltopologie gegen einen Punkt s dieses Intervalls konvergiert, der natürlich nicht in G gelegen zu sein braucht. Wir können aus der Folge $(r_i: i \in N)$ zwei gegen s konvergente Teilfolgen $(r_{n_i}: i \in N)$ und $(r_{m_i}: i \in N)$ auswählen, für die $r_{n_i} < r_{m_i}$ gilt, denn von konstanten Folgen $(r_i: i \in N)$ können wir absehen. Wegen $\underline{C} = \emptyset$ gilt $\lim f(r_{m_i} - r_{n_i}) = a$ und weil K fasttopologisch ist, bekommen wir $f(r) = \lim f(r_{m_i}) = \lim f(r_{m_i} - r_{n_i})\, f(r_{n_i}) = a\, f(r) = a$ und dies ist ein Widerspruch.

Daß Halbgruppen von der in dieser Nummer geschilderten Bauart existieren, sieht man mit Hilfe von Konstruktionsmethoden, die den in (3.21) beschriebenen ähnlich sind. Entsprechende Konstruktionen findet man zum Teil in der Literatur (s. z.B. [*11*]); auf ausführliche Darstellung verzichten wir an dieser Stelle.

(3.26) *K sei eine kompakte, eigentlich fasttopologische Halbgruppe, in der eine submonogene Halbgruppe dicht sei. Es sei $\underline{C} = \emptyset$, $\underline{D} \neq \emptyset$, $f(G) \cap \underline{D} \neq \emptyset$. Dann*

ist entweder G monogen und $\underline{D}$ ist kompakt oder G ist nicht monogen, in welchem Fall $\underline{D}$ nicht kompakt und nicht zusammenhängend ist. Zu jeder kompakten und offenen Untergruppe U von D existiert ein Element $x_U \in G$ und eine natürliche Zahl m derart, daß $U = \overline{f(m x_U + \langle x_U \rangle)}$.

Ist G monogen, so ist die von $ef(G)$ in der lokalkompakten Gruppe $\underline{D}$ erzeugte monogene Gruppe dicht; daher ist $\underline{D}$ kompakt.

Beweis. G sei nun nicht monogen. Dann kann $\underline{D}$ nicht kompakt sein. Wäre nämlich $(r_i : i \in N)$ eine Folge unendlich vieler verschiedener Erzeugender von G, so würde die Folge $(f(r_i) : i \in N)$ wegen $C = a$ gegen a konvergieren. Wäre aber $\underline{D}$ kompakt, so würde mit dem Neutralelement e von $\underline{D}$ die in $\underline{D}$ liegende Folge $(ef(r_i) : i \in N)$ nur in $\underline{D}$ liegende Häufungspunkt haben, während diese Folge doch gegen a konvergieren müßte, da K fasttopologisch ist.

Die folgende Bemerkung ist eine Fortführung des in (3.10) für C entwickelten Prinzips der homomorphen Abbildung: Ist D_0 eine abgeschlossene Untergruppe von $\underline{D}$, so ist die Äquivalenzrelation σ_0, deren Klassen für $x \notin \underline{D}$ aus x und für $x \in \underline{D}$ aus xD_0 bestehen, eine Kongruenzrelation, und die Abbildung $x \to \sigma_0(x)$ ist ein Homomorphismus von K auf die Restklassenstruktur K/σ_0, die wir auch mit K/D_0 bezeichnen. Wir zeigen jetzt, daß $\underline{D} = \overline{f([j_4, \infty))}$ nicht zusammenhängend ist. Die lokalkompakte abelsche Gruppe $\underline{D}$ kann keine Untergruppe enthalten, die zu einer Vektorgruppe R'^n, $n > 0$ isomorph ist; dies wurde in (3.16) für $\underline{C}$ bewiesen und gilt hier gleichermaßen, da sich sonst $f([j_4, \infty) \cap G)$ als dichte Untergruppe in R'^n projizieren lassen müßte, was nicht möglich ist. Dann enthält $\underline{D}$ eine kompakte und offene Untergruppe U (s. z.B. [19], [25]).

Die Halbgruppe K/U ist wegen der Kompaktheit von U fasttopologisch mit dem Ausnahmepunkt $aU = \{a\}$, $\underline{K}/U$ ist wegen der Offenheit von U in D und wegen der Diskretheit von $f([0, j_4) \cap G)$ diskret; bezeichnet σ_U den zu U gehörigen Restklassenhomomorphismus, so ist daher $\underline{K}/U = \sigma_U(f(G))$. Zu jeder offenen und kompakten Untergruppe U von $\underline{D}$ definieren wir die Unterhalbgruppe $G_U = \{r : r \in G,\ f(r) \in U\}$ von G. Da U offen und $f(G)$ in K dicht ist, ist G_U sicher nicht leer. Da U eine Gruppe ist, läßt sich f zu einem algebraischen Homomorphismus f von der von G_U in G' erzeugten Gruppe G'_U in U fortsetzen. G'_U ist diskret bezüglich der Intervalltopologie auf R': Wäre dies nämlich nicht der Fall, dann gäbe es zu einem $r \in G'_U$ eine etwa von oben gegen r konvergente Folge $(r_i : i \in N)$ auf G_U; da U kompakt ist, können wir o.B.d.A. $u = \lim f(r_i) \in U$ annehmen. Wegen $C = a$ strebt die Folge $(f(r_i - r) : i \in N)$ gegen a und da K fasttopologisch ist, strebt dann die Folge der Elemente $f(r_i - r) f(r)$ gegen a und nicht gegen u. Entsprechendes gilt im Fall $r > 0$ für eine Folge $(r_i : i \in N)$, die von unten gegen r strebt und in G'_U liegt. G'_U ist also eine monogene Untergruppe von G', die etwa von x_U erzeugt sei, wobei wir $x_U \in G$ wählen können. Es gilt $G_U = G'_U \cap [j_4, \infty)$. Wir setzen $m = \min\{i : f(x_U) \in U\}$. Bezeichnet man die Abbildung $\sigma_U \circ f$ mit f_U, so gilt mit den Bezeichnungen von (1.6) angewandt auf f_U jeweils $m x_U = j_1$ und $(m+1) x_U = j_2$. Das Bild $f_U([r_1, r_2])$ ist die diskrete Gruppe $\underline{D}/U$. Der Teilraum $U \setminus \overline{f(G_U)}$ ist

offen in U, und da U offen ist, auch in $\underline{K}$; wäre diese Menge nicht leer, so müßte sie ein Element von $f(G)$ enthalten, da $f(G)$ in K dicht ist. Dieses Element läge dann aber in $f(G_U)$ nach der Definition von G_U. Also ist $U=\overline{f(G_U)}$, wie behauptet.

(3.27) *Es gibt eine kompakte fasttopologische Halbgruppe K, in der eine submonogene Halbgruppe $f(G)$ dicht ist, in der $\underline{C}=\emptyset$ und $D=K$ und schließlich $\underline{D}$ nicht total unzusammenhängend ist.*

Beweis. D'' sei eine submonogene Untergruppe der eindimensionalen Torusgruppe T in der diskreten Topologie mit dem Neutralelement e, also etwa eine Prüfergruppe $Z(p^\infty)$. Es gibt einen algebraischen Isomorphismus f_0 einer submonogenen Untergruppe G' von R' in das direkte Produkt $R'\times D''$, in dem auf dem Faktor R' die natürliche Intervalltopologie betrachtet wird und in welchem die Projektion von $f_0(G')$ auf den Faktor R' eine dichte submonogene, zu G' algebraisch isomorphe Untergruppe von R' und die Projektion von $f_0(G')$ auf D'' gleich D'' ist. (Man hat dazu nur eine zu R' isomorphe Untergruppe in dem Zylinder $R'\times T$ zu suchen, in die die Untergruppe $f_0(G')$ so eingebettet wird, daß sie gerade in $R'\times D''$ liegt.) Der Durchschnitt $S=f_0(G')\cap(R'\times\langle e\rangle)$ ist eine monogene Untergruppe $\langle r\rangle\times\langle e\rangle$, nämlich der Kern der Projektion von $f_0(G')$ auf $\langle 0\rangle\times D''$; wir können $r>0$ als irrationale Zahl aus R' annehmen. Nun bezeichne f_1 den Restklassenhomomorphismus von $R\times D''$ auf $\underline{K}=(R'\times D'')/(\langle 1\rangle\times\langle e\rangle)$; diese Faktorgruppe identifizieren wir mit ihrem isomorphen Bild $T\times D''$. Da $(\langle 1\rangle\times\langle e\rangle)\cap S=\langle 0\rangle\times\langle e\rangle$, also gleich dem neutralen Element ist, wird $f_0(G')$ bei f_1 algebraisch isomorph abgebildet. Die Untergruppe $f_1(\langle r\rangle\times\langle e\rangle)$ ist dicht in T. Also ist $f_1\big(f_0(G')\big)$ dicht in $T\times D''$, und dies trifft auch schon für $f_1\big(f_0(G)\big)$ zu. K ist die Einpunktkompaktifizierung von $\underline{K}$. Wir setzen $f=f_1\circ f_0$. Nun ist $T\times\langle e\rangle$ eine kompakte und offene Untergruppe U von jenem Typ, der in (3.26) beschrieben wurde; x_U ist jetzt dasjenige Element von G', welches bei f_0 auf (r, e) abgebildet wird. Für alle $j\in G$ ist $f\big((0, j)\cap G\big)$ diskret und stimmt daher mit $f\big((0, j)\cap G\big)$ überein, d. h. $\underline{C}$ ist leer.

Man vergleiche dieses Beispiel mit dem in (3.14) angegebenen. In einer und derselben fasttopologischen kompakten Halbgruppe können zwei verschiedene submonogene Halbgruppen $f^{(1)}(G^{(1)})$ und $f^{(2)}(G^{(2)})$ so dicht sein, daß einmal $\underline{C}^{(1)}\neq\emptyset$ und das andere Mal $\underline{C}^{(2)}=\emptyset$ ist.

(3.28) *Es gibt eine kompakte, echt fasttopologische Halbgruppe K mit dichter submonogener Unterhalbgruppe $f(G)$, in der $C=\emptyset$, $D=K$ und D total unzusammenhängend ist, aber nicht diskret.*

Beweis. G' sei von der Folge $(1/p^i: i\in N)$ mit einer Primzahl p erzeugte scharf submonogene Untergruppe von R', und $\underline{K}$ sei die abgeschlossene Hülle von G' in dem vollständigen p-adischen Körper über dem Körper der rationalen Zahlen. K sei die Einpunktkompaktifizierung von $\underline{K}$. Jede in der Intervalltopologie gegen 0 konvergierende Folge hat die Form $(n_i/p^{m_i}: i\in N)$ $n_i, m_i\in N$, $(m_i: i\in N)$ nicht beschränkt, $(n_i, p)=1$. Hinsichtlich der p-adischen Topologie

konvergiert die Folge aber gegen $a \notin \underline{K}$, da die Folge der p^{m_i} gegen Null strebt und alle n_i Einheiten sind und daher in einem kompakten Teilraum von $\underline{K}$ liegen. Also ist $\underline{C}$ in der Tat leer; in $\underline{K}$ ist schon G allein dicht. Da der vollständige rational-p-adische Körper total unzusammenhängend ist, ist auch $\underline{K}$ total unzusammenhängend.

Dieses Beispiel ist ein Gegenstück zu der Klasse der in (3.20) angegebenen Beispielen. Dort war $\underline{C}=\underline{K}$, hier ist $\underline{C}=\emptyset$; dort war $\underline{K}=K$ kompakt, hier ist $\underline{K}$ nicht kompakt; dort war die zu der Erzeugendenfolge gehörige Zahl q teilerfremd zu dem die Topologie erzeugenden Primelement p, hier stimmt sie mit ihm überein.

Unsere wichtigsten Ergebnisse fassen wir jetzt zusammen in dem folgenden

HAUPTSATZ

G sei eine submonogene Unterhalbgruppe der additiven Halbgruppe aller positiven reellen Zahlen [Def. (1.2)]. *K sei eine kompakte fasttopologische Halbgruppe* [Def. (3.4)] *und f ein algebraischer Homomorphismus von G in K derart, daß $f(G)$ in K dicht ist. Falls K einen Ausnahmepunkt hat, sei dieser mit a bezeichnet; $\underline{K}$ sei gleich $K \setminus \{a\}$ in diesem Fall und gleich K sonst. Wir setzen*

$$C = \bigcap \{\overline{f((0,r) \cap G)} : 0 < r\}, \qquad \underline{C} = C \cap \underline{K} \quad \text{und}$$

$$D = \bigcap \{\overline{f((r,\infty) \cap G)} : 0 < r\}, \quad \underline{D} = D \cap \underline{K} \quad (\text{Def. } (3.8)).$$

Dann sind $\underline{C}$ und $\underline{D}$ lokalkompakte topologische abelsche Gruppen, in denen die Zusammenhangskomponenten der Neutralelemente kompakt sind.

$\underline{K} \setminus \underline{C}$ ist das größte echte Unterideal von K; falls $\underline{C} \neq \emptyset$ ist das Neutralelement $1 \in \underline{C}$ ein Einselement von $\underline{K}$ und $\underline{C}$ die größte Untergruppe, die es enthält.

Es treten die folgenden Fälle auf:

a) $C = \{a\}$ *oder* $C = \emptyset$, $D = \{a\}$.

b) $C = \emptyset$, $D \neq \{a\}$.

c) $C \neq \{a\}$, $D \neq \{a\}$.

d) $C \neq \{a\}$, $D \neq \emptyset$.

In diesen verschiedenen Fällen hat $\underline{K}$ die folgende Struktur:

a) $f(G) = \underline{K}$ *und $\underline{K}$ ist diskret.*

b) *G ist monogen und sei etwa von 1 erzeugt. $\underline{D}$ ist eine kompakte abelsche Gruppe mit dem Neutralelement e, in der die von $ef(1)$ erzeugte monogene Gruppe dicht ist. (Dieser Fall ist in der Literatur eingehend untersucht: Vgl. z. B.* [11], [16].)

c) *G ist nicht monogen. $\underline{D}$ ist eine nicht kompakte und nicht zusammenhängende lokalkompakte abelsche Gruppe mit dem Neutralelement e. Wenn $f(G) \cap D = \emptyset$ gilt, dann ist f eineindeutig und $f(G)$ ist in der induzierten Topologie diskret. In allen Fällen wird jedes beschränkte Intervall $[0, j] \cap G$ bei f auf einen diskreten Teilraum abgebildet. Ist $f(G) \cap D \neq \emptyset$, so existiert zu jeder kompakten und offenen Untergruppe U von $\underline{D}$ ein wohlbestimmtes Element r_U in*

G und eine reelle Zahl j, die von U nicht abhängt, so daß $U=\overline{f([j,\infty)\cap\langle r_U\rangle)}$. Insbesondere ist die Filterbasis aller offenen und kompakten Untergruppen von $\underline{D}$ abzählbar. Beispiele für diesen Fall sind in (3.27) *und* (3.28) *angegeben.*

d) *$\underline{C}$ ist eine lokalkompakte topologische abelsche Gruppe mit dem Neutralelement* 1, *in der eine submonogene Untergruppe dicht ist. Die Zusammenhangskomponente von* 1 *ist kompakt. Ist G scharf submonogen mit dem Teiler p* [Def. (1.9)], *dann ist $\underline{C}$ sogar ganz kompakt, und ist C_0 die Zusammenhangskomponente von* 1 *in $\underline{C}=C$, dann ist C/C_0 ein projektiver Limes von endlichen monogenen Gruppen mit einer zu p teilerfremden Ordnung.*

Unterfall $C=K$. Dieser Fall kann auftreten, Beispiele dafür sind in (3.19) *und* (3.20) *angeführt.*

Unterfall $C\neq K$. Es gibt einen stetigen algebraischen Homomorphismus h von R in K, so daß $\overline{\underline{C}h(R)}=K$, $\underline{C}\cap h(G)=\langle 1\rangle$; ferner existiert eine monoton nicht fallende, von oben stetige Abbildung $r\to C(r)$ von R in die Menge aller kompakten Untergruppen von $\underline{C}$ [Def. (3.15)] *für die folgendes gilt: Auf der Produkthalbgruppe $\underline{C}\times R$ sei γ diejenige Kongruenzrelation, bezüglich der zwei Punkte (c,r) und (c',r') genau dann äquivalent sind, wenn $r'=r$ und $c'c^{-1}\in C(r)$ gilt; damit ist $(\underline{C}\times R)/\gamma$ eine topologische Halbgruppe. Der stetige algebraische Homomorphismus φ: $(c,r)\to ch(r)$ von $\underline{C}\times R$ auf $\underline{C}h(R)$ in $\underline{K}$ läßt sich in kanonischer Weise zerlegen in die Hintereinanderausführung des Restklassenhomomorphismus ψ: $(c,r)\to\gamma(c,r)$ von $\underline{C}\times R$ auf $(\underline{C}\times R)/\gamma$ und einen Homomorphismus χ: $\gamma(c,r)\to ch(r)$ von $(\underline{C}\times R)/\gamma$ auf $\underline{C}h(R)$; χ ist ein lokaler Monomorphismus in allen Punkten und im Fall $D\cap h(R)=\emptyset$ sogar ein Isomorphismus. Ist $h(R)\cap\underline{D}\neq\emptyset$, so gibt es eine kleinste Zahl j in R derart, daß $h(j)\in D$. Für alle $r,s\geqq j$ gilt dann $C(r)=C(s)$ und $\underline{C}h\big([j,\infty)\big)$ ist isomorph dem direkten Produkt $\underline{C}/C(j)\times h\big([j,\infty)\big)$; $e\underline{C}$ ist isomorph $\underline{C}/C(j)$ und D ist isomorph $e\underline{C}\times\overline{h\big([j,\infty)\big)}$ wobei $\overline{h\big([j,\infty)\big)}$ eine kompakte Gruppe darstellt. D ist demnach dann und nur dann zusammenhängend, wenn $\underline{C}/C(j)$ zusammenhängend ist. Konstruktionsanweisungen zu diesem Fall findet man in* (3.22).

Um das Kernstück des Hauptsatzes, nämlich den Fall $C<K$, $C\neq\emptyset$, $C\neq\{a\}$ zu erläutern, geben wir dazu noch ein Beispiel an:

T^∞ sei eine Torusgruppe unendlicher abzählbarer Dimension; die Folge ihrer Untergruppen $\langle 1\rangle$, $T^1\times\langle 1\rangle\times\langle 1\rangle\ldots$, $i=1,2,\ldots$ bezeichnen wir mit $T_0, T_1, \ldots$. Wir setzen $\underline{C}=C=T^\infty\times T_{n+1}$ mit einer festen natürlichen Zahl n. Nach einer Bemerkung von (3.19) ist dies möglich. Die Abbildung $r\to C(r)$ definieren wir wie folgt:

$$C(r)=\begin{cases} T_i\times\langle 1\rangle & \text{für } r\in\left[1-\frac{1}{i+1},\ 1-\frac{1}{i+2}\right),\quad i=0,1,\ldots\\ T^\infty\times\langle 1\rangle & \text{für } r\in[1,3/2)\\ T^\infty\times T_{i+1} & \text{für } r\in\left[\frac{3}{2}+\frac{i}{2n},\ \frac{3}{2}+\frac{i+1}{2n}\right)\\ & \qquad i=0,\ldots,n-1\\ T^\infty\times T_n & \text{für } r\in[2,\infty).\end{cases}$$

Den Homomorphismus h definieren wir durch Restklassenbildung auf R, in dem wir für alle $r \geqq 2$ die Elemente $r+i$, $i=0, 1, \ldots$ in eine Klasse zusammenfassen; der Homomorphismus h auf den Restklassenraum bildet dann das Intervall $[0, 2]$ eineindeutig ab, während $h([2, \infty))$ eine eindimensionale Torusgruppe darstellt. Auf dem direkten Produkt $C \times h(R)$ betrachten wir diejenige Kongruenzrelation γ, die alle Elemente $(c, h(r))$ und $(c', h(r'))$ identifiziert, wenn $h(r)=h(r')$ und $c'c^{-1} \in C(r)$ gilt. Die Restklassenhalbgruppe $(C \times h(R))/\gamma$ ist die kompakte topologische Halbgruppe K; sie hat folgende Eigenschaften: In allen Punkten von $\gamma(C \times h([0, 1)))$ ist die Dimension unendlich und dieser Teilraum ist nicht homogen. Auf $\gamma(C \times h([1, 2)))$ ist die Dimension endlich, z. B. ist auf $\gamma(C \times h([3/2 + i/2n, 3/2 + (i+1)/2n)))$, $i = 0, \ldots, n-1$, die Dimension gleich $n-i$. Die Untergruppe $D = \underline{D} = \gamma(C \times h([2, \infty)))$ ist isomorph einer eindimensionalen Torusgruppe.

Literatur

[1] BOURBAKI, N.: Topologie générale. Eléments de Math., Actual. sci. ind. **858** (1940) = **1142** (1952).

[2] CLIFFORD, A. H.: Connected ordered topological semigroups with idempotent endpoints. Trans. Amer. Math. Soc. **88**, 80–98 (1958).

[3] DLAB, V.: Eine Bemerkung zur Theorie dividierbarer abelscher Gruppen. Czechosl. math. J. **8** (83), Nr. 7, 54–60 (1957).

[4] COHEN, H., and L. I. WADE: Clans with zero on an interval. Trans. Amer. Math. Soc. **88**, 523–533 (1958).

[5] ELLIS, R.: A note on the continuity of the inverse. Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 372–373 (1957).

[6] FAUCETT, W. C.: Compact semigroups irreducibly connected between two idempotents. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 741–747 (1958).

[7] FUCHS, L.: Abelian groups. Hung. Acad. of Sciences, Budapest 1958.

[8] GANEA, T.: Zur Charakterisierung einparametriger topologischer Gruppen. Com. Acad. R. P. Române **1**, 731–732 (1951).

[9] GLEASON, A. M.: Groups without small subgroups. Ann. of Math. **56**, 193–212 (1952).

[10] GLUSKOV, V. M.: Lie Algebren lokal bikompakter Gruppen. Uspehi Mat. Nauk (N. S.) **12**, No. 2 (**77**), 137–142 (1957).

[11] HEWITT, E.: Compact monothetic semigroups. Duke Math. J. **23**, 447–457 (1956).

[12] HILLE, E., and R. S. PHILLIPS: Functional Analysis and semigroups. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. XXXI, 1957 (2. Aufl.).

[13] HOFMANN, K. H.: Topologische Loops mit schwachen Assoziativitätsforderungen. Math. Z. **70**, 125–155 (1958).

[14] HOFMANN, K. H.: Topologische Doppelloops. Math. Z. **70**, 213–230 (1958).

[15] HOFMANN, K. H.: Topologische Doppelloops und topologische Halbgruppen. Math. Ann. **138**, 239–258 (1959).

[16] KOCH, R. J.: On monothetic semigroups. Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 397–401 (1957).

[17] KOCH, R. J.: Arcs in partially ordered spaces. Pac. J. Math. **9**, 723–728 (1959).

[18] MALCEV, A. I.: Analytische Loops. Mat. Sbornik, N. S. **36** (**77**), 3–20 (1954).

[19] MONTGOMERY, D., and L. ZIPPIN: Topological transformation groups. Intersc. Tracts in Pure and Applied Math. **1** (1956).

[20] MOSTERT, P. S., and A. L. SHIELDS: On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary. Ann. of Math. **5**, 117–143 (1957).

[21] Mostert, P. S., and A. L. Shields: Semigroups with identity on a manifold. Trans. Amer. Math. Soc. **91**, 380–389 (1959).

[22] Obreanu, F.: Topologies compatibles avec le groupe additif de la droite réelle. Com. Acad. R. P. Române **1**, 557–558 (1951).

[23] Wallace, A. D.: The structure of topological semigroups. Bull. Amer. Math. Soc. **61**, 95–112 (1955).

[24] Wallace, A. D.: One dimensional homogenous clans are groups. Proc. Nederl. Acad. Wet., Ser. A **58**, 576–580 (1958).

[25] Weil, A.: L'intégration dans les groupes topologiques. Actual. sci. ind. **869** (1940) = **1145** (1951).

[26] Wright, F. B.: Semigroups in compact groups. Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 309–311 (1956).

[27] Wright, F. B.: A note on one-parameter and monothetic groups. J. Math. Soc. Japan **9**, 228–233 (1957).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 8. März 1960)

WITTICH, H.
Math. Zeitschr. 74, 278–288 (1960)

Eindeutige Lösungen der Differentialgleichung $w' = R(z, w)$

Herrn ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von
HANS WITTICH

Unter den Differentialgleichungen

$$w' = R(z, w), \qquad R(z, w) \text{ rational in } z \text{ und } w, \tag{1}$$

nimmt die Riccatische Differentialgleichung

$$w' = a(z) + b(z)\, w + c(z)\, w^2, \tag{2}$$

$a(z)$, $b(z)$ und $c(z)$ rationale Funktionen, eine besondere Stellung ein. So ist jede Differentialgleichung (1), deren Lösungen frei von beweglichen algebraischen Verzweigungen sind, eine Riccatische Differentialgleichung. Eindeutigkeit der Lösungen wird durch diese Forderung nicht garantiert, da die festen kritischen Stellen Verzweigungen sein können. Die Forderung, daß eindeutige Lösungen von (1) existieren sollen, führt ebenfalls auf die Riccatische Differentialgleichung. 1913 bewies J. MALMQUIST[1]) den Satz: Hat die Differentialgleichung $w' = R(z, w)$ eine nichtrationale und im Großen eindeutige Lösung, dann ist $R(z, w) = a(z) + b(z)\, w + c(z)\, w^2$. Man erkennt, wie einschneidend die Forderung „Eindeutigkeit im Großen" ist. Kommt diese Eigenschaft auch nur einer nichtrationalen Lösung von (1) zu, dann muß (1) eine Riccatische Differentialgleichung sein. Das Resultat von MALMQUIST läßt sich verschärft in der folgenden Form beweisen[2]): $w' = R(z, w)$ besitze in $0 < |z - \zeta| < \varrho$ eine eindeutige analytische Lösung, für die $z = \zeta$ wesentliche Singularität ist. Dann ist $R(z, w)$ von der Form $R(z, w) = a(z) + b(z)\, w + c(z)\, w^2$.

Solche in der Umgebung einer Stelle ζ eindeutige Lösungen von (1) sollen im folgenden untersucht werden. Dabei darf $\zeta = \infty$ angenommen werden.

1. Die Funktion $w = w(z)$ sei in $R \leqq |z| < \infty$ eindeutig analytisch. Die Zahl der auf dem Kreisring $R \leqq |z| \leqq r$ gelegenen Wurzeln der Gleichung $w(z) - c = 0$ bzw. $\frac{1}{w(z)} = 0$ sei $n(r, c)$ bzw. $n(r, \infty)$. Dabei wird jede Wurzel entsprechend

[1]) MALMQUIST, J.: Sur les fonctions à un nombre fini de branches définies par les équations différentielles du premier ordre. Acta math. **36** (1913).

[2]) WITTICH, H.: Zur Theorie der Riccatischen Differentialgleichung. Math. Ann. **127** (1954).

ihrer Vielfachheit gezählt. Damit werden die Anzahlfunktionen

$$N(r, c) = N\left(r, \frac{1}{w-c}\right) = \int_R^r \frac{n(t, c)}{t}\, dt \quad \text{und} \quad N(r, \infty) = N(r, w) = \int_R^r \frac{n(t, \infty)}{t}\, dt$$

gebildet. Die Schmiegungsfunktionen $m(r, \infty) = m(r, w)$ bzw. $m(r, c) = m\left(r, \frac{1}{w-c}\right)$ werden erklärt durch

$$m(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |w|\, d\varphi \quad \text{bzw.} \quad m\left(r, \frac{1}{w-c}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left|\frac{1}{w-c}\right| d\varphi,$$

wobei über den Kreis $|z| = r > R$ integriert wird. Die Summe

$$T(r, w) = N(r, w) + m(r, w)$$

heißt die charakteristische Funktion oder Charakteristik[3]). Der erste Hauptsatz besagt, daß für beliebige c

$$T(r, w) = N(r, c) + m(r, c) + O(\log r)$$

gilt. Die Forderung, daß $z = \infty$ wesentliche Singularität für $w(z)$ sein soll, bedingt

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{T(r, w)}{\log r} = \infty. \tag{3}$$

Die Zahl

$$\lambda = \lambda(w, \infty) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log T(r, w)}{\log r}$$

heißt die Ordnung der Funktion $w(z)$ für die Stelle $z = \infty$.

Ist $w(z)$ von endlicher Ordnung, dann gilt für die Schmiegungsfunktion $m\left(r, \frac{w'}{w}\right)$ der logarithmischen Ableitung $\frac{w'}{w}$

$$m\left(r, \frac{w'}{w}\right) = O(\log r), \tag{4}$$

eine Beziehung, die bei der Untersuchung der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Vorteil angewandt werden kann.

Wir nehmen jetzt an, daß $w(z)$ in $R \leqq |z| < \infty$ eindeutig analytisch ist, die Differentialgleichung (1) löst und der Bedingung (3) genügt. Beim Beweis des verallgemeinerten Malmquistschen Satzes wurden die Beziehungen

$$m(r, w) = O(\log r) \quad \text{und} \quad T(r, w) = O(r^\alpha), \qquad \alpha < \infty,$$

bewiesen. Danach ist die Ordnung von $w(z)$ endlich. Diese Aussage kann auch mit Hilfe der geometrischen Deutung der Charakteristik bewiesen werden,

[3]) a) Nevanlinna, R.: Eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1953. — b) Wittich, H.: Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1955.

wenn man beachtet, daß $w(z)$ eine Riccatische Differentialgleichung löst. Die Funktion $w(z)$ hat unendlich viele Polstellen. Im anderen Falle wäre nämlich $N(r, w) \leqq C_1 \log r$. In Verbindung mit $m(r, w) \leqq C_2 \log r$ würde $T(r, w) \leqq C \log r$ folgen, was der Beziehung (3) widerspräche.

Zur Bestimmung der Ordnung λ ist es zweckmäßig, durch eine Transformation, die die Ordnung nicht ändert, die Differentialgleichung (2) auf eine bequemere Form zu bringen. Dazu setzen wir $w = \alpha(z) + \beta(z)\, y$ und wählen $\alpha(z)$, $\beta(z)$ so, daß $w' = a(z) + b(z)\, w + c(z)\, w^2$ in die einfachere Differentialgleichung $y' = Q(z) + y^2$ übergeht. Offenbar ist $T(r, w) = T(r, y) + O(\log r)$, also $\lambda(w) = \lambda(y)$. Zwischen den Koeffizienten $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ und der rationalen Funktion $Q(z)$ besteht der Zusammenhang

$$(5) \qquad Q(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{c''}{c} - \frac{3}{2}\left(\frac{c'}{c}\right)^2\right) + a\,c - \frac{b^2}{4} - \frac{1}{2}\,b\,\frac{c'}{c} + \frac{b'}{2}.$$

Von dieser einfacheren Differentialgleichung gehen wir aus und schreiben, indem wir wieder y durch w ersetzen

$$(2') \qquad w' = Q(z) + w^2.$$

Für hinreichend großes R ist $Q(z)$ in $R \leqq |z| < \infty$ frei von Null- und Polstellen und hat eine Entwicklung der Form

$$Q(z) = a\, z^{\nu} + a_1\, z^{\nu-1} + \cdots, \qquad a \neq 0.$$

Aus (2') folgt, wenn für eine Polstelle p $w = \dfrac{A}{(z-p)^{\mu}} + \cdots$ gesetzt wird, daß jede der unendlich vielen Polstellen einfach ist. Das Residuum jedes Poles ist -1.

Mit $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} w(z)\, dz$ bilden wir die in $R \leqq |z| < \infty$ holomorphe Funktion $F(z) = e^{-\Phi(z)}$. $F(z)$ hat unendlich viele einfache Nullstellen, die genau dort liegen, wo $w(z)$ Polstellen hat. Aus $w(z) = -\dfrac{F'(z)}{F(z)}$ folgt

$$w' = -\frac{F''}{F} + w^2,$$

also zusammen mit (2')

$$(6) \qquad F'' + Q(z)\, F(z) = 0.$$

Nach den Annahmen über $w(z)$ hat (6) eine in $R \leqq |z| < \infty$ holomorphe Lösung. Wegen $N(r, w) = N\left(r, \frac{1}{F}\right)$ und $m(r, w) = O(\log r)$ ist

$$T(r, w) = N\left(r, \frac{1}{F}\right) + O(\log r),$$

also

$$\lambda(w, \infty) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log N(r, 1/F)}{\log r}.$$

Zur Berechnung von λ genügt also die Bestimmung der Anzahlfunktion $N\left(r, \frac{1}{F}\right)$.

2. Auf die in $R \leqq |z| < \infty$ holomorphe Funktion $F(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j$ läßt sich die Theorie des Maximalgliedes von WIMAN-VALIRON[4]) anwenden und führt zunächst zu einer notwendigen Bedingung für ν. Ist $n(r)$ der Zentralindex von $F(z)$, dann gilt für $z = \zeta$, wobei ζ $|F(\zeta)| = \max_{|z|=r} |F(z)|$ genügt,

$$F'(\zeta) = \frac{n(r)}{\zeta} F(\zeta)\left(1 + \varepsilon_1(\zeta)\right), \qquad F''(\zeta) = \left(\frac{n(r)}{\zeta}\right)^2 F(\zeta)\left(1 + \varepsilon_2(\zeta)\right),$$

sofern $r = |\zeta|$ nicht einer Ausnahmemenge Δ von endlichem logarithmischem Maß angehört. Die Größen $\varepsilon_j(\zeta)$ streben gegen Null, wenn $|\zeta|$ über zulässige Werte gegen ∞ strebt. Mit $Q(z) = a z^\nu \left(1 + \varepsilon_3(z)\right)$ erhalten wir aus (6)

$$(7) \quad \left(\frac{n(r)}{\zeta}\right)^2 \left(1 + \varepsilon_2(\zeta)\right) + a \zeta^\nu \left(1 + \varepsilon_3(\zeta)\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{n(r)}{\zeta}\right)^2 = - a \zeta^\nu \left(1 + \varepsilon(\zeta)\right).$$

Aus der letzten Beziehung folgt, da $z = \infty$ wesentliche Singularität für $F(z)$ ist und daher der Zentralindex $n(r)$ für $r \to \infty$ unbeschränkt wächst, die notwendige Bedingung

$$\nu \geqq -1.$$

Weiter folgt nach G. VALIRON $n(r) \sim c r^{1+\frac{\nu}{2}}$ und daraus für den Maximalbetrag $M(r, F)$ von $F(z)$

$$\log M(r, F) \sim C r^{1+\frac{\nu}{2}}, \qquad 0 < C < \infty.$$

$F(z)$ ist also von der Wachstumsordnung

$$\lambda(F) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \log M(r, F)}{\log r} = 1 + \frac{\nu}{2} \geqq \frac{1}{2}.$$

Daraus kann bekanntlich nicht ohne weiteres geschlossen werden, daß auch die Ordnung von $w(z)$ gleich $1 + \frac{\nu}{2}$ ist. Wir werden nachher auf anderem Wege zeigen, daß tatsächlich $\lambda(w) = 1 + \frac{\nu}{2}$ gilt.

Aus (7) läßt sich eine Aussage über die Lage der Stellen ζ, an denen der Maximalbetrag angenommen wird, ablesen. Durch eine Ähnlichkeitstransformation der z-Ebene läßt sich erreichen, daß

$$Q(z) = -\left(\frac{\nu + 2}{2}\right)^2 z^\nu + \cdots$$

gilt. Eine solche Transformation beeinflußt die Wachstumsordnung $\lambda(F)$ nicht. Für r-Werte, die nicht zu Δ gehören, folgt aus (7)

$$n^2(r) = \left(\frac{\nu + 2}{2}\right)^2 \zeta^{\nu+2}\left(1 + \varepsilon(\zeta)\right), \quad \text{also} \quad \arg \zeta = \frac{2\pi}{\nu + 2} j + \varepsilon(\zeta),$$
$$j = 0, 1, \ldots, \nu + 1.$$

[4]) Man vgl. dazu 3 b).

A. WIMAN hat die Vermutung ausgesprochen, daß die Nullstellen von $F(z)$ sich jenen Halbstrahlen anschließen, die die von den Strahlen $\arg z = \frac{2\pi}{\nu+2} j$ und $\arg z = \frac{2\pi}{\nu+2}(j+1)$ gebildeten Winkelräume halbieren, also den Halbstrahlen

$$\arg z = \frac{\pi}{\nu+2}(2j+1), \qquad j = 0, 1, \ldots, \nu+1.$$

Diese Vermutung läßt sich bestätigen. Dabei gelingt auch die Bestimmung der gesuchten Anzahlfunktion $N\left(r, \frac{1}{F}\right)$ und damit der Beweis der Behauptung $\lambda(w) = 1 + \frac{\nu}{2}$.

3. Durch die Transformation

$$y = Q^{\frac{1}{4}} \cdot F, \qquad x = \int_{z_0}^{z} \sqrt{Q(z)}\, dz$$

geht die Differentialgleichung $F'' + Q(z)F = 0$, $Q(z) = -\left(\frac{\nu+2}{2}\right)^2 z^\nu + \cdots$, über in die Differentialgleichung

$$y'' + \big(1 + h(x)\big)\, y = 0, \qquad h(x) = \frac{5Q'^2 - 4QQ''}{16Q^3}.$$

Diese Differentialgleichung wurde von E. HILLE[5]) auf dem Wege über eine assoziierte Integralgleichung eingehend untersucht. Seine Methode führt, wenn die Transformation rückgängig gemacht wird, zu dem folgenden Resultat: Die Differentialgleichung $F'' + Q(z)F = 0$ hat $\nu+2$ Lösungen $F_0(z), F_1(z), \ldots, F_{\nu+1}(z)$, wobei $F_j(z)$, $j = 0, 1, \ldots, \nu+1$, im Winkelraum

$$\left|\arg z - \frac{2\pi}{\nu+2} j\right| < \frac{3\pi}{\nu+2} - \varepsilon$$

die asymptotische Entwicklung

$$\log F_j(z) \sim (-1)^{j+1} z^{1+\frac{\nu}{2}}$$

besitzt. Je zwei Lösungen $F_j(z), F_{j+1}(z)$ sind linear unabhängig. Jede Lösung, die von F_{j+1} und F_j linear abhängig ist, hat im Winkelraum

$$\left|\arg z - \frac{\pi}{\nu+2}(2j+1)\right| < \varepsilon$$

unendlich viele Nullstellen. Für ihre Anzahl $n_j(r)$ gilt $n_j(r) \sim \frac{1}{\pi} r^{1+\frac{\nu}{2}}$.

Es sei nun $w(z)$ eine eindeutige, (3) genügende Lösung der Differentialgleichung $w' = Q(z) + w^2$ und z_0 eine Regularitätsstelle mit hinreichend großem Betrag. Wir wählen $F(z_0)$ und $F'(z_0)$ so, daß $w(z_0) = -\frac{F'(z_0)}{F(z_0)}$ gilt. Durch

[5]) Man vergleiche die Darstellung bei R. NEVANLINNA: Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten. Acta math. **58** (1932).

die Anfangsbedingungen $F(z_0)$, $F'(z_0)$ ist die eindeutige Lösung $F(z)$ von (6) festgelegt. W_j bezeichne den Winkelraum $\frac{2\pi}{\nu+2} j - \delta \leqq \arg z \leqq \frac{2\pi}{\nu+2}(j+1) + \delta$, $0 < \delta < \frac{\pi}{\nu+2}$. In W_j gelten für $|z| \geqq R_0$ mit hinreichend großem R_0 die asymptotischen Entwicklungen für $F_j(z)$ und $F_{j+1}(z)$. Da $F_j(z)$ und $F_{j+1}(z)$ in W_j linear unabhängig sind, gilt dort

$$F(z) = c_j F_j(z) + c_{j+1} F_{j+1}(z).$$

$F(z)$ hat danach in $W_j(R_0) = W_j \cap |z| \geqq R_0$ endlich viele Nullstellen oder unendlich viele. Hat $F(z)$ in $W_j(R_0)$ unendlich viele Nullstellen, dann liegen diese fast alle im Winkelraum

$$W_j(\varepsilon): \quad \left| \arg z - \frac{\pi}{\nu+2}(2j+1) \right| < \varepsilon.$$

Mit $n_j(r, 0)$ werden die im Durchschnitt von $W_j(\varepsilon)$ und $R \leqq |z| \leqq r$ gelegenen Nullstellen von $F(z)$ bezeichnet. Dann gilt

$$n_j(r, 0) = \frac{r^\alpha}{\pi}\left(1 + \varepsilon_j(r)\right), \qquad \alpha = \frac{\nu+2}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{r\to\infty} \varepsilon_j(r) = 0.$$

Durch Addition erhalten wir die Zahl $n(r, 0)$ der auf $R \leqq |z| \leqq r$ gelegenen Nullstellen von $F(z)$:

$$n(r, 0) = A\, r^\alpha \left(1 + \varepsilon(r)\right), \qquad \lim_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0. \tag{8}$$

Da $F(z)$ unendlich viele Nullstellen hat, ist $A \neq 0$. A ist ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{\pi}$: $A = m\frac{1}{\pi}$ mit $1 \leqq m \leqq \nu+2$.

Da $n(r, 0)$ mit wachsendem r nicht abnimmt, erhalten wir aus der Definition von $N\left(r, \frac{1}{F}\right)$

$$n\left(\frac{r}{2}, 0\right) \log 2 \leqq N\left(r, \frac{1}{F}\right) \leqq n(r, 0) \log \frac{r}{R}$$

und

$$\log n\left(\frac{r}{2}, 0\right) + \log\log 2 \leqq \log N\left(r, \frac{1}{F}\right) \leqq \log n(r, 0) + \log\log \frac{r}{R}.$$

Daraus ergibt sich in Verbindung mit (8)

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log N(r, 1/F)}{\log r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\log N(r, w)}{\log r} = 1 + \frac{\nu}{2};$$

also die Behauptung. Damit können wir den folgenden Satz aussprechen:

Satz. *Eine in $R \leqq |z| < \infty$ eindeutige und der Bedingung $\lim_{r\to\infty} \frac{T(r, w)}{\log r} = \infty$ genügende Lösung der Differentialgleichung*

$$w' = Q(z) + w^2, \qquad Q(z) = a\, z^\nu + \cdots,$$

ist von regulärem Wachstum und hat die Ordnung $\lambda(w,\infty)=1+\frac{\nu}{2}$. *Für* $\nu<-1$ *existiert keine eindeutige Lösung der Differentialgleichung mit der Eigenschaft* $\varlimsup_{r\to\infty}\frac{T(r,w)}{\log r}=\infty$.

Ist $w(z)$ in $0<|z-\zeta|\leqq R'$, $\zeta\neq\infty$, eindeutig analytisch und transzendent, dann gehen wir durch $t=\frac{1}{z-\zeta}$ zu dem bereits behandelten Fall über. Gilt an der Stelle $z=\zeta$ $Q(z)=a(z-\zeta)^{\mu}+a_1(z-\zeta)^{\mu+1}+\cdots$, dann ist $y(t)=w\left(\zeta+\frac{1}{t}\right)$ eine in $\frac{1}{R'}=R\leqq|t|<\infty$ eindeutige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt}=(-a\,t^{-\mu-2}-a_1\,t^{-\mu-3}-\cdots)-t^{-2}\,y^2.$$

Wird diese Differentialgleichung auf die Normalform $\frac{dv}{dt}=Q_0(t)+v^2$ gebracht, dann ist nach (5)

$$Q_0(t)=a\,t^{-\mu-4}+a_1\,t^{-\mu-5}+\cdots$$

Wegen $\nu\geqq-1$ erhalten wir die notwendige Bedingung $\mu\leqq-3$. Danach ist $\nu=-\mu-4$, woraus sich für die Ordnung $\lambda(w,\zeta)$, bezogen auf die singuläre Stelle ζ,

$$\lambda(w,\zeta)=1+\frac{\nu}{2}=-\frac{\mu}{2}-1\geqq\frac{1}{2}$$

ergibt. Danach gilt der

SATZ. *Jede in der Umgebung von* $z=\zeta$ *eindeutige Lösung von* $w'=R(z,w)$, *deren Ordnung* $\lambda(w,\zeta)$ *kleiner als* $\frac{1}{2}$ *ist, verhält sich rational in* $z=\zeta$. *Ist* $z=\zeta$ *transzendente Singularität für* $w(z)$, *dann gilt* $\lambda(w,\zeta)\geqq\frac{1}{2}$.

Die Schranke $\frac{1}{2}$ ist genau, wie die Differentialgleichung $w'=\frac{1}{2z}-\frac{1}{2z}w+\frac{1}{2}w^2$ mit der eindeutigen Lösung $w=\frac{\operatorname{tg}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ zeigt. Die Entwicklung für $Q(z)$ lautet $Q(z)=\frac{1}{4z}+\frac{3}{16z^2}$.

4. Aus der Annahme, daß $w'=R(z,w)$ drei in U: $0<|z-\zeta|<R'$ eindeutige Lösungen $w_1(z)$, $w_2(z)$, $w_3(z)$ hat, die sich in $z=\zeta$ rational verhalten, folgt: Jede andere in U eindeutige Lösung $w(z)$ ist rational in $z=\zeta$. Aus der Annahme, daß $w(z)$ nicht rational in ζ ist, folgt, daß $w'=R(z,w)$ eine Riccatische Differentialgleichung ist. Da sich jedes Integral der Riccatischen Differentialgleichung rational durch drei partikuläre Integrale ausdrücken läßt, ergibt sich aus $w(z)=r(w_1,w_2,w_3)$, daß $w(z)$ rational in $z=\zeta$ ist, entgegen der Annahme.

Es sei nun $w(z)$ in U: $R\leqq|z|<\infty$ eindeutig und transzendent. Weiter sei $\varrho(z)$ eindeutig in U und rational in $z=\infty$. Wir betrachten die Differenz $w(z)-\varrho(z)$ und beweisen den folgenden

SATZ. $w=w(z)$ *sei eine in* U *eindeutige und transzendente Lösung von* $w'=R(z,w)$. *Ist* $\varrho(z)$ *eindeutig in* U *und rational in* $z=\infty$, *dann hat die Funktion* $w(z)-\varrho(z)$ *genau dann den Picardschen Ausnahmewert Null, wenn* $\varrho(z)$ *selber Lösung von* $w'=R(z,w)$ *ist.*

Ist $\varrho(z)$ nicht Lösung der Differentialgleichung, dann gilt

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r, 1/(w(z)-\varrho(z)))}{N(r, w)} = 1.$$

BEWEIS. Nach dem Satz von MALMQUIST ist $w' = R(z, w)$ eine Riccatische Differentialgleichung $w' = a + bw + cw^2$.

a) Es sei $\varrho'(z) = a + b\varrho + c\varrho^2$. Für $v(z) = w(z) - \varrho(z)$ erhalten wir die Differentialgleichung

$$v' = (a + b\varrho + c\varrho^2 - \varrho') + v(b + 2\varrho c + cv), \quad \text{also} \quad v' = v(b + 2\varrho c + cv).$$

Wäre Null nicht Picardscher Ausnahmewert für $v(z)$, dann würde an mindestens einer Regularitätsstelle in U $v(z_0) = 0$ gelten, also nach dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen $v(z) \equiv 0$, was nicht möglich ist.

b) Es sei $v(z) \neq 0$ für U^*: $R \leqq R^* \leqq |z| < \infty$. Dann ist $y(z) = \frac{1}{v(z)}$ holomorph in U^*. Aus $v' = Q(z) + (b + 2\varrho c)v + cv^2$, $Q(z) = a + b\varrho + c\varrho^2 - \varrho'$, folgt für y

$$y' = -c - (b + 2c\varrho)\, y - Q(z)\, y^2.$$

$y(z)$ ist eindeutige Lösung einer Riccatischen Differentialgleichung, wenn $Q(z) \not\equiv 0$ ist. Als solche muß $y(z)$ unendlich viele Pole haben, während doch $y(z)$ holomorph in U^* ist. Es ist also $Q(z) \equiv 0$, d.h. $\varrho(z)$ ist Lösung der Differentialgleichung $w' = a + bw + cw^2$.

Ist $Q(z) \not\equiv 0$, dann folgt aus der Differentialgleichung für v

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{Q(z)} \left(\frac{v'}{v} - b - 2\varrho c - cv \right).$$

Übergang zum Pluslogarithmus und Integration über $|z| = r$ ergibt

$$m\left(r, \frac{1}{v}\right) \leqq m\left(r, \frac{1}{Q}\right) + m\left(r, \frac{v'}{v}\right) + m(r, b) + m(r, \varrho) + 2m(r, c) + m(r, v) + C.$$

Da v von endlicher Ordnung ist, gilt nach (4) $m\left(r, \frac{v'}{v}\right) = O(\log r)$. Weiter ist $m(r, v) = O(\log r)$. Da sich alle anderen vorkommenden Funktionen rational in $z = \infty$ verhalten, sind ihre Schmiegungsfunktionen ebenfalls von der Form $O(\log r)$. Es gilt also $m\left(r, \frac{1}{v}\right) = O(\log r)$, d.h.

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r, 1/(w(z)-\varrho(z)))}{N(r, w)} = 1.$$

Sind $\varrho_1(z)$ und $\varrho_2(z)$ von rationalem Verhalten in $z = \infty$ und lösen beide die Differentialgleichung $w' = a + bw + cw^2$, dann ist $y(z) = \frac{w - \varrho_1}{w - \varrho_2} \neq 0, \infty$ in einer Umgebung von $z = \infty$. Aus $w = \frac{\varrho_2 y - \varrho_1}{y - 1}$ und $w' = a + bw + cw^2$ folgt durch elementare Rechnung

$$y' = c(z) \left(\varrho_1(z) - \varrho_2(z)\right) y.$$

Mit $\varrho(z) \equiv \alpha$ erhalten wir Aussagen über die α-Stellen von $w(z)$. Ein Wert α ist genau dann Picardscher Ausnahmewert von $w(z)$, wenn $w(z) \equiv \alpha$ Lösung der Differentialgleichung ist, d.h. wenn

$$D(z, \alpha) = a(z) + b(z)\,\alpha + c(z)\,\alpha^2 \equiv 0$$

gilt. Ist für $j = 1, 2$ $D(z, \alpha_j) \not\equiv 0$, dann folgt aus $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{N(r, \alpha_j)}{N(r, w)} = 1$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r, \alpha_1)}{N(r, \alpha_2)} = 1.$$

Die Aussage des Picardschen Satzes ergibt sich hier aus der Tatsache, daß für höchstens zwei Werte α $D(z, \alpha) \equiv 0$ gelten kann. Hat $w' = R(z, w)$ eine Lösung mit zwei Picardschen Ausnahmewerten, dann ist die Differentialgleichung von der Form

$$w' = c(z)\,(w - \alpha_1)\,(w - \alpha_2).$$

Mit $c(z) = Bz^m + B_1 z^{m-1} + \cdots$ erhalten wir

$$Q(z) = -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{4} B^2 z^{2m} + \cdots,$$

wobei $m \geqq 0$ sein muß. Es ist also $\nu = 2m$ und $\lambda(w, \infty) = 1 + \frac{\nu}{2} = 1 + m \geqq 1$. Diese Differentialgleichung läßt sich elementar lösen. Dabei dürfen wir $\alpha_1 = i$, $\alpha_2 = -i$ annehmen, also

$$w' = c(z)\,(1 + w^2).$$

Mit $\frac{dC(z)}{dz} = c(z)$ erhalten wir $w = \operatorname{tg} C(z)$. Die im Endlichen gelegenen Pole von $c(z)$ sind im Kreis $|z| < R$ enthalten. Die Lösung $w(z) = \operatorname{tg} C(z)$ ist, gegebenenfalls nach Fixierung eines Zweiges des Logarithmus, in $R \leqq |z| < \infty$ eindeutig, wenn die Residuensumme der in $|z| < R$ gelegenen Polstellen Null ist. Für $w' = \frac{z^{2n} - z^n - 2}{z^2 - 1}(1 + w^2)$ erhalten wir $w(z) = \operatorname{tg}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1} + \log\frac{z+1}{z-1} + \gamma\right)$. Es gilt $\lambda(w, \infty) = 2n - 1$.

5. P. PAINLEVÉ hat sich in mehreren Arbeiten mit der Frage beschäftigt, ob gewisse der nach im benannten Transzendenten einer algebraischen Differentialgleichung $P(z, w, w') = 0$ genügen können. Die Painlevéschen Transzendenten sind nichtrationale Lösungen der Differentialgleichungen

$$w'' = 6w^2 + z \quad \text{und} \quad w'' = 2w^3 + z\,w + C, \quad C \text{ eine Konstante.}$$

Jede Lösung der ersten Painlevéschen Differentialgleichung $w'' = 6w^2 + z$ ist eindeutig analytisch in $|z| < \infty$ und hat unendlich viele Doppelpole. Die nichtrationalen Lösungen der zweiten Painlevéschen Differentialgleichung $w'' = 2w^3 + zw + C$ sind ebenfalls eindeutig analytisch in $|z| < \infty$ und haben unendlich viele Pole erster Ordnung mit dem Residuum 1 oder -1. Wir betrachten hier nur die Frage, ob partikuläre Lösungen der Painlevéschen

Differentialgleichungen gleichzeitig Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung der Form $w' = R(z, w)$ sein können.

Da alle transzendenten Lösungen der beiden Painlevéschen Differentialgleichungen der Bedingung (3) genügen, können partikuläre Lösungen dieser Differentialgleichungen höchstens einer Riccatischen Differentialgleichung genügen. Nun sind fast alle Polstellen von $w' = a(z) + b(z)w + c(z)w^2$ einfach. Mithin kann keine partikuläre Lösung von $w'' = 6w^2 + z$ gleichzeitig Lösung einer Riccatischen Differentialgleichung sein.

Wir betrachten nun die zweite Painlevéschen Differentialgleichung und nehmen an, daß eine partikuläre Lösung $F(z)$ gleichzeitig Lösung einer passenden Riccatischen Differentialgleichung ist. Aus $F'(z) = a(z) + b(z)F(z) + c(z)F^2$ folgt durch Differentiation nach z und Einsetzen von $F'(z)$

$$\begin{aligned} F'' &= 2c^2F^3 + (c' + 3bc)F^2 + (b' + b^2 + 2ac)F + (a' + ab) \\ &= 2c^2F^3 + \alpha(z)F^2 + \beta(z)F + \gamma(z). \end{aligned}$$

In Verbindung mit $F'' = 2F^3 + zF + C$ ergibt sich die Identität

$$2\big(c^2(z) - 1\big)F^3 + \alpha(z)F^2 + \big(\beta(z) - z\big)F + \big(\gamma(z) - C\big) \equiv 0.$$

Diese Identität muß für alle z gelten, also auch für die unendlich vielen Polstellen $p_1, p_2, \ldots$. Daraus folgt

$$c^2(z) \equiv 1, \quad \alpha(z) \equiv 0, \qquad \beta(z) = z \quad \text{und} \quad \gamma(z) \equiv C.$$

Mit $c(z) \equiv 1$ erhalten wir $b(z) \equiv 0$, $a(z) = \frac{z}{2}$ und mit $c(z) \equiv -1$ $b(z) \equiv 0$, $a(z) = -\frac{z}{2}$. Hat also $w'' = 2w^3 + zw + C$ eine partikuläre Lösung, die einer Riccatischen Differentialgleichung genügt, dann ist diese von der Form

$$w' = \frac{z}{2} + w^2 \quad \text{bzw.} \quad w' = -\frac{z}{2} - w^2.$$

Durch Differentiation nach z ist zu erkennen, daß dann die Painlevésche Differentialgleichung von der Form

$$w'' = 2w^3 + zw + \tfrac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad w'' = 2w^3 + zw - \tfrac{1}{2}$$

sein muß. Es genügt, weil bei Ersetzung von w durch $-w$ die erste Differentialgleichung in die zweite übergeht, $w'' = 2w^3 + zw + \frac{1}{2}$ zu betrachten.

Jede Lösung $F(z)$ von $w' = \frac{z}{2} + w^2$ ist eindeutig analytisch in $|z| < \infty$ und transzendent. Sie genügt einer Painlevéschen Differentialgleichung der Form $w'' = 2w^3 + zw + \frac{1}{2}$, und zwar ist $F(z)$ jene partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung, die den Anfangsbedingungen $F(z_0) = w_0$, $F'(z_0) = \frac{z_0}{2} + w_0^2$ genügt. Ist umgekehrt $\Phi(z)$ die durch $\Phi(z_0) = w_0$, $\Phi'(z_0) = \frac{z_0}{2} + w_0^2$ festgelegte Lösung

von $w'' = 2w^3 + zw + \frac{1}{2}$, dann löst $\Phi(z)$ auch $w' = \frac{z}{2} + w^2$. Wir betrachten die durch $F(z_0) = w_0$ bestimmte Lösung von $w' = \frac{z}{2} + w^2$. Dann ist zunächst $F'(z_0) = \frac{z_0}{2} + w_0^2 = \Phi'(z_0)$. Durch fortgesetzte Differentiation findet man $F^{(j)}(z_0) = \Phi^{(j)}(z_0)$ für alle j, also $F(z) \equiv \Phi(z)$. Der in dem Buch von W. W. GOLUBEW[6]) zitierte Satz von PAINLEVÉ, daß kein partikuläres Integral der betrachteten Gleichungen ein Integral einer Gleichung erster Ordnung der Gestalt $P(z, w, w')$ sein kann, ist also falsch, wie die angegebene Betrachtung zeigt.

Das gleiche Beispiel widerlegt die von P. BOUTROUX[7]) gemachte Bemerkung, daß alle transzendenten Lösungen von $w'' = 2w^3 + zw + C$ die Ordnung drei haben. Die partikulären Lösungen von $w'' = 2w^3 + zw + \frac{1}{2}$, die gleichzeitig $w' = \frac{z}{2} + w^2$ genügen, haben nämlich wegen $\nu = 1$ die Ordnung $\lambda = 1 + \frac{\nu}{2} = \frac{3}{2}$.

Karlsruhe, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 29. März 1960)

---

[6]) GOLUBEW, W. W.: Differentialgleichungen im Komplexen. Berlin 1958.

[7]) BOUTROUX, P.: Sur quelques proprietés des fonctions entières. Acta math. **28** (1904).

NITSCHE, J. C. C.
Math. Zeitschr. 74, 289–292 (1960)

Ein Eindeutigkeitssatz für zweifach zusammenhängende Minimalflächen*

Herrn ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

JOHANNES C. C. NITSCHE

Es sei S eine in Zylinderkoordinaten $x = r(z, \varphi) \cdot \cos\varphi$, $y = r(z, \varphi) \cdot \sin\varphi$ dargestellte zweifach zusammenhängende Minimalfläche. Die Abstandsfunktion $r(z, \varphi)$ ist dabei als positiv und periodisch vorausgesetzt: $r(z, \varphi + 2\pi) = r(z, \varphi)$, so daß insbesondere die Schnittkurven S_{z_0} der Fläche mit den Ebenen $z = z_0$ sternförmig bezüglich des Punktes $x = y = 0$ ausfallen.

Wir interessieren uns hier für die Bestimmung aller Minimalflächen dieser Art, welche sich beiderseits ins Unendliche erstrecken oder genauer, deren Funktion $r(z, \varphi)$ für alle Werte von z und φ erklärt und zweimal stetig differenzierbar ist. In einer früheren Arbeit [1] hatte ich bewiesen, daß nur ein Katenoid

$$(1) \qquad r(z, \varphi) = \frac{1}{a}\left[c \sin(\varphi + d) + \sqrt{\mathfrak{Cof}^2(az + b) - c^2 \cos^2(\varphi + d)}\right], \quad a > 0,\ |c| < 1$$

mit einer zur z-Achse parallelen Rotationsachse diese Bedingungen erfüllt, falls noch weiterhin vorausgesetzt wird, daß alle Kurven S_z konvex sind. Auf Grund eines Satzes von M. SHIFFMAN [2], demzufolge mit S_{z_1} und S_{z_2} $(z_1 < z_2)$ immer auch alle Kurven S_z $(z_1 < z < z_2)$ konvex sind, würde es ausreichen anzunehmen, daß zwei Folgen S_{z_m}, S_{z_n} $(z_m \to \infty,\ z_n \to -\infty)$ konvexer Kurven auf S existieren.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, die Voraussetzung der Konvexität überhaupt zu beseitigen und den folgenden Satz zu beweisen:

Es sei S eine zweifach zusammenhängende Minimalfläche mit der Darstellung $x = r(z, \varphi) \cdot \cos\varphi$, $y = r(z, \varphi) \cdot \sin\varphi$. Die Funktion $r(z, \varphi)$ sei für alle Werte von z und φ erklärt, zweimal stetig differenzierbar, positiv und periodisch: $r(z, \varphi + 2\pi) = r(z, \varphi)$.

Dann muß S ein Katenoid mit einer zur z-Achse parallelen Achse sein.

Im Hinblick auf das Resultat von [1] beruht der Beweis offensichtlich auf dem folgenden Hilfssatz:

Es sei S eine zweifach zusammenhängende Minimalfläche mit der Darstellung $x = r(z, \varphi) \cdot \cos\varphi$, $y = r(z, \varphi) \cdot \sin\varphi$. Die Funktion $r(z, \varphi)$ sei für alle Werte

*) Diese Arbeit ist unter Contract Nonr-710(16) zwischen der Universität von Minnesota und dem Office of Naval Research vorbereitet worden.

von z und φ erklärt, zweimal stetig differenzierbar, positiv und periodisch: $r(z, \varphi + 2\pi) = r(z, \varphi)$.

Dann müssen alle Kurven S_z konvex sein.

Wie in [1] führen wir die neuen Parameter

$$(2) \qquad \begin{cases} \xi = \xi(z, \varphi) = z \\ \eta = \eta(z, \varphi) = \int\limits_{(0,0)}^{(z,\varphi)} \frac{1}{W} \left[r_z r_\varphi \, dz + (r^2 + r_\varphi^2) \, d\varphi \right] \end{cases}$$

ein. Das Integral in (2_2) ist dabei wegunabhängig, und W steht als Abkürzung für die Quadratwurzel $\sqrt{r^2 + r^2 r_z^2 + r_\varphi^2}$. ξ und η sind isotherme Parameter, wie man aus

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{W^2}{r^2 + r_\varphi^2} (d\xi^2 + d\eta^2)$$

ersieht. η ist monoton in φ, und man kann es (wie in [1], S. 861) so einrichten, daß der Zuwachs gerade 2π beträgt: $\eta(z, \varphi + 2\pi) = \eta(z, \varphi) + 2\pi$. Durch die Formeln (2) wird eine eineindeutige Abbildung der ganzen (z, φ)-Ebene auf die ganze (ξ, η)-Ebene vermittelt. Die Kurve $\eta(z, \varphi) = 0$, welche sich auf der Fläche S mehr oder weniger spiralig beiderseitig ins Unendliche erstreckt, schneidet S_z in einem Punkte, dessen Flächenkoordinaten mit $\big(z, \varphi_0(z)\big)$ bezeichnet werden sollen. Endlich wird noch $\zeta = \xi + i\eta$ und $e^\zeta = w = u + iv = \varrho e^{i\Theta}$ gesetzt. $u = u(z, \varphi)$ und $v = v(z, \varphi)$ bilden dann die Fläche S eineindeutig und konform auf das Gebiet $0 < |w| < \infty$ ab.

Es sei $\alpha = \alpha(z, \varphi)$ der Winkel zwischen der positiven x-Richtung und der Richtung der Tangente an die Kurve S_z im Punkte (z, φ). Dieser Winkel ist nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt und soll deshalb folgendermaßen normiert werden: Für $\alpha\big(0, \varphi_0(0)\big)$ wird zunächst diejenige Bestimmung ausgesucht, für welche $0 \leqq \alpha\big(0, \varphi_0(0)\big) < 2\pi$ ist. Weiterhin wird α längs der Kurve $\eta = 0$ stetig nach beiden Seiten ins Unendliche fortgesetzt. Für festes z und für Winkel φ aus dem Intervall $\varphi_0(z) \leqq \varphi < \varphi_0(z) + 2\pi$ schließlich wird $\alpha(z, \varphi)$ aus $\alpha\big(z, \varphi_0(z)\big)$ durch stetige Fortsetzung gewonnen. In dieser Weise ist der Winkel α im Streifen $0 \leqq \eta < 2\pi$, d.h. auf der ganzen Fläche S, eindeutig bestimmt. Natürlich gilt $\lim\limits_{\varphi \to \varphi_0(z) + 2\pi} \alpha(z, \varphi) = \alpha\big(z, \varphi_0(z)\big) + 2\pi$.

Wegen des sternförmigen Charakters von S_z ergeben sich im Intervall $\varphi_0(z) \leqq \varphi < \varphi_0(z) + 2\pi$ die Ungleichungen

$$(3) \qquad \varphi \leqq \alpha(z, \varphi) + 2\pi k \leqq \varphi + \pi.$$

k ist dabei diejenige ganze Zahl, für welche $\varphi_0(z) \leqq \alpha\big(z, \varphi_0(z)\big) + 2k\pi \leqq \varphi_0(z) + \pi$ gilt. Aus (3) folgt

$$(4) \qquad \varphi_2 - \varphi_1 - \pi \leqq \alpha(z, \varphi_2) - \alpha(z, \varphi_1) \leqq \varphi_2 - \varphi_1 + \pi$$

für $\varphi_0(z) \leqq \varphi_1$, $\varphi_2 < \varphi_0(z) + 2\pi$. α kann natürlich auch als Funktion von u und v oder von ϱ und Θ aufgefaßt werden, und wir betrachten nun die Funktion $\beta(\varrho, \Theta) = \alpha(z, \varphi) - \Theta$, welche in $0 < |w| < \infty$ stetig ist. Wegen (4) und

wegen der Stetigkeit von $\beta(\varrho, \Theta)$ gilt dann

$$|\beta(\varrho, \Theta_2) - \beta(\varrho, \Theta_1)| \leqq 3\pi. \tag{5}$$

Die Funktion α ist eine harmonische Funktion auf der Minimalfläche, d. h. eine harmonische Funktion irgendeines Paares isothermer Parameter (siehe M. SHIFFMAN [2], S. 78).

Das sieht man am besten so ein: Man stelle die Fläche — unter Benutzung neuer Koordinaten — lokal in der Form $z = f(x, y)$ dar und nehme an, daß $x = \text{const}$ die Schar paralleler Ebenen bedeutet. Der Winkel α ist dann irgendein Zweig von arc tg z_y. Man überzeugt sich durch Ausrechnen, daß $(1+z_y^2)\alpha_{xx} - 2z_x z_y \alpha_{xy} + (1+z_x^2)\alpha_{yy} = 0$ gilt, was bekanntlich die Harmonizität von α ausdrückt: Wenn man nämlich z. B mit den isothermen Parametern

$$\xi = x, \quad \eta = \int^{(x,y)} (1 + z_x^2 + z_y^2)^{-\frac{1}{2}} [z_x z_y \, dx + (1 + z_y^2)\, dy]$$

arbeitet, ergibt sich $(1+z_y^2)(\alpha_{\xi\xi} + \alpha_{\eta\eta}) = (1+z_y^2)\alpha_{xx} - 2z_x z_y \alpha_{xy} + (1+z_x^2)\alpha_{yy}$.

Somit ist natürlich auch die in $0 < |w| < \infty$ definierte und eindeutige Funktion β harmonisch in den Variablen u und v und muß daher die Form

$$\beta(u, v) = \Re[f(w) + \lambda \log w] \tag{6}$$

besitzen. λ ist eine reelle Zahl, und $f(w)$ bedeutet eine in $0 < |w| < \infty$ konvergente Laurent-Reihe.

Wir haben nun zu zeigen, daß $f(w)$ eine Konstante sein muß. Zunächst sei $\lambda \neq 0$ angenommen. Dann wird die Funktion

$$g(w) = w\, e^{\frac{1}{\lambda} f(w)} \quad \text{mit} \quad |g(w)| = e^{\frac{1}{\lambda}\beta(u,v)} \tag{7}$$

eingeführt. Aus (5) folgen die für $0 < |w_1| = |w_2| < \infty$ gültigen Ungleichungen

$$\frac{1}{M} \leqq \left| \frac{g(w_2)}{g(w_1)} \right| \leqq M, \quad M = e^{\frac{3\pi}{|\lambda|}}. \tag{8}$$

Falls die Laurent-Reihe $f(w)$ negative Potenzen von w aufwiese, so hätte $g(w)$ bei $w = 0$ eine wesentliche Singularität. Es gäbe dann zu jeder beliebigen positiven Zahl K in der Umgebung von $w = 0$ drei Punkte w_j $(j = 1, 2, 3)$ mit $0 < |w_1| < |w_2| < |w_3| < \infty$, in denen

$$|g(w_1)| \leqq \frac{1}{K}, \quad |g(w_2)| \geqq K, \quad |g(w_3)| \leqq \frac{1}{K} \tag{9}$$

ist. Daraus und aus (8) folgte

$$\begin{cases} |g(w)| \leqq \dfrac{M}{K} & \text{für } |w| = |w_1| \text{ und für } |w| = |w_3|, \\ |g(w)| \geqq \dfrac{K}{M} & \text{für } |w| = |w_2|. \end{cases} \tag{10}$$

Indem dann z. B. $K = 2M$ gesetzt wird, entstände ein Widerspruch zum Maximumprinzip.

Eine analoge Betrachtung kann für den Punkt $w=\infty$ angestellt werden. Der Fall $\lambda=0$ erledigt sich genauso.

Aus dem Vorangehenden ergibt sich, daß $f(w)$ eine Konstante ist und α daher die Form

$$\alpha(z,\varphi)=\Theta+\Re f(w)+\lambda\log|w|=\varkappa+\lambda z+\eta(z,\varphi) \tag{11}$$

besitzt. Hierbei ist $\Re f(w)=\varkappa$ gesetzt und die Gleichheit $\Theta=\eta$ berücksichtigt.

Weil nun $\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}=\frac{\partial\eta}{\partial\varphi}=\frac{1}{W}(r^2+r_\varphi^2)>0$ gilt, muß α monoton mit φ zunehmen, was bedeutet, daß die Kurven S_z konvex sind.

Damit ist der Beweis des Hilfssatzes und — unter Berufung auf das in [1] bewiesene Resultat — auch des Satzes beendet.

Literatur

[1] NITSCHE, J. C. C.: A uniqueness theorem of BERNSTEIN's type for minimal surfaces in cylindrical coordinates. J. Rational Mech. Anal. **6**, 859–864 (1957).

[2] SHIFFMAN, M.: On surfaces of stationary area bounded by two circles or convex curves, in parallel planes. Ann. of Math. **63**, 77–90 (1956).

Dept. of Math., Inst. of Technology, Univ. of Minnesota, Minneapolis, Minn. U.S.A.

(Eingegangen am 11. April 1960)

KNESER, H.
Math. Zeitschr. 74, 293–296 (1960)

Majoranten bei einem Existenzsatz über partielle Differentialgleichungen

Herrn ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von
HELLMUTH KNESER

E. PICARD[1]) bewies als erster, daß die Differentialgleichung

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y), \tag{1}$$

gebildet mit einer stetigen Funktion f, die betreffs der letzten drei Argumente die Lipschitzsche Bedingung beschränkter Differenzenquotienten erfüllt, immer eine Lösung hat, die in einem genau angegebenen Bereich erklärt ist und angemessene Anfangsbedingungen erfüllt. Der Bereich ist ein Rechteck $a \leqq x \leqq A$, $b \leqq y \leqq B$; die Anfangsbedingungen bestehen in vorgeschriebenen Werten von z auf den Rechtecksseiten $x = a$ und $y = b$.

Ein anderer Typ von Bereich und Anfangsbedingungen ist der folgende. Das Rechteck wird von der linken oberen zur rechten unteren Ecke durchzogen von einer Kurve C: $y = Y(x)$ mit $Y' < 0$; auf ihr werden die Werte von z und einer der Ableitungen z_x und z_y – und damit auch die der anderen – vorgeschrieben. Behauptet wird die Existenz einer Lösung von (1) in einem der durch C bestimmten Teile des Rechtecks, etwa in dem rechten oberen. In diesem Falle läßt sich die Angelegenheit recht kurz abmachen[2]), wenn man sich auf eine hinreichend enge Umgebung eines beliebigen Punktes von C beschränkt; auch braucht man dann die Lipschitz-Bedingung nur in einer Umgebung der Anfangswerte von x, y, z, z_x und z_y.

Hier soll von dem vollen, nicht auf einen kleinen Bereich beschränkten Satz die Rede sein. PICARD[1]) folgt dem klassischen Majorantenschema und zieht am Ende einen eleganten funktionentheoretischen Schluß. In E. KAMKEs Standardwerk über Differentialgleichungen *reeller* Funktionen[3]) hätte dieser als ein Fremdkörper erscheinen können; vielleicht aus diesem Grunde werden an seiner Stelle sorgfältige Einzelabschätzungen durchgeführt. Man kann aber auch im Reellen dem Majorantenschema treu bleiben und gewinnt dadurch die Vorteile, die sich einzustellen pflegen, wenn ein Einzelproblem einer allgemeinen Methode untergeordnet wird.

Zunächst ist es bequem, eine gehörig differenzierbare Funktion w zu bestimmen, die die Anfangsbedingungen erfüllt, und statt z die Funktion

[1]) Note I in G. DARBOUX: Leçons sur la Théorie générale des Surfaces, Bd. 4, S. 353 bis 367. 1896.

[2]) Siehe z. B. R. COURANT u. D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik, 1. Aufl., Bd. 2, S. 319–321. 1937.

[3]) Differentialgleichungen reeller Funktionen, 2. Aufl., S. 401–410. 1945.

$z' = z - w$ in (1) einzuführen. Für sie ergibt sich eine Differentialgleichung von derselben Form wie (1) mit einer anderen Funktion f' auf der rechten Seite; dabei hat f' dieselben Eigenschaften, die von f vorausgesetzt wurden. Es genügt deshalb, die Differentialgleichung (1) mit den Anfangswerten Null zu behandeln. Zusammen mit diesen Anfangsbedingungen ist (1) gleichwertig mit der Gleichung

$$z(x,y) = \iint_G f\big(\xi,\eta,z(\xi,\eta),p(\xi,\eta),q(\xi,\eta)\big)\,d\xi\,d\eta, \tag{2}$$

in der die üblichen Zeichen p und q für z_x und z_y benutzt sind und G den Bereich

$$G\colon\quad a \leqq \xi \leqq x, \qquad Y(x) \leqq \xi \leqq y$$

bezeichnet. Im Falle der Anfangsbedingungen der ersten Art, auf den Rechtecksseiten $x = a$ und $y = b$, ist G durch das Rechteck

$$R\colon\quad a \leqq \xi \leqq x, \qquad b \leqq \eta \leqq y$$

zu ersetzen.

Nach PICARD setzt man nun

$$z_0 = 0, \tag{3}$$

$$z_{n+1} = \iint_G f\big(\xi,\eta,z_n(\xi,\eta),p_n(\xi,\eta),q_n(\xi,\eta)\big)\,d\xi\,d\eta. \tag{4}$$

Differenzieren ergibt

$$p_0 = q_0 = 0, \tag{5}$$

$$p_{n+1}(x,y) = \int_{Y(x)}^{y} f\big(x,\eta,z_n(x,\eta),p_n(x,\eta),q_n(x,\eta)\big)\,d\eta, \tag{6}$$

$$q_{n+1}(x,y) = \int_{X(y)}^{x} f\big(\xi,y,z_n(\xi,y),p_n(\xi,y),q_n(\xi,y)\big)\,d\xi \tag{7}$$

(hier ist X die Umkehrfunktion von Y), womit zugleich durch vollständige Induktion die Benutzung der Ableitungen p_n und q_n von z_n in (4), (6) und (7) gerechtfertigt ist. Die in (4), (6) und (7) auftretenden linearen und monotonen Integraloperatoren seien mit I_G, K_G und L_G bezeichnet; sollen sie sich auf das Rechteck R statt auf G beziehen, so bleibt der Anhänger G weg.

Jetzt kommt es nur noch darauf an, die gleichmäßige Konvergenz der Folgen (z_n), (p_n) und (q_n) gegen Grenzfunktionen z, p und q zu beweisen; gemäß (4), (6) und (7) sind dann p und q die Ableitungen von z, und es gilt (2). Ist m eine obere Schranke für $f(\xi,\eta,0,0,0)$ und k die Konstante in der Lipschitz-Bedingung für f, so entnimmt man aus (3) bis (7) die Abschätzungen

$$|z_1| \leqq m(A-a)(B-b) = M_0, \tag{8}$$

$$|p_1| \leqq m(B-b) = M_1, \qquad |q_1| \leqq m(A-a) = M_2, \tag{9}$$

$$|z_{n+1} - z_n| \leqq k\,I_G(|z_n - z_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|), \tag{10}$$

$$|p_{n+1} - p_n| \leqq k\,K_G(|z_n - z_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|), \tag{11}$$

$$|q_{n+1} - q_n| \leqq k\,L_G(|z_n - z_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|), \tag{12}$$

die drei letzten für $n>0$. Schreibt man

$$u_n=|z_n-z_{n-1}|+|p_n-p_{n-1}|+|q_n-q_{n-1}|, \quad u_1=|z_1|+|p_1|+|q_1|,$$
$$M=M_0+M_1+M_2,$$
$$H_G=I_G+K_G+L_G, \quad H=I+K+L,$$

so lassen sich die Ungleichungen (8) bis (12) zusammenfassen zu

$$0\leqq u_1\leqq M, \tag{13}$$

$$0\leqq u_{n+1}\leqq k\,H_G(u_n)\leqq k\,H(u_n)\,^3). \tag{14}$$

Gemäß dem Majorantenschema wird jetzt durch

$$v_1=M, \quad v_{n+1}=kH(v_n) \quad (n>0) \tag{15}$$

eine Folge von Funktionen (übrigens Polynomen) v_n erklärt, und aus (13) und (14) ergibt vollständige Induktion sofort

$$0\leqq u_n\leqq v_n.$$

Da $v_n(x, y)$ eine nicht abnehmende Funktion von x und y ist, hat man in der Reihe $v_1(A, B)+v_2(A, B)+\cdots$, wenn sie konvergiert, eine feste Majorante der Reihe $u_1+u_2+\cdots$ und damit die gleichmäßige Konvergenz der Folgen (z_n), (p_n) und (q_n). Um die Konvergenz von $v_1+v_2+\cdots$ zu beweisen, dient eine für $x\geqq a$, $y\geqq b$ erklärte Funktion $V(x, y)$ mit der Eigenschaft

$$V\geqq 1+kH(V). \tag{16}$$

Will man (16) mit dem Gleichheitszeichen befriedigen, so erhält man eine Besselsche Funktion, die auch bei PICARD[1]) versteckt vorkommt. Für die Ungleichung genügt der Ansatz

$$V(x, y)=e^{\beta(x-a+y-b)},$$

wenn man β so bestimmt, daß

$$\beta\geqq k, \quad \beta^2\geqq 2k\beta+k \tag{17}$$

ist, z. B. wenn man

$$\beta=k+\sqrt{k(k+1)}$$

setzt. Mit den Abkürzungen

$$s=e^{\beta(x-a)}-1, \quad t=e^{\beta(y-b)}-1$$

ergibt sich nämlich

$$I(V)=\beta^{-2}st,$$
$$K(V)=\beta^{-1}s(t+1),$$
$$L(V)=\beta^{-1}(s+1)t,$$
$$H(V)=\beta^{-2}st+\beta^{-1}(2st+s+t);$$

[3]) Wenn eine Funktion zunächst nur auf C und oberhalb C erklärt ist, dann aber im ganzen Rechteck benutzt wird, so soll sie unterhalb C gleich Null gesetzt werden.

und wegen $V=(s+1)(t+1)$ erhält man

$$V-1-kH(V)=(1-2k\beta^{-1}-k\beta^{-2})st+(1-k\beta^{-1})(s+t),$$

was wegen (17) nicht negativ ist. Damit ist (16) nachgewiesen. Nimmt man nun

$$v_1+\cdots+v_n\leqq MV \tag{18}$$

an, was für $n=1$ wegen (15) und $V\geqq 1$ richtig ist, so folgt

$$v_1+\cdots+v_{n+1}\leqq M+kH(v_1+\cdots+v_n)\leqq M+MkH(V)\leqq MV$$

[das letzte wegen (16)]. Damit ist (18) für alle $n\geqq 1$ bewiesen, und es folgt die Konvergenz von $v_1(A,B)+v_2(A,B)+\cdots$, die allein noch benötigt wurde.

Mit dem hier benützten Werkzeug ist auch der Eindeutigkeitssatz leicht zu beweisen. Sind z und z' zwei Lösungen derselben Gleichung (1) zu denselben Anfangsbedingungen, p, q, p', q' ihre Ableitungen, und setzt man

$$u=|z'-z|+|p'-p|+|q'-q|,$$

so wird, ähnlich wie vorher,

$$0\leqq u\leqq kH(u); \tag{19}$$

dabei ist $u=0$ auf der Kurve C. Mit $\varepsilon>0$ bildet man $w=\varepsilon V-u$. Wenn es Punkte oberhalb C gibt, in denen $w\leqq 0$ ist, so sei unter diesen Punkten (x_0, y_0) einer mit kleinster Abszisse. Im Integrationsbereich des auf (x_0, y_0) bezogenen Operators H ist dann $w\geqq 0$, auf C sogar $w>0$; daher wird

$$H(w)>0.$$

Wegen (16) und (19) ist andrerseits

$$0\geqq w(x_0,y_0)=\varepsilon V(x_0,y_0)-u(x_0,y_0)>k\varepsilon H(V)-kH(u)=kH(w).$$

Dieser Widerspruch widerlegt die Annahme, es gäbe Punkte mit $w\leqq 0$. Es ist also überall $u<\varepsilon V$. Da ε beliebig klein sein darf, ist überall $u=0$ und daher $z'=z$. Damit ist der Eindeutigkeitssatz bewiesen.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 22. April 1960)

WIELANDT, H.
Math. Zeitschr. 74, 297/298 (1960)

Über den Transitivitätsgrad von Permutationsgruppen

Herrn ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von
Helmut Wielandt

Eine der ältesten noch unbewiesenen Vermutungen der Gruppentheorie besagt, daß der Transitivitätsgrad t einer Permutationsgruppe vom Grade n, die weder alternierend noch symmetrisch ist, eine geeignete von n unabhängige Schranke t_0 ($\geqq 5$) nicht überschreiten kann. Abgesehen von einem nicht sehr umfangreichen Erfahrungsmaterial [2] stützt sich diese Vermutung im wesentlichen auf Abschätzungen der Gestalt $t<f(n)$, wobei $f(n)$ eine schwach gegen Unendlich strebende Funktion bedeutet; die beste bisher erreichte Größenordnung ist $t<3\log n$ [5]; Aussagen zahlentheoretischer Art finden sich in [3]. Im folgenden wird gezeigt:

Satz 1. *$\mathfrak{G}$ sei eine weder alternierende noch symmetrische Permutationsgruppe. Die äußere Automorphismengruppe jeder einfachen Untergruppe von $\mathfrak{G}$ sei auflösbar. Dann ist $\mathfrak{G}$ höchstens siebenfach transitiv.*

Dabei ist unter der äußeren Automorphismengruppe die Faktorgruppe der vollen Automorphismengruppe nach der Gruppe der inneren Automorphismen zu verstehen. Sollte sich die bekannte Vermutung [4] bestätigen, daß die äußere Automorphismengruppe *jeder* endlichen einfachen Gruppe auflösbar ist, so würde Satz 1 die eingangs erwähnte Vermutung als richtig erweisen (mit $t_0=7$).

Dem Beweis von Satz 1 schicken wir einen Hilfssatz (2) voraus; dabei bezeichnen wir die von $\mathfrak{G}$ permutierten Objekte mit $1, 2, \ldots, n$.

(2) *$\mathfrak{G}$ sei eine siebenfach transitive, weder alternierende noch symmetrische Permutationsgruppe des Grades n. $\mathfrak{H}$ sei die größte Untergruppe von $\mathfrak{G}$, welche jedes der Objekte $1, 2, 3, 4, 5$ fest läßt. Dann enthält $\mathfrak{H}$ einen auf den restlichen $n-5$ Objekten transitiven und regulären, elementar abelschen, aber nicht zyklischen Normalteiler $\mathfrak{M}$.*

Beweis. Wir bezeichnen die Gruppe derjenigen Permutationen aus $\mathfrak{G}$, welche $\Gamma=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ als Ganzes in sich überführen, mit $\mathfrak{L}$. Dann ist $\mathfrak{H}$ eine normale Untergruppe von $\mathfrak{L}$, und $\mathfrak{L}/\mathfrak{H}$ ist zur symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}^5$ isomorph. Wir wählen einen in $\mathfrak{H}$ enthaltenen minimalen Normalteiler $\mathfrak{M}\neq I$. Dann ist $\mathfrak{M}$ auch ein minimaler Normalteiler des Konstituenten von $\mathfrak{L}$ auf $\Delta=\{6, 7, \ldots, n\}$, den wir mit $\mathfrak{L}^\Delta$ bezeichnen. Als Obergruppe der auf Δ zweifach transitiven Gruppe $\mathfrak{H}$ ist $\mathfrak{L}^\Delta$ auf Δ zweifach transitiv. Wir können auf $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}^\Delta$ den folgenden Satz von BURNSIDE anwenden [1, § 154]:

Jeder minimale Normalteiler einer zweifach transitiven Permutationsgruppe ist entweder primitiv und einfach, oder er ist imprimitiv, regulär, elementar abelsch, aber nicht zyklisch.

Hiernach genügt es zum Beweis von (2), zu zeigen, daß unter den Voraussetzungen von (2) der erste im Satz von BURNSIDE erwähnte Fall für $\mathfrak{M}$ nicht eintreten kann. Nehmen wir an, $\mathfrak{M}$ sei primitiv und einfach. Dann kommen wir folgendermaßen zu einem Widerspruch:

(a) *Jedes Element von* $\mathfrak{L}$, *das auf* $\mathfrak{M}$ *einen inneren Automorphismus induziert, liegt in* $\mathfrak{M}$. Es genügt, dies für diejenigen Elemente V von $\mathfrak{L}$ nachzuweisen, die mit jedem Element von $\mathfrak{M}$ vertauschbar sind. Jedenfalls ist der Konstituent $V^{\Delta} \neq I$. Denn sonst würden die Konjugierten von V in $\mathfrak{L}$ die alternierende oder symmetrische Gruppe auf Γ erzeugen, also enthielte $\mathfrak{G}$ einen Zyklus des Grades 3 und damit, als dreifach transitive Gruppe, die ganze Alternierende $\mathfrak{A}^n$. Da der von I verschiedene Konstituent V^{Δ} mit der auf Δ primitiven Gruppe $\mathfrak{M}$ elementweise vertauschbar ist, ist V^{Δ} auf Δ transitiv; das gleiche gilt für jede von I verschiedene Potenz von V^{Δ}. Also ist V^{Δ} ein Zyklus von Primzahlgrad p. Da die Elemente von $\mathfrak{M}$ mit V^{Δ} vertauschbar sind, sind sie Potenzen von V^{Δ}, also ist $V^{\Delta} \in \mathfrak{M}$. Hieraus folgt $V^{\Gamma} \in \mathfrak{L}$, daher ist, wie schon gezeigt, $V^{\Gamma} = I$; demnach $V \in \mathfrak{M}$.

(b) $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ *ist auflösbar.* Ordnet man jedem Element von $\mathfrak{L}$ den Automorphismus zu, den es auf $\mathfrak{M}$ induziert, so ergibt diese Abbildung nach (a) einen Isomorphismus von $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ in die äußere Automorphismengruppe von $\mathfrak{M}$, und diese ist nach Voraussetzung auflösbar.

(c) $\mathfrak{L}/\mathfrak{H}$ ist eine Faktorgruppe von $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ und daher nach (b) auflösbar. Andererseits ist $\mathfrak{L}/\mathfrak{H}$ isomorph zu $\mathfrak{S}^5$, also nicht auflösbar. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir beweisen nun Satz 1 indirekt. Sei $\mathfrak{G}$ achtfach transitiv. Dann enthält die in (2) erklärte Gruppe $\mathfrak{H}$ einen regulären Normalteiler $\mathfrak{M}$ des Grades $m = n - 5$. Wir bezeichnen die größte Untergruppe von $\mathfrak{G}$, welche das Objekt n fest läßt, mit $\mathfrak{G}^*$. Nach dem Hilfssatz, auf $\mathfrak{G}^*$ statt $\mathfrak{G}$ angewandt, enthält die die Objekte 1, 2, 3, 4, 5 fest lassende Untergruppe $\mathfrak{H}^*$ von $\mathfrak{G}^*$ einen regulären, elementar abelschen, aber nicht zyklischen Normalteiler $\mathfrak{M}^*$ vom Grade $m - 1$. Wir bilden die Gruppe $\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*$. Sie ist zweifach transitiv, vom Grade m und von der Ordnung $m(m-1)$. In einer solchen Gruppe ist jede abelsche Untergruppe, die ein Objekt fest läßt, zyklisch [*1*, p. 335]. Also müßte $\mathfrak{M}^*$ zyklisch sein, was nicht zutrifft.

Literatur

[*1*] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order, 2nd ed. 1911, 1955.
[*2*] PARKER, E.T., and P. NIKOLAI: A search for analogues of the Mathieu groups. Math. Tables and Aids f. Comp. **12**, 38–43 (1958).
[*3*] PARKER, E. T.: On quadruply transitive groups. Pacific. J. Math. **9**, 829–836 (1959).
[*4*] SCHREIER, O., u. B. L. VAN DER WAERDEN: Die Automorphismen der projektiven Gruppen. Abh. math. Sem. Hamburg **6**, 303—322 (1928).
[*5*] WIELANDT, H.: Abschätzungen für den Grad einer Permutationsgruppe von vorgeschriebenem Transitivitätsgrad. Schriften math. Sem. u. Inst. angew. Math. Berlin **2**, 151–174 (1934).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 26. Juni 1960)

Itô, N.
Math. Zeitschr. 74, 299—301 (1960)

Zur Theorie der Permutationsgruppen vom Grad p.

Herrn Erich Kamke zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet.

Von

Noboru Itô

Das Ziel dieser Arbeit ist der Beweis von folgendem

Satz. *Es sei Ω die Menge der Ziffern $1, 2, \ldots, p$, wobei p eine Primzahl $\geqq 5$ bezeichnet. $\mathfrak{G}$ sei eine nicht auflösbare transitive Permutationsgruppe auf Ω, in der der Normalisator einer p-Sylowgruppe die Ordnung $2p$ besitzt. Dann ist $p = 2^m + 1$ und $\mathfrak{G}$ ist zu der linearen Gruppe $SL(2, 2^m)$ isomorph.*

Beweis. Nach einem bekannten Satz von Burnside ist $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv. Also zerfällt der zu $\mathfrak{G}$ gehörige Permutationscharakter in den Hauptcharakter 1 und einen irreduziblen Charakter B des Grades $p-1$. Es gilt für jedes Element G aus $\mathfrak{G}$ die Gleichung $B(G) = \alpha_1(G) - 1$. Dabei bezeichnet $\alpha_1(G)$ die Anzahl der Ziffern, die von G fest gelassen werden.

Sei $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler $> \mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}$. Es bezeichne $\mathfrak{G}(p)$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ und $\mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p)$ den Normalisator von $\mathfrak{G}(p)$ in $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}(p)$ ist zyklisch von der Ordnung p. Als eigentlicher Normalteiler einer primitiven Gruppe ist $\mathfrak{N}$ transitiv. Daher gilt $\mathfrak{N} \geqq \mathfrak{G}(p)$. Angenommen, es ist $\mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p) \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{G}(p)$. Dann zerfällt $\mathfrak{N}$ nach einem Satz von Burnside in das Produkt von $\mathfrak{G}(p)$ mit einem Normalteiler $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$: es ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}(p)\,\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}(p) \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{E}$. $\mathfrak{H}$ ist das einzige p-Sylowkomplement von $\mathfrak{N}$. Also ist $\mathfrak{H}$ normal in $\mathfrak{G}$. Weil $\mathfrak{H}$ nicht transitiv ist, gilt $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}(p)$, $\mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p) = \mathfrak{G}$. Daher hat $\mathfrak{G}$ die Ordnung $2p$ und ist auflösbar entgegen der Voraussetzung. Also haben wir $\mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p) \cap \mathfrak{N} > \mathfrak{G}(p)$ und daher $\mathfrak{N} \geqq \mathrm{Ns}\,(\mathfrak{G}(p))$, weil $|\mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p)| = 2p$. Dabei bezeichnet $|\mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p)|$ die Ordnung von $\mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p)$. Nach dem Satz von Sylow gilt aber $\mathfrak{G} : \mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p) = \mathfrak{N} : \mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p) \cap \mathfrak{N}$ und daher $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}$. Also ist $\mathfrak{G}$ einfach.

Folglich stimmt $\mathfrak{G}$ mit seiner Kommutatoruntergruppe überein. p teilt die Ordnung von $\mathfrak{G}$ nur zur ersten Potenz. $\mathfrak{G}(p)$ ist sein eigener Zentralisator in $\mathfrak{G}$. Also können wir auf $\mathfrak{G}$ die p-Blocktheorie von R. Brauer über Gruppen mit diesen Eigenschaften anwenden [2].

Da die Ordnung von $\mathrm{Ns}\,\mathfrak{G}(p)$ gleich $2p$ ist, besteht der erste p-Block $\mathsf{B}_1(p)$ von Charakteren von $\mathfrak{G}$ aus zwei irreduziblen Charakteren, die mit 1 und B übereinstimmen und je für sich eine Familie p-konjugierter Charakter bilden, und aus einer Familie von $\frac{p-1}{2}$ p-konjugierten irreduziblen Charakteren $C^{(\nu)}\left(\nu = 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$ ([1, S. 410, Theorem 2]. Unter unseren Voraussetzungen ist $l = 1$.) Alle anderen irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{G}$ gehören zu

p-Blöcken mit Defekt 0, verschwinden also für jedes p-singuläre Element von $\mathfrak{G}$. Wir setzen $\mathfrak{G}(p) = \langle P \rangle$. Dann haben wir $B(P^i) = \alpha_1(P^i) - 1 = -1$ für $i = 1, \ldots, p-1$; denn P läßt keine Ziffer fest. Für jedes p-reguläre Element G von $\mathfrak{G}$ und insbesondere für die $G \in \mathfrak{G}_1$ (die größte Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die die Ziffer 1 fest läßt) gilt die Gleichung $1 + C^{(\nu)}(G) = B(G)$ [2, (10)]. Es ist dort nach dem eben Bemerkten $\alpha = \beta = 1$, $A_1 = 1$, $B_1 = B$ und δ ermittelt man mit $G = E$ zu $\delta = +1$, also $C^{(\nu)}(G) = \alpha_1(G) - 2$. Insbesondere haben wir $C^{(\nu)}(E) = p - 2$ $\left(\nu = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$. Aus der Orthogonalitätsrelation $\sum_{\chi} \chi(P^i)\,\chi(E) = 0$, wobei χ alle irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{G}$ durchläuft, folgt $0 = \sum_{\chi} \chi(P^i)\,\chi(E) = \sum_{\chi \in \mathfrak{B}_1(p)} \chi(P^i)\,\chi(E) = 1 - (p-1) + (p-2)\sum_{\nu} C^{(\nu)}(P^i)$, also haben wir $\sum_{\nu} C^{(\nu)}(P^i) = 1$.

Sei $C^{(\nu)}$ auf $\mathfrak{G}_1$ reduzibel und $C^{(\nu)} = m_1 C_1 + m_2 C_2 + \cdots$ die Zerlegung von $C^{(\nu)}$ in irreduzible Bestandteile von $\mathfrak{G}_1$. Dann kann man etwa $C_1(E) \leqq \frac{p-2}{2}$ annehmen. Wir betrachten den Charakter C^* von $\mathfrak{G}$, der von C_1 induziert wird. Da $B = C^{(\nu)} + 1$ und $C^{(1)} = \cdots = C^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}$ auf $\mathfrak{G}_1$, so sind nach dem Reziprozitätssatz von FROBENIUS $C^{(1)}, \ldots, C^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}$ und B in C^* mit der Vielfachheit m_1 enthalten. Also haben wir die Ungleichung $C^*(E) \geqq m_1 \left(C^{(1)}(E) + \cdots + C^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}(E) + B(E)\right)$. Daraus folgt $\frac{p(p-2)}{2} \geqq \frac{p-1}{2}(p-2) + p - 1 = \frac{p(p-1)}{2}$. Das ist ein Widerspruch. Also bleibt $C^{(\nu)}$ irreduzibel auf $\mathfrak{G}_1$.

$B(G) = 1 + C^{(\nu)}(G)$ $(G \in \mathfrak{G}_1)$ ist der Charakter der Permutationsdarstellung von $\mathfrak{G}_1$ auf $\Omega - \{1\}$ also ist $\mathfrak{G}_1$ auf $\Omega - \{1\}$ zweifach transitiv und daher ist $\mathfrak{G}$ auf Ω dreifach transitiv.

Nun sei $\mathfrak{S}$ die symmetrische Gruppe der Ordnung $p!$ auf Ω und X der Charakter von $\mathfrak{S}$, der dem Diagramm $\begin{matrix} \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & & & \\ \circ & & & \end{matrix}$ entspricht. Es ist $X(S) = \frac{(\alpha_1(S)-1)(\alpha_1(S)-2)}{2} - \alpha_2(S)$, $S \in \mathfrak{S}$ [3], wobei $\alpha_2(S)$ die Anzahl der Transpositionen in der Zyklendarstellung von S bezeichnet. Insbesondere haben wir $X(E) = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ und $X(P^i) = 1$. Da $\mathfrak{G}$ dreifach transitiv ist, ist X orthogonal zu 1 und B auf $\mathfrak{G}$ [4]. Also enthält X auf $\mathfrak{G}$ einen irreduziblen Charakter aus $B_1(p)$ und zwar ein $C^{(\nu)}$. Da X bekanntlich ein rationaler Charakter ist und alle $C^{(\nu)}$ miteinander algebraisch konjugiert sind, umfaßt dann X alle $C^{(\nu)}$. Vergleichen wir die Grade der beiden Charakter X und $\sum_{\nu=1}^{\frac{p-1}{2}} C^{(\nu)}$, so haben wir $X = \sum_{\nu=1}^{\frac{p-1}{2}} C^{(\nu)}$ auf $\mathfrak{G}$. Insbesondere erhalten wir für jedes p-reguläre Element G aus $\mathfrak{G}$ die Gleichung $\frac{(\alpha_1(G)-1)(\alpha_1(G)-2)}{2} - \alpha_2(G)$

$= \frac{p-1}{2}(\alpha_1(G)-2)$. Daraus folgt $\frac{(p-\alpha_1(G))(\alpha_1(G)-2)}{2}+\alpha_2(G)=0$. Dann haben wir $G=E$ für jedes Element G mit $\alpha_1(G) \leqq 3$. Also läßt jedes Element $G \neq E$ aus $\mathfrak{G}$ höchstens zwei Ziffern fest. Da $\mathfrak{G}$ dreifach transitiv ist, haben wir $g=p(p-1)(p-2)$. Dann ist nach einem bekannten Satz von ZASSENHAUS [5] $\mathfrak{G} \cong SL(2, 2^m)$ mit $2^m=p-1$.

Literatur

[1] BRAUER, R.: On groups whose order contains a prime number to the first power I. Amer. J. Math. **64**, 401–420 (1942).

[2] BRAUER, R.: On permutation groups of prime degree and related classes of groups. Ann. of Math. **44**, 57–79 (1943).

[3] FROBENIUS, G.: Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe. Sitzungsber. der Preuß. Akad. der Wiss. 516–534 (1900).

[4] FROBENIUS, G.: Über die Charaktere der mehrfach transitiven Gruppen. Sitzungsber. der Preuß. Akad. der Wiss. 528–571 (1904).

[5] ZASSENHAUS, H.: Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11**, 17–40 (1935).

Dept. of Math., University of Nagoya (Japan)

(Eingegangen am 3. Mai 1960)

EHLICH, H.
Math. Zeitschr. 74, 302–318 (1960)

Über zwei Randwertaufgaben für nichtlineare Differentialgleichungssysteme

Herrn ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

HARTMUT EHLICH

§1. Aufgabenstellung

1. In Zusammenhang mit einem chemischen Problem haben Herr M. MÜLLER und ich[1]) für das System

$$\begin{cases} y_1' = -k_1 y_1 (C + y_1 + y_2) \\ y_2' = -k_2 y_2 (C + y_1 + y_2) \end{cases} \qquad C \geqq 0; \quad k_1, k_2 > 0 \tag{1.1}$$

die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} y_1(\xi_1) > 0, & y_2(\xi_1) > 0 \\ y_1(\xi_1) + y_2(\xi_1) = c_1, & y_1(\xi_2) + y_2(\xi_2) = c_2 \end{cases} \qquad \xi_2 > \xi_1, \; c_1 > 0, \; c_2 > 0 \tag{1.2}$$

behandelt, die, falls $k_1 \neq k_2$ ist, für jedes $\xi_2 > \xi_1$, unter gewissen Einschränkungen für c_2, genau eine Lösung besitzt; wir haben insbesondere gezeigt, wie man bei bekannten c_1 und c_2 die einzelnen Anfangswerte $y_1(\xi_1)$ und $y_2(\xi_1)$ berechnen kann.

Verallgemeinerungen dieser Fragestellung sollen in der vorliegenden Note für das nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$y_\nu' = -k_\nu y_\nu \Big(C + \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda\Big) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

untersucht werden. Dabei seien die k_ν positive Konstanten und C eine nicht negative Konstante; die Numerierung wählen wir so, daß

$$0 < k_n \leqq k_{n-1} \leqq \cdots \leqq k_1 \tag{1.4}$$

ist. Sind ϱ, σ, τ verschiedene der Zahlen $1, \ldots, n$ mit $\varrho < \sigma < \tau$, so behandeln wir[2])

---

[1]) EHLICH, H., u. MÜLLER, M.: Über die Differentialgleichungen der bimolekularen Reaktion 2. Ordnung. S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss., math.-nat. Kl., 4. Abh., **1959**, 187–218.

[2]) Leere Summen sind wie üblich gleich Null zu setzen, leere Bedingungen als nicht gestellt anzusehen.

(*a*) *die Randwertaufgabe: Es sei* $n \geqq 2, \eta_\nu \geqq 0$ *und fest für* $\nu = 1, \ldots, n, \nu \neq \varrho, \sigma$. *Unter welchen Bedingungen für* c_1, c_2 *und* ξ_1, ξ_2 *gibt es ein Integral* $\mathfrak{y}(x) = \big(y_1(x), \ldots, y_n(x)\big)$ *des Systems* (1.3), *so daß für* $\nu = 1, \ldots, n, \nu \neq \varrho, \sigma$

$$y_\nu(\xi_1) = \eta_\nu$$

und für verschiedene Zahlen $\nu_\lambda \in \{1, \ldots, n\}$, $(\lambda = 1, \ldots, m,\ m \leqq n-2),\ \nu_\lambda \neq \varrho, \sigma$

$$\sum_{\lambda=1}^{m} y_{\nu_\lambda}(\xi_\mu) + y_\varrho(\xi_\mu) + y_\sigma(\xi_\mu) = c_\mu \qquad (\mu = 1, 2)$$

sowie

$$y_\varrho(\xi_1) \geqq 0, \qquad y_\sigma(\xi_1) \geqq 0$$

ist;

(*b*) *die Interpolationsaufgabe: Es sei* $n \geqq 3$, $\eta_\nu \geqq 0$ *für* $\nu = 1, \ldots, n, \nu \neq \varrho, \sigma, \tau$. *Unter welchen Bedingungen für* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$, ξ_1, ξ_2, ξ_3 $(\xi_1 < \xi_2 \leqq \xi_3)$ *gibt es ein Integral* $\mathfrak{y}(x)$ *von* (1.3), *so daß*

$$y_\nu(\xi_1) = \eta_\nu \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, n, \qquad \nu \neq \varrho, \sigma, \tau$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu(\xi_\mu) = c_\mu \qquad (\mu = 1, 2, 3)$$

mit nichtnegativen Anfangswerten $y_\varrho(\xi_1)$, $y_\sigma(\xi_1)$, $y_\tau(\xi_1)$ *ist?*[3])

Die Randwertaufgabe (1.2) für das System (1.1) ist für $n = 2$ in der Aufgabe (*a*) enthalten.

2. Die rechten Seiten des Systems (1.3) besitzen stetige partielle Ableitungen nach allen y_ν; daher gibt es durch jeden Punkt $(\xi_1, \vec{\eta}) = (\xi_1, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ des $(n+1)$-dimensionalen $(x, \mathfrak{y})$-Raumes genau ein Integral. Setzen wir

$$K_\nu = \frac{k_\nu}{k_1} \qquad \nu = 1, \ldots, n, \tag{1.5}$$

so erhalten wir dieses Integral durch

$$y_\nu(x) = \eta_\nu e^{K_\nu y(x)} \qquad \nu = 1, \ldots, n, \tag{1.6}$$

wo $y(x)$ das durch den Punkt $(\xi_1, 0)$ gehende, eindeutig bestimmte Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = -k_1\Big(C + \sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu e^{K_\nu y}\Big) \tag{1.7}$$

ist. Denn nach (1.5), (1.6) und (1.7) ist für $\nu = 1, \ldots, n$

$$y_\nu'(x) = \eta_\nu e^{K_\nu y(x)} K_\nu\, y'(x) = y_\nu(x)\, K_\nu\, y'(x) = -\,k_\nu\, y_\nu(x)\,\Big(C + \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda(x)\Big).$$

Da aus $y(\xi_1) = 0$ auch $y_\nu(\xi_1) = \eta_\nu$ folgt, stellen die durch (1.6) definierten Funktionen $y_\nu(x)$ das durch den Punkt $(\xi_1, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ gehende Integral von (1.3) dar. Daher lassen sich die Aufgaben (*a*) und (*b*) wie folgt formulieren: Unter welchen Bedingungen für c_2 und ξ_2, bzw. c_2, c_3, ξ_2, ξ_3 gibt es

[3]) Die Formulierung der Aufgaben (*a*) und (*b*) wird einfacher, wenn man die Normierung $\varrho = 1$, $\sigma = 2$, $\tau = 3$ einführt. Für die Rechnungen erweist sich jedoch die Normierung (1.4) als zweckmäßig.

(a_1) nicht negative Zahlen $\eta_\varrho, \eta_\sigma$ und ein Integral $y(x)$ von (1.7) mit $y(\xi_1)=0$ — die rechte Seite der Differentialgleichung hängt von η_ϱ und η_σ ab —, so daß für verschiedene Zahlen $\nu_\lambda \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda = 1, \ldots, m$, $\nu_\lambda \neq \varrho, \sigma$

$$\sum_{\lambda=1}^{m} \eta_{\nu_\lambda} e^{K_{\nu_\lambda} y(\xi_\mu)} + \eta_\varrho e^{K_\varrho y(\xi_\mu)} + \eta_\sigma e^{K_\sigma y(\xi_\mu)} = c_\mu, \qquad \mu = 1, 2$$

ist, und

(b_1) nichtnegative Zahlen $\eta_\varrho, \eta_\sigma, \eta_\tau$ und ein Integral $y(x)$ von (1.7) mit $y(\xi_1)=0$ — jetzt ist die rechte Seite der Differentialgleichung von η_ϱ, η_σ und η_τ abhängig —, so daß

$$\sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu e^{K_\nu y(\xi_\mu)} = c_\mu, \qquad \mu = 1, 2, 3$$

ist.

3. Da aus $\eta_\nu = 0$ nach (1.6) $y_\nu(x) \equiv 0$ folgt, setzen wir im folgenden voraus, daß die „*bekannten* η_ν" in (1.7) positiv sind, daß also

$$\text{(1.8)} \qquad \eta_\nu > 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, n, \quad \begin{cases} \nu \neq \varrho, \sigma & \text{für } (a) \text{ und } (a_1) \\ \nu \neq \varrho, \sigma, \tau & \text{für } (b) \text{ und } (b_1) \end{cases}$$

ist. Ferner ergibt sich aus (1.4) und (1.5)

$$\text{(1.9)} \qquad 0 < K_n \leqq K_{n-1} \leqq \cdots \leqq K_1 = 1.$$

4. Man erkennt sofort: *Es gibt höchstens dann eine Lösung der Aufgaben (a_1) und (b_1), wenn*

$$\text{(1.10)} \qquad c_1 \geqq \sum_{\lambda=1}^{m} \eta_{\nu_\lambda} \quad bzw. \quad c_1 \geqq \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \varrho, \sigma, \tau}}^{n} \eta_\nu$$

ist. Steht dabei in einer der beiden Ungleichungen (1.10) das Gleichheitszeichen, so ist $\eta_\varrho = \eta_\sigma = 0$ bzw. $\eta_\varrho = \eta_\sigma = \eta_\tau = 0$ zu wählen. Das Integral $y_0(x)$ von (1.7) mit $y_0(\xi_1) = 0$ ist in diesen Fällen eindeutig bestimmt. Wir erhalten es aus

$$\int_0^{y_0} \frac{dt}{C + \sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu e^{K_\nu t}} = -k_1(x - \xi_1).$$

Da der Integrand für alle $t > 0$ oberhalb einer positiven Schranke bleibt, existiert $y_0(x)$ für alle $x > \xi_1$, ist eine eigentlich monoton fallende Funktion und es ist $\lim_{x \to \infty} y_0(x) = -\infty$. Es gilt also:

Steht in der ersten Ungleichung (1.10) *das Gleichheitszeichen, so sind die Randwertaufgaben* (*a*) *und* (a_1) *genau dann lösbar — und zwar eindeutig lösbar —, wenn zwischen ξ_2 und c_2 die Beziehung*

$$c_2 = \sum_{\lambda=1}^{m} \eta_{\nu_\lambda} e^{K_{\nu_\lambda} y_0(\xi_2)}$$

gilt. Steht in der zweiten Ungleichung (1.10) *das Gleichheitszeichen, so sind die Randwertaufgaben* (b) *und* (b_1) *genau dann lösbar — und zwar eindeutig lösbar —, wenn zwischen* c_2, c_3 *und* $\xi_2, \xi_3 > \xi_1$ *die Beziehungen*

$$c_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu e^{K_\nu \gamma_\nu(\xi_\mu)} \quad \text{für} \quad \mu = 2, 3$$

gelten.

Für die weiteren Untersuchungen nehmen wir daher an, daß in (1.10) die Ungleichheitszeichen gelten.

§ 2. Hilfsfunktionen

1. Bei der Untersuchung der beiden Randwertaufgaben (a_1) und (b_1) benötigen wir mehrmals Eigenschaften verschiedener Funktionen. Diese sollen der Übersichtlichkeit halber in diesem Paragraphen hergeleitet und zusammengestellt werden.

Es sei v eine reelle Variable mit $-\infty < v \leqq 0$. Der Differentiationsstrich bezeichne bei allen auftretenden Funktionen die Ableitung nach v. $\vec{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ sei ein Vektor mit $\eta_\nu \geqq 0$ und mindestens einem $\eta_\nu > 0$. $\mathfrak{M} = \{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$ sei eine Teilmenge von $\mathfrak{N} = \{1, \ldots, n\}$ mit $\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_m$ und $\vec{\eta}_{\mathfrak{M}} = (\eta_{\mathfrak{M},1}, \ldots, \eta_{\mathfrak{M},n})$ der aus $\vec{\eta}$ entstehende Vektor, wenn

$$\eta_{\mathfrak{M},\nu} = \begin{cases} \eta_\nu & \text{für} \quad \nu \in \mathfrak{M} \\ 0 & \text{für} \quad \nu \notin \mathfrak{M} \end{cases}$$

gesetzt wird. Wir betrachten nur solche Teilmengen $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{N}$, für die $\vec{\eta}_{\mathfrak{M}}$ nicht der Nullvektor ist, d.h. für die mindestens ein $\eta_{\mathfrak{M},\nu} > 0$ ist. Ferner bezeichnen ϱ, σ, τ wie bisher drei verschiedenen Zahlen von $\mathfrak{N}$, mit $\varrho < \sigma < \tau$, für die wir in diesem Paragraphen noch

$$K_\varrho > K_\sigma > K_\tau \tag{2.1}$$

voraussetzen.

2. Zunächst untersuchen wir die Funktionen

$$g_1(v, \varrho, \sigma, \tau) = \begin{cases} \dfrac{e^{K_\varrho v} - e^{K_\tau v}}{e^{K_\sigma v} - e^{K_\tau v}} & \text{für} \quad -\infty < v < 0 \\ \dfrac{K_\varrho - K_\tau}{K_\sigma - K_\tau} & \text{für} \quad v = 0 \end{cases}$$

und

$$g_2(v, \varrho, \sigma, \tau) = e^{(K_\sigma - K_\varrho)v} g_1(v, \varrho, \sigma, \tau).$$

Nach (2.1) ist für $-\infty < v < 0$ stets

$$e^{K_\varrho v} - e^{K_\sigma v} < 0, \quad e^{K_\varrho v} - e^{K_\tau v} < 0, \quad e^{K_\sigma v} - e^{K_\tau v} < 0, \tag{2.2}$$

so daß $g_1(v, \varrho, \sigma, \tau)$ und $g_2(v, \varrho, \sigma, \tau)$ für $-\infty < v \leqq 0$ positiv sind. Ferner ist

$$\lim_{v \to 0-} g_1(v, \varrho, \sigma, \tau) = g_1(0, \varrho, \sigma, \tau) = g_2(0, \varrho, \sigma, \tau).$$

Für $-\infty<v<0$ ergibt sich mit $K_\varrho-K_\tau=\alpha$, $K_\sigma-K_\tau=\beta$

$$g_1(v,\varrho,\sigma,\tau)=\frac{e^{\alpha v}-1}{e^{\beta v}-1},\qquad g_2(v,\varrho,\sigma,\tau)=\frac{1-e^{-\alpha v}}{1-e^{-\beta v}}$$

und daher

$$\begin{aligned}(e^{\beta v}-1)^2 g_1'(v,\varrho,\sigma,\tau)&=-\alpha e^{\alpha v}(1-e^{\beta v})+\beta e^{\beta v}(1-e^{\alpha v})\\&=\alpha\beta e^{(\alpha+\beta)v}\Big(\frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta v})-\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha v})\Big)\\&=\alpha\beta e^{(\alpha+\beta)v}\int_0^v(e^{-\beta u}-e^{-\alpha u})\,du\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(1-e^{-\beta v})^2 g_2'(v,\varrho,\sigma,\tau)&=\alpha e^{-\alpha v}(1-e^{-\beta v})-\beta e^{-\beta v}(1-e^{-\alpha v})\\&=\alpha\beta e^{-(\alpha+\beta)v}\int_0^v(e^{\beta u}-e^{\alpha u})\,du.\end{aligned}$$

Wegen (2.1) ist $\alpha>\beta>0$ und daher nach (2.2) für $v<0$

$$g_1'(v,\varrho,\sigma,\tau)>0,\qquad g_2'(v,\varrho,\sigma,\tau)<0, \tag{2.3}$$

d.h. *in* $-\infty<v\leqq 0$ *ist* g_1 *eine eigentlich monoton wachsende,* g_2 *eine eigentlich monoton fallende Funktion von* v.

3. Für jede der in 1. eingeführten Mengen $\mathfrak{M}\subseteqq\mathfrak{N}$ definieren wir die Funktionen

$$h(v,\vec{\eta}_{\mathfrak{M}})=h_{\mathfrak{M}}(v)=C+\sum_{\nu=1}^{n}\eta_{\mathfrak{M},\nu}e^{K_\nu v}=C+\sum_{\lambda=1}^{m}\eta_{\nu_\lambda}e^{K_{\nu_\lambda}v},\qquad C\geqq 0. \tag{2.4}$$

Da nach unseren allgemeinen Vorbemerkungen in 1. $\eta_{\mathfrak{M},\nu}\geqq 0$ und mindestens ein $\eta_{\mathfrak{M},\nu}>0$ ist, erhalten wir für $v\leqq 0$

$$\begin{cases}0<h_{\mathfrak{M}}(v)\leqq h_{\mathfrak{N}}(v)\\0<h_{\mathfrak{M}}'(v)\leqq h_{\mathfrak{N}}'(v)\\0<h_{\mathfrak{M}}''(v)\leqq h_{\mathfrak{N}}''(v),\end{cases} \tag{2.5}$$

so daß auch die Funktionen

$$H_{\mathfrak{M}}(v,\varrho,\sigma)=\frac{e^{K_\varrho v}-e^{K_\sigma v}}{h_{\mathfrak{M}}'(v)} \tag{2.6}$$

für alle $v\leqq 0$ definiert und differenzierbar sind. Setzen wir

$$v_{\mathfrak{M}}(\varrho,\sigma)=\begin{cases}\dfrac{1}{K_\varrho-K_\sigma}\log\dfrac{K_\sigma}{K_\varrho} & \text{für}\quad K_\sigma>K_{\nu_m}\\ -\infty & \text{für}\quad K_\sigma\leqq K_{\nu_m},\end{cases} \tag{2.7}$$

so gilt

Hilfssatz 1. *Für* $v_{\mathfrak{M}}(\varrho,\sigma)<v\leqq 0$ *ist* $H_{\mathfrak{M}}'(v,\varrho,\sigma)>0$. *Ist dabei* $K_\sigma>K_{\nu_m}$, *also* $v_{\mathfrak{M}}(\varrho,\sigma)>-\infty$, *so ist* $H_{\mathfrak{M}}'(v,\varrho,\sigma)$ *auch für* $v=v_{\mathfrak{M}}(\varrho,\sigma)$ *positiv, kann aber für hinreichend kleine* v *negativ werden.*

Beweis. Da

$$(2.8)\quad \begin{cases} h'^2_{\mathfrak{M}}(v)\, H'_{\mathfrak{M}}(v,\varrho,\sigma) = (K_\varrho e^{K_\varrho v} - K_\sigma e^{K_\sigma v})\, h'_{\mathfrak{M}}(v) - (e^{K_\varrho v} - e^{K_\sigma v})\, h''_{\mathfrak{M}}(v) \\ \qquad = \sum_{\lambda=1}^{m} \eta_{\nu_\lambda} K_{\nu_\lambda} e^{K_{\nu_\lambda} v} \{(K_\varrho - K_{\nu_\lambda})\, e^{K_\varrho v} - (K_\sigma - K_{\nu_\lambda})\, e^{K_\sigma v}\} \end{cases}$$

ist, ist wegen (2.2) und (2.5) sicher $H'_{\mathfrak{M}}(v,\varrho,\sigma)>0$ für $(K_\varrho e^{K_\varrho v} - K_\sigma e^{K_\sigma v}) \geqq 0$, d.h. für $v \geqq \frac{1}{K_\varrho - K_\sigma} \log \frac{K_\sigma}{K_\varrho}$; ist nun $K_\sigma \leqq K_{\nu_m}$, so folgt nach 1. und (1.9) $K_\sigma - K_{\nu_\lambda} \leqq 0$ für $\lambda = 1, \ldots, m$, nach (2.2) also

$$h'^2_{\mathfrak{M}}(v)\, H'_{\mathfrak{M}}(v,\varrho,\sigma) \geqq \sum_{\lambda=1}^{m} \eta_{\nu_\lambda} K_{\nu_\lambda} e^{K_{\nu_\lambda} v} (K_\varrho - K_\sigma)\, e^{K_\varrho v} > 0 \quad \text{für} \quad 0 \geqq v > -\infty.$$

Daß für $v_{\mathfrak{M}} > -\infty$ $H'_{\mathfrak{M}}(v,\varrho,\sigma)$ negativ werden kann, sieht man so: Ist in diesem Fall $\eta_{\nu_m} > 0$ und $K_{\nu_1} > K_{\nu_2} > \cdots > K_{\nu_m}$, so existiert folgender Grenzwert und ist nach (2.8) gleich

$$\lim_{v \to -\infty} h'^2_{\mathfrak{M}}(v)\, H'_{\mathfrak{M}}(v,\varrho,\sigma)\, e^{-(K_\sigma + K_{\nu_m}) v} = -(K_\sigma - K_{\nu_m}) K_{\nu_m} \eta_{\nu_m} < 0.$$

In einem Intervall $-\infty < v < v_1$ ist daher $H'_{\mathfrak{M}}(v,\varrho,\sigma) < 0$.

4. Die Funktion

$$g_3(v) = \frac{K_\varrho^2 - K_\tau^2}{K_\sigma^2 - K_\tau^2} - g_2(v,\varrho,\sigma,\tau)$$

ist nach (2.3) für $-\infty < v \leqq 0$ eine im strengen Sinn monoton wachsende Funktion. Da $g_3(0) = g_2(0,\varrho,\sigma,\tau) \left\{ \frac{K_\varrho + K_\tau}{K_\sigma + K_\tau} - 1 \right\} > 0$ und $\lim_{v \to -\infty} g_3(v) = -\infty$ ist, besitzt $g_3(v)$ in $(-\infty, 0)$ genau eine Nullstelle $w = w(\varrho,\sigma,\tau)$. Wir wollen zeigen, daß mit

$$(2.9)\qquad v(\varrho,\sigma,\tau) = \frac{1}{K_\varrho - K_\sigma} \log \frac{K_\sigma}{K_\varrho}$$

die Abschätzung $w(\varrho,\sigma,\tau) < v(\varrho,\sigma,\tau)$[4]) gilt, daß also für $v(\varrho,\sigma,\tau) \leqq v \leqq 0$

$$(2.10)\qquad 0 < g_3\big(v(\varrho,\sigma,\tau)\big) \leqq g_3(v)$$

ist.. Da nach (2.9)

$$e^{-K_\sigma v(\varrho,\sigma,\tau)} = \frac{K_\sigma}{K_\varrho}\, e^{-K_\varrho v(\varrho,\sigma,\tau)}$$

gilt, ist der linke Teil der Doppelungleichung (2.10) nach der Definition von g_2 und g_3 gleichwertig mit jeder der drei folgenden Ungleichungen

$$(K_\varrho^2 - K_\tau^2)\,(1 - e^{(K_\tau - K_\sigma) v(\varrho,\sigma,\tau)}) - (K_\sigma^2 - K_\tau^2)\,(1 - e^{(K_\tau - K_\varrho) v(\varrho,\sigma,\tau)}) < 0,$$

$$(K_\varrho^2 - K_\sigma^2) + e^{(K_\tau - K_\varrho) v(\varrho,\sigma,\tau)} \left(-K_\tau^2 + K_\sigma^2 - \frac{K_\sigma}{K_\varrho} (K_\varrho^2 - K_\tau^2) \right) < 0,$$

$$(K_\varrho - K_\tau) \log \frac{K_\sigma}{K_\varrho} - (K_\varrho - K_\sigma) \log \frac{K_\varrho K_\sigma + K_\tau^2}{K_\varrho^2 + K_\varrho K_\sigma} < 0.$$

---

[4]) Es gilt aber nicht immer $w(\varrho,\sigma,\tau) < \frac{1}{K_\varrho - K_\tau} \log \frac{K_\tau}{K_\varrho}$, wie die Beispiele a) $K_\varrho = 1$, $K_\sigma = \frac{1}{2}$, $K_\tau = \frac{1}{4}$ und b) $K_\varrho = 1$, $K_\sigma = \frac{1}{3}$, $K_\tau = \frac{1}{10}$ zeigen.

Setzen wir zur Abkürzung $K_\varrho = a$, $K_\tau = b$, $K_\sigma = x$ und betrachten wir dann die linke Seite der letzten Ungleichung als Funktion $G(x)$ in $\langle b, a\rangle$, so erhalten wir

a) $G(b) = G(a) = 0$,

b) $$\frac{d^2G}{dx^2} = (a-b)\left\{-\frac{1}{x^2} + \frac{2(a+b)}{(ax+b^2)(x+a)} + \frac{(a-x)(a+b)(a^2+2ax+b^2)}{(ax+b^2)^2(x+a)^2}\right\}$$

$$\geqq (a-b)\left\{-\frac{1}{x^2} + \frac{2(a+b)}{(ax+b^2)(a+x)} + \frac{(a-x)(a+b)}{x(ax+b^2)(a+x)}\right\}$$

$$= (a-b)\left\{-\frac{1}{x^2} + \frac{a+b}{x(ax+b^2)}\right\} > 0 \quad \text{für} \quad x > b.$$

$\frac{dG}{dx}$ ist also eine in $\langle b, a\rangle$ eigentlich monoton wachsende Funktion und hat in $\langle b, a\rangle$ höchstens eine, nach dem Satz von ROLLE daher in (b, a) genau eine Nullstelle v_0. In $\langle b, v_0\rangle$ ist deshalb $G(x)$ monoton fallend, in $\langle v_0, a\rangle$ monoton wachsend, insbesondere ist also wegen (2.1) $G(K_\sigma) < 0$.

Für die in (2.7) und (2.9) definierten Zahlen erhalten wir nun

$$v_{\mathfrak{M}}(\sigma, \tau) \leqq v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \tau) \leqq v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma) \leqq v(\varrho, \sigma, \tau). \tag{2.11}$$

Für $K_\tau \leqq K_{\nu_m}$, also $v_{\mathfrak{M}}(\sigma, \tau) = v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \tau) = -\infty$ ist dies klar, da in diesem Fall auch $v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma) \geqq -\infty$ ist. Ist aber $K_\tau > K_{\nu_m}$, so erhalten wir aus

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y-x}\log\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{(y-x)^2}\left(\log\left(1+\frac{y-x}{x}\right) - \frac{y-x}{x}\right) < 0 \quad \text{für} \quad y > x$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y-x}\log\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{(y-x)^2}\left(\log\left(1+\frac{x-y}{y}\right) - \frac{x-y}{y}\right) < 0 \quad \text{für} \quad y > x$$

bei Beachtung von (2.1)

$$\frac{1}{K_\sigma - K_\tau}\log\frac{K_\tau}{K_\sigma} < \frac{1}{K_\varrho - K_\tau}\log\frac{K_\tau}{K_\varrho} < \frac{1}{K_\varrho - K_\sigma}\log\frac{K_\sigma}{K_\varrho},$$

also (2.11) unter Ausschluß des Gleichheitszeichens.

Nach Hilfssatz 1 ist die Funktion $\frac{H'_{\mathfrak{M}}(v, \varrho, \tau)}{H'_{\mathfrak{M}}(v, \sigma, \tau)}$ für $v_{\mathfrak{M}}(\sigma, \tau) < v \leqq 0$ definiert. Wir beweisen

Hilfssatz 2. *Für $v(\varrho, \sigma, \tau) \leqq v \leqq 0$ ist $\frac{H'_{\mathfrak{M}}(v, \varrho, \tau)}{H'_{\mathfrak{M}}(v, \sigma, \tau)}$ eine eigentlich monoton wachsende Funktion.*

Beweis. Nach (2.8) ist

$$\frac{H'_{\mathfrak{M}}(v, \varrho, \tau)}{H'_{\mathfrak{M}}(v, \sigma, \tau)} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu K_\nu e^{K_\nu v}\left((K_\varrho - K_\nu)e^{K_\varrho v} - (K_\tau - K_\nu)e^{K_\tau v}\right)}{\sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu K_\nu e^{K_\nu v}\left((K_\sigma - K_\nu)e^{K_\sigma v} - (K_\tau - K_\nu)e^{K_\tau v}\right)}.$$

Setzen wir zur Abkürzung den nach Hilfssatz 1 und (2.11) für $v(\varrho, \sigma, \tau) \leqq v \leqq 0$ positiven Nenner $= N(v)$, so erhalten wir nach Umordnung der Summanden

$$N^2(v)\,\frac{d}{dv}\left(\frac{H'_{\mathfrak{M}}(v, \varrho, \tau)}{H'_{\mathfrak{M}}(v, \sigma, \tau)}\right) = \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} \eta_\lambda \eta_\nu K_\lambda K_\nu e^{(K_\lambda + K_\nu)v} L_{\lambda\nu}(v)$$

mit

$$L_{\lambda\nu}(v) = \{(K_\varrho^2 - K_\lambda^2)\, e^{K_\varrho v} - (K_\tau^2 - K_\lambda^2)\, e^{K_\tau v}\}\{(K_\sigma - K_\nu)\, e^{K_\sigma v} - (K_\tau - K_\nu)\, e^{K_\tau v}\} -$$
$$- \{(K_\sigma^2 - K_\lambda^2)\, e^{K_\sigma v} - (K_\tau^2 - K_\lambda^2)\, e^{K_\tau v}\}\{(K_\varrho - K_\nu)\, e^{K_\varrho v} - (K_\tau - K_\nu)\, e^{K_\tau v}\}$$
$$= -(e^{K_\sigma v} - e^{K_\tau v})\, g_1'(v, \varrho, \sigma, \tau)\{(K_\sigma^2 e^{K_\sigma v} - K_\tau^2 e^{K_\tau v}) - K_\lambda^2 (e^{K_\sigma v} - e^{K_\tau v})\} +$$
$$+ (K_\sigma^2 - K_\tau^2)\, e^{K_\varrho v}\, g_3(v)\{(K_\sigma - K_\nu)\, e^{K_\sigma v} - (K_\tau - K_\nu)\, e^{K_\tau v}\}.$$

Wegen

$$(K_\sigma^2 e^{K_\sigma v} - K_\tau^2 e^{K_\tau v}) \geqq K_\tau (K_\sigma e^{K_\sigma v} - K_\tau e^{K_\tau v})$$

ist hier nach (2.1), (2.2), (2.3), (2.10), (2.11) $L_{\lambda\nu}(v)$ und damit auch $\frac{d}{dv}\left(\frac{H'_{\mathfrak{R}}(v, \varrho, \tau)}{H'_{\mathfrak{R}}(v, \sigma, \tau)}\right)$ für $v(\varrho, \sigma, \tau) \leqq v \leqq 0$ positiv.

5. Mit Hilfe der bisher hergeleiteten Formeln und Sätze läßt sich nun leicht zeigen:

Hilfssatz 3. *Für* $v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma) < v < 0$ *ist*

$$H_{\mathfrak{M}}(v, \varrho, \sigma) + h_{\mathfrak{N}}(v) \int_0^v \frac{e^{K_\varrho u} - e^{K_\sigma u}}{h_{\mathfrak{N}}^3(u)}\, du < 0 \tag{2.12}$$

und für $v(\varrho, \sigma, \tau) \leqq v < 0$ *existiert*

$$M(v, \varrho, \sigma, \tau) = \frac{\int_0^v h_{\mathfrak{N}}^{-1}(u)\, H'_{\mathfrak{N}}(u, \sigma, \tau)\, du}{\int_0^v h_{\mathfrak{N}}^{-1}(u)\, H'_{\mathfrak{N}}(u, \varrho, \tau)\, du} \tag{2.13}$$

und ist eine eigentlich monoton fallende Funktion. Für $v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma) > -\infty$ *gilt* (2.12) *auch für* $v = v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma)$, *aber nicht in allen Fällen für alle* $v > -\infty$. *Ebenso ist* $M(v, \varrho, \sigma, \tau)$ *nicht stets für alle* $v < 0$ *eine monoton fallende Funktion.*

Beweis. a) Wegen $v < 0$ ist nach (2.2), (2.5), (2.6) und Hilfssatz 1 für $v > v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma)$

$$H_{\mathfrak{M}}(v, \varrho, \sigma) + h_{\mathfrak{N}}(v) \int_0^v h_{\mathfrak{N}}^{-2}(u)\,(e^{K_\varrho u} - e^{K_\sigma u})\, du$$
$$\leqq H_{\mathfrak{M}}(v, \varrho, \sigma) + h_{\mathfrak{N}}(v) \int_0^v \frac{h'_{\mathfrak{N}}(u)}{h_{\mathfrak{N}}^3(u)}\, H_{\mathfrak{M}}(u, \varrho, \sigma)\, du$$
$$= h_{\mathfrak{N}}(v) \int_0^v h_{\mathfrak{N}}^{-1}(u)\, H'_{\mathfrak{M}}(u, \varrho, \sigma)\, du < 0,$$

und für $v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma) > -\infty$ gilt dies offensichtlich auch für $v = v_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma)$.

b) Bezeichnen wir den nach Hilfssatz 1 für $v > v_{\mathfrak{N}}(\varrho, \tau)$ negativen Nenner von $M(v, \varrho, \sigma, \tau)$ kurz mit $N^*(v)$, so ergibt sich

$$h_{\mathfrak{N}}(v)\, N^{*2}(v)\, M'(v, \varrho, \sigma, \tau)$$
$$= \int_0^v h_{\mathfrak{N}}^{-1}(u)\{H'_{\mathfrak{N}}(v, \sigma, \tau)\, H'_{\mathfrak{N}}(u, \varrho, \tau) - H'_{\mathfrak{N}}(v, \varrho, \tau)\, H'_{\mathfrak{N}}(u, \sigma, \tau)\}\, du.$$

Da die geschweifte Klammer nach Hilfssatz 2 für $v(\varrho,\sigma,\tau)\leqq u<0$ stets positiv ist, ist in diesem Intervall $M'(v,\varrho,\sigma,\tau)<0$, also $M(v,\varrho,\sigma,\tau)$ eine eigentlich monoton fallende Funktion.

c) Für $v_{\mathfrak{R}}(\varrho,\sigma)>-\infty$ folgt nach (2.7) $K_\sigma>K_{\nu_m}$. Ist nun weiter $\eta_{\nu_m}>0$ und $C>0$, so ergibt sich

$$\lim_{v\to-\infty} H_{\mathfrak{R}}(v,\varrho,\sigma)=\lim_{v\to-\infty}\frac{e^{(K_\varrho-K_{\nu_m})v}-e^{(K_\sigma-K_{\nu_m})v}}{\sum\limits_{\lambda=1}^{m}\eta_{\nu_\lambda}K_{\nu_\lambda}e^{(K_{\nu_\lambda}-K_{\nu_m})v}}=0,$$

während der zweite Summand in (2.12) für $v\to-\infty$ gegen den positiven Wert

$$C\int_0^{-\infty}\frac{e^{K_\varrho u}-e^{K_\sigma u}}{h_{\mathfrak{R}}^3(u)}\,du$$

konvergiert[5]). Es gibt also ein Intervall, in dem die linke Seite von (2.12) ständig positiv bleibt.

d) Um den letzten Teil von Hilfssatz 3 zu begründen setzen wir $n\geqq 4$, $K_\tau=K_n<K_{n-1}<\cdots<K_1$, $K_{n-1}<K_\sigma<K_\varrho$, $C>0$ und $\eta_{n-1},\eta_n>0$ voraus. Dann streben nach (2.8) für $\mu=\varrho,\sigma$ und $v\to-\infty$

$$h_{\mathfrak{R}}'^2(v)\,H_{\mathfrak{R}}'(v,\mu,n)\,e^{-(K_n+K_{n-1})v}\quad\text{gegen}\quad-\eta_{n-1}K_{n-1}(K_n-K_{n-1})$$

und

$$H_{\mathfrak{R}}(v,\mu,n)\quad\text{gegen}\quad-(\eta_nK_n)^{-1}.$$

Daher folgt aus

$$\begin{aligned}h_{\mathfrak{R}}(v)\,N^{*2}(v)\,M'(v,\varrho,\sigma,n)=h_{\mathfrak{R}}^{-1}(v)\,\big(&H_{\mathfrak{R}}'(v,\sigma,n)\,H_{\mathfrak{R}}(v,\varrho,n)-\\&-H_{\mathfrak{R}}'(v,\varrho,n)\,H_{\mathfrak{R}}(v,\sigma,n)\big)+\\&+H_{\mathfrak{R}}'(v,\sigma,n)\int_0^v h_{\mathfrak{R}}^{-2}(u)\,(e^{K_\varrho u}-e^{K_n u})\,du-\\&-H_{\mathfrak{R}}'(v,\varrho,n)\int_0^v h_{\mathfrak{R}}^{-2}(u)\,(e^{K_\sigma u}-e^{K_n u})\,du,\end{aligned}$$

da alle uneigentlichen Integrale existieren[6]), daß

$$\begin{aligned}\lim_{v\to-\infty}h_{\mathfrak{R}}^2(v)\,h_{\mathfrak{R}}'^2(v)\,N^{*2}(v)\,M'(v,\varrho,\sigma,n)\,e^{-(K_{n-1}+K_n)v}&\\=-C\,\eta_{n-1}K_{n-1}(K_n-K_{n-1})\int_0^{-\infty}h_{\mathfrak{R}}^{-2}(u)\,(e^{K_\varrho u}-e^{K_\sigma u})\,du>0.&\end{aligned}$$

Nach unseren Voraussetzungen, (2.7) und Hilfssatz 1 sind für $-\infty<v<0$ alle drei Funktionen $h_{\mathfrak{R}}(v)$, $h_{\mathfrak{R}}'(v)$ und $N^*(v)$ von Null verschieden. Es gibt also ein Intervall $-\infty<v<v_2$, in dem $M'(v,\varrho,\sigma,n)>0$, d.h. $M(v,\varrho,\sigma,n)$ monoton wachsend ist.

---

[5]) Das uneigentliche Integral existiert, weil der Integrand für $u<0$ negativ, das Integral also für $v<0$ eine monotone Funktion ist und für $v<0$ gilt

$$0<\int_0^v h_{\mathfrak{R}}^{-2}(u)\,(e^{K_\varrho u}-e^{K_\sigma u})\,du<C^{-2}(K_\sigma^{-1}-K_\varrho^{-1}).$$

[6]) Dies ergibt sich wie in Fußnote 5.

§ 3. Lösung der Randwertaufgabe (a)

1. Für die Randwertaufgabe (a_1) sind die η_ν für $\nu=1,\dots,n$, $\nu\neq\varrho,\sigma$ positive Konstanten und nach den ersten Randbedingungen ist mit

$$\sum_{\lambda=1}^{m}\eta_{\nu_\lambda}=\tilde{c}_1, \qquad c_1-\tilde{c}_1=c_1^*$$
$$\eta_\sigma=c_1^*-\eta_\varrho, \qquad 0\leqq\eta_\varrho\leqq c_1^* \tag{3.1}$$

zu wählen. Dabei ist zu beachten, daß nach Voraussetzung die ν_λ untereinander verschieden sind und $\nu_\lambda\neq\varrho,\sigma$ ist. Setzen wir

$$f(y,\eta_\varrho)=C+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\varrho,\sigma}}^{n}\eta_\nu e^{K_\nu y}+\eta_\varrho(e^{K_\varrho y}-e^{K_\sigma y})+c_1^* e^{K_\sigma y},$$

so lautet die Differentialgleichung (1.7)

$$y'=-k_1 f(y,\eta_\varrho). \tag{3.2}$$

Die Aufgabe (a_1) lautet nun: *Läßt sich η_ϱ in $\langle 0,c_1^*\rangle$ so wählen, daß das Integral $y(x)$ durch den Punkt $(\xi_1,0)$ von (3.2) die Bedingung*

$$\sum_{\lambda=1}^{m}\eta_{\nu_\lambda}e^{K_{\nu_\lambda}y(\xi_2)}+\eta_\varrho(e^{K_\varrho y(\xi_2)}-e^{K_\sigma y(\xi_2)})+c_1^* e^{K_\sigma y(\xi_2)}=c_2 \tag{3.3}$$

erfüllt? Nach § 1, **4.** können wir dabei $c_1^*>0$ voraussetzen.

2. Ist $K_\varrho=K_\sigma$, so hängt f und damit die rechte Seite von (3.2) nicht von η_ϱ ab. Das Integral $y_0(x)$ mit $y_0(\xi_1)=0$ ist dann allein durch c_1^* eindeutig bestimmt und wir erhalten

Satz 1. *Ist $K_\varrho=K_\sigma$ und genügt das durch den Punkt $(\xi_1,0)$ gehende Integral $y_0(x)$ von (3.2) der Bedingung (3.3), so gibt es unendlich viele Lösungen der Randwertaufgabe (a); und zwar sind für jedes a mit $0\leqq a\leqq 1$*

$$y_\nu(x)=\eta_\nu e^{K_\nu y_0(x)}, \qquad \nu=1,\dots,n \quad \text{mit} \quad \eta_\varrho=a\,c_1^*, \quad \eta_\sigma=(1-a)\,c_1^*$$

Lösungen. Ist für $y_0(x)$ (3.3) nicht erfüllt, so gibt es keine Lösung der Randwertaufgabe.

3. Neben $c_1^*>0$ können wir daher bei den folgenden Überlegungen $K_\varrho>K_\sigma$ voraussetzen. Für $0\leqq\eta_\varrho\leqq c_1^*$ ist $f(y,\eta_\varrho)$ für alle y positiv. Daher existiert

$$F(x,y,\eta_\varrho)=k_1(x-\xi_1)+\int_0^y f^{-1}(u,\eta_\varrho)\,du \tag{3.4}$$

für alle x, y, η_ϱ aus dem Bereich $\xi_1\leqq x<\infty$, $-\infty<y<\infty$, $0\leqq\eta_\varrho\leqq c_1^*$. Bezeichnen wir das durch den Punkt $(\xi_1,0)$ gehende Integral von (3.2) mit $\varphi(x,\eta_\varrho)$, so ist $\varphi(x,\eta_\varrho)$ die durch Auflösen der Gleichung $F(x,y,\eta_\varrho)=0$ für $x\geqq\xi_1$ eindeutig bestimmte Funktion; und es ist $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x,\eta_\varrho)=-\infty$. Auf

Grund der Differentialgleichung ist ferner $\varphi(x, \eta_\varrho)$ eine im engeren Sinn monoton fallende Funktion von x; also ist $\varphi(x, \eta_\varrho) < \varphi(\xi_1, \eta_\varrho) = 0$ für $x > \xi_1$. Ferner ist nach bekannten Sätzen über implizite Funktionen φ eine stetig differenzierbare Funktion von η_ϱ und es ist

$$\varphi_{\eta_\varrho}(x, \eta_\varrho) = f(\varphi(x, \eta_\varrho), \eta_\varrho) \int_0^{\varphi(x, \eta_\varrho)} \frac{e^{K_\varrho u} - e^{K_\sigma u}}{f^2(u, \eta_\varrho)}\, du. \tag{3.5}$$

Für $x > \xi_1$ ist daher wegen $K_\varrho > K_\sigma$ und $\varphi(x, \eta_\varrho) < 0$

$$\varphi_{\eta_\varrho}(x, \eta_\varrho) > 0. \tag{3.6}$$

Eine Abschätzung von φ erhalten wir auf Grund folgender Überlegung: Setzen wir $d = C + \sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu$, so ist $f(0, \eta_\varrho) = d$ und $f(y, \eta_\varrho) < d$ für $y < 0$. Daher folgt aus

$$-k_1(x - \xi_1) = \int_0^{-k_1(x-\xi_1)d} d^{-1}\, du = \int_0^{\varphi(x, \eta_\varrho)} f^{-1}(u, \eta_\varrho)\, du$$

und (3.6)

$$-k_1(x - \xi_1)\, d \leqq \varphi(x, 0) \leqq \varphi(x, \eta_\varrho) \leqq \varphi(x, c_1^*) < 0 \quad \text{für} \quad x > \xi_1. \tag{3.7}$$

4. Zur Lösung der Randwertaufgabe betrachten wir nun die mit den gegebenen Zahlen ν_λ gebildete Funktion

$$\psi(x, \eta_\varrho) = \sum_{\lambda=1}^{m} \eta_{\nu_\lambda} e^{K_{\nu_\lambda} \varphi(x, \eta_\varrho)} + \eta_\varrho \left(e^{K_\varrho \varphi(x, \eta_\varrho)} - e^{K_\sigma \varphi(x, \eta_\varrho)}\right) + c_1^* e^{K_\sigma \varphi(x, \eta_\varrho)}.$$

Nach **3.** ist $\psi(x, \eta_\varrho)$ für $\xi_1 \leqq x < \infty$, $0 \leqq \eta_\varrho \leqq c_1^*$ eine stetig differenzierbare Funktion beider Variablen. Mit

$$\begin{cases} z_1 = z_1(\xi_2) = \operatorname{Min}\{\psi(\xi_2, \eta_\varrho) \mid 0 \leqq \eta_\varrho \leqq c_1^*\}, \\ z_2 = z_2(\xi_2) = \operatorname{Max}\{\psi(\xi_2, \eta_\varrho) \mid 0 \leqq \eta_\varrho \leqq c_1^*\} \end{cases} \tag{3.8}$$

ergibt sich daher sofort

Satz 2. *Für jedes $\xi_2 > \xi_1$ und jedes c_2 aus dem Intervall $I = \langle z_1, z_2 \rangle$ gibt es mindestens ein η_ϱ aus dem Intervall $\langle 0, c_1^* \rangle$, so daß* (3.3) *erfüllt ist. Liegt c_2 nicht in I, so läßt sich* (3.3) *nicht erfüllen.* Mit anderen Worten: *Genau für die c_2 aus I gibt es mindestens eine Lösung der Randwertaufgaben* (*a*) *und* (a_1).

Setzen wir für die in (3.3) auftretenden Indices ν_λ — man beachte dabei § 2, **1.** und § 3, **1.** — $\mathfrak{M} = \{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$ und

$$x_{\mathfrak{M}} = x_{\mathfrak{M}}(\varrho, \sigma) = \begin{cases} \xi_1 + \dfrac{1}{d(k_\varrho - k_\sigma)} \log \dfrac{k_\varrho}{k_\sigma} & \text{für} \quad k_\sigma > k_{\nu_m} \\ \infty & \text{für} \quad k_\sigma \leqq k_{\nu_m}, \end{cases} \tag{3.9}$$

so läßt sich über Satz 2 hinaus zeigen:

Satz 3. *Ist* $\xi_1<\xi_2<x_{\mathfrak{M}}(\varrho,\sigma)$ *(im Fall* $x_{\mathfrak{M}}<\infty$ *kann auch* $\xi_2=x_{\mathfrak{M}}$ *zugelassen werden), so gibt es zu jedem* c_2 *mit*

$$\psi(\xi_2, c_1^*) \leqq c_2 \leqq \psi(\xi_2, 0) \tag{3.10}$$

genau ein $\eta_\varrho=\eta_\varrho(c_2)$ *mit* $0\leqq\eta_\varrho\leqq c_1^*$, *so daß* $\varphi\big(x,\eta_\varrho(c_2)\big)$ *die Beziehung* (3.3) *erfüllt ist, d.h. unter den angegebenen Einschränkungen gibt es genau ein Integral von* (1.7), *das die Randbedingungen* (a_1) *erfüllt, und nach* § 1 *dann auch genau ein Integral von* (1.3), *das den Randbedingungen* (a) *genügt. Liegt* c_2 *nicht im Intervall* (3.10), *so gibt es keine Lösung der Randwertaufgaben.*

Beweis. Mit $\varphi=\varphi(x,\eta_\varrho)$ ergibt sich

$$\psi_{\eta_\varrho}(x,\eta_\varrho)=\Big\{\sum_{\lambda=1}^{m}\eta_{\nu_\lambda}K_{\nu_\lambda}e^{K_{\nu_\lambda}\varphi}+\eta_\varrho\big(K_\varrho e^{K_\varrho\varphi}-K_\sigma e^{K_\sigma\varphi}\big)+c_1^*K_\sigma e^{K_\sigma\varphi}\Big\}\varphi_{\eta_\varrho}(x,\eta_\varrho)+$$
$$+\big(e^{K_\varrho\varphi}-e^{K_\sigma\varphi}\big).$$

Ordnen wir $\mathfrak{M}^*=\mathfrak{M}\cup\{\varrho,\sigma\}=\{\nu_1,\ldots,\nu_m,\varrho,\sigma\}$ der Größe der Elemente nach, so ist wegen $c_1^*>0$ $\mathfrak{M}^*$ eine der in § 2 behandelten Mengen. Mit den dort eingeführten Bezeichnungen und $\eta_\sigma=c_1^*-\eta_\varrho$ ist dann

$$\psi_{\eta_\varrho}(x,\eta_\varrho)=h'_{\mathfrak{M}^*}(\varphi)\left\{H_{\mathfrak{M}^*}(\varphi,\varrho,\sigma)+h_{\mathfrak{N}}(\varphi)\int_0^{\varphi}\frac{e^{K_\varrho u}-e^{K_\sigma u}}{h^2_{\mathfrak{N}}(u)}\,du\right\},\quad \varphi=\varphi(x,\eta_\varrho).$$

Nach (2.5) und Hilfssatz 3 ist daher wegen $\varphi(x,\eta_\varrho)<0$ für $x>\xi_1$

$$\psi_{\eta_\varrho}(x,\eta_\varrho)<0 \quad \text{für} \quad v_{\mathfrak{M}^*}<\varphi(x,\eta_\varrho)<0. \tag{3.11}$$

Die Bedingung $v_{\mathfrak{M}^*}<\varphi(x,\eta_\varrho)$ ist nun nach (1.5), (2.7), (3.7), (3.9) und der Definition von $\mathfrak{M}^*$ erfüllt, sobald $\xi_1\leqq x<x_{\mathfrak{M}}$ ist. Aus (3.11) folgt dann zusammen mit Satz 2 die Behauptung.

Ist $x_{\mathfrak{M}}(\varrho,\sigma)<\infty$, so ergibt sich aus (3.11), daß das angegebene Intervall für ξ_2 unter Umständen verbessert werden kann. Der Zusatz zu (2.12) in Hilfssatz 3 zeigt hingegen, daß in diesem Fall Satz 3 für genügend großes $\xi_2>x_{\mathfrak{M}}(\varrho,\sigma)>\xi_1$ falsch werden kann.

§ 4. Lösung der Interpolationsaufgabe (*b*)

1. Hier sind jetzt die η_ν für $\nu\neq\varrho,\sigma,\tau$ positive Konstanten und für jede Lösung der Aufgabe (b) muß mit $d_1=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\varrho,\sigma,\tau}}^{n}\eta_\nu$, und $d_1^*=c_1-d_1$

$$\eta_\tau=d_1^*-(\eta_\varrho+\eta_\sigma);\qquad 0\leqq\eta_\varrho,\ \eta_\sigma\leqq d_1^*,\qquad 0\leqq\eta_\varrho+\eta_\sigma\leqq d_1^* \tag{4.1}$$

gelten. Die rechte Seite der Differentialgleichung (1.7) ist daher eine Funktion von y, η_ϱ und η_σ; setzen wir

$$f^*(y,\eta_\varrho,\eta_\sigma)=C+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\varrho,\sigma,\tau}}^{n}\eta_\nu e^{K_\nu y}+\eta_\varrho(e^{K_\varrho y}-e^{K_\tau y})+\eta_\sigma(e^{K_\sigma y}-e^{K_\tau y})+d_1^*e^{K_\tau y}, \tag{4.2}$$

so lautet sie

$$y' = -k_1 f^*(y, \eta_\varrho, \eta_\sigma). \tag{4.3}$$

Da wir nach § 1, 4. $d_1^* > 0$ voraussetzen können, ist $f^*(y, \eta_\varrho, \eta_\sigma) > 0$ für alle y und für die dem dreieckigen Bereich

$$\mathfrak{B}\colon\ 0 \leqq \eta_\varrho, \eta_\sigma \leqq d_1^*, \qquad \eta_\varrho + \eta_\sigma \leqq d_1^* \tag{4.4}$$

zugehörigen $\eta_\varrho, \eta_\sigma$.

2. Zunächst behandeln wir den Sonderfall $K_\varrho = K_\sigma = K_\tau$. Hier hängt nach (4.2) f^* nicht von η_ϱ und η_σ ab. Das Integral $y_0(x)$ von (4.3) mit dem Anfangswert $y_0(\xi_1) = 0$ ist daher durch c_1 eindeutig bestimmt und wir erhalten

Satz 4. *Ist $K_\varrho = K_\sigma = K_\tau$, so ist die Interpolationsaufgabe (b) genau dann lösbar, wenn für $y_0(x)$ die Beziehungen*

$$\sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \varrho, \sigma, \tau}}^{n} \eta_\nu e^{K_\nu y_0(\xi_\mu)} + d_1^* e^{K_\varrho y_0(\xi_\mu)} = c_\mu, \qquad \mu = 2, 3$$

erfüllt sind. Ist (b) lösbar, so ist $y_\nu(x) = \eta_\nu e^{K_\nu y_0(x)}$, $\nu = 1, \ldots, n$ für jedes Tripel nichtnegativer Zahlen $\eta_\varrho, \eta_\sigma, \eta_\tau$ mit $\eta_\varrho + \eta_\sigma + \eta_\tau = d_1^*$ eine Lösung.

3. Im folgenden sei daher stets $K_\varrho \geqq K_\sigma > K_\tau$ oder $K_\varrho > K_\sigma \geqq K_\tau$. Bezeichnen wir das durch den Punkt $(\xi_1, 0)$ gehende Integral von (4.3) mit $\Phi(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma)$, so wird Φ durch

$$\int_0^{\Phi} f^{*-1}(y, \eta_\varrho, \eta_\sigma)\, dy + k_1 (x - \xi_1) = 0 \tag{4.5}$$

gegeben. Da der Integrand für alle $\eta_\varrho, \eta_\sigma$ aus $\mathfrak{B}$ positiv ist, ist Φ eine eigentlich monoton fallende Funktion von x, $\Phi(\xi_1, \eta_\varrho, \eta_\sigma) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} \Phi(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) = -\infty$. Aus der Definition von d_1^* und (4.4) folgt für $y < 0$ wie in § 3

$$f^*(y, \eta_\varrho, \eta_\sigma) < C + \sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu = C + c_1 = d$$

und somit

$$-k_1 d (x - \xi_1) < \Phi(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) < 0. \tag{4.6}$$

Ferner ist nach (4.5) Φ und daher auch

$$\left\{ \begin{aligned} \Psi(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \varrho, \sigma, \tau}}^{n} \eta_\nu e^{K_\nu \Phi} + \eta_\varrho (e^{K_\varrho \Phi} - e^{K_\tau \Phi}) + \eta_\sigma (e^{K_\sigma \Phi} - e^{K_\tau \Phi}) + d_1^* e^{K_\tau \Phi}, \\ \Phi = \Phi(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) \end{aligned} \right. \tag{4.7}$$

eine nach allen Variablen stetig differenzierbare Funktion, und zwar ergibt sich mit den in § 2 eingeführten Bezeichnungen und (4.5) — man beachte, daß wegen $d_1^* > 0$ die Ungleichungen (2.5) erfüllt sind — für $\mu = \varrho, \sigma$ und

$$\Phi = \Phi(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma)$$

$$(4.8)\quad \begin{cases} \Phi_{\eta_\mu}(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) = h_{\mathfrak{R}}(\Phi) \int\limits_0^{\Phi} h_{\mathfrak{R}}^{-2}(u)\,(e^{K_\mu u} - e^{K_\tau u})\,du \\ \Psi_{\eta_\mu}(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) = h'_{\mathfrak{R}}(\Phi)\{H_{\mathfrak{R}}(\Phi, \mu, \tau) + h_{\mathfrak{R}}(\Phi) \int\limits_0^{\Phi} h_{\mathfrak{R}}^{-2}(u)\,(e^{K_\mu u} - e^{K_\tau u})\,du\}. \end{cases}$$

Wegen der Monotonie von Φ als Funktion von x ist daher nach (2.5), (2.6), Hilfssatz 3, (2.7) und (4.6)

$$(4.9)\quad \begin{cases} \Psi_{\eta_\varrho}(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) < 0 \quad \text{für} \quad \xi_1 < x < \xi_1 - \frac{1}{k_1 d}\, v_{\mathfrak{R}}(\varrho, \tau) \\ \Psi_{\eta_\sigma}(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) \begin{cases} < 0 \quad \text{für} \quad K_\sigma > K_\tau \quad \text{und} \quad \xi_1 < x < \xi_1 - \frac{1}{k_1 d}\, v_{\mathfrak{R}}(\sigma, \tau) \\ \equiv 0 \quad \text{für} \quad K_\sigma = K_\tau \quad \text{und} \quad \xi_1 \leqq x < \infty. \end{cases} \end{cases}$$

Aus diesen Ungleichungen folgt daher wegen (2.11) und (4.1) für $\xi_1 < x < \xi_1 - \frac{1}{k_1 d}\, v_{\mathfrak{R}}(\varrho, \tau)$

$$\Psi(x, \eta_\varrho, d_1^* - \eta_\varrho) \leqq \Psi(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) \leqq \Psi(x, 0, \eta_\sigma) \leqq \Psi(x, 0, 0).$$

Diese Ungleichungen können wir, da aus $\eta_\sigma = d_1^* - \eta_\varrho$ nach (4.1) $\eta_\tau = 0$ folgt, auf folgende Weise nach links fortsetzen: Ist $K_\varrho > K_\sigma$, so wird unter Heranziehung der in § 3 eingeführten Bezeichnungen

$$d_1^* = c_1^* \quad \text{und} \quad \Psi(x, \eta_\varrho, d_1^* - \eta_\varrho) = \psi(x, \eta_\varrho).$$

Daher ist nach (3.11) und (3.9)

$$(4.10)\quad \Psi_{\eta_\varrho}(x, \eta_\varrho, d_1^* - \eta_\varrho) = \psi_{\eta_\varrho}(x, \eta_\varrho) < 0 \quad \text{für} \quad \xi_1 < x < x_{\mathfrak{R}}(\varrho, \sigma),$$

d.h.

$$\Psi(x, d_1^*, 0) \leqq \Psi(x, \eta_\varrho, d_1^* - \eta_\varrho) \quad \text{für} \quad \xi_1 < x < \xi_1 - \frac{1}{k_1 d}\, v_{\mathfrak{R}}(\varrho, \sigma).$$

Ist dagegen $K_\varrho = K_\sigma$, so hängt f^* nicht einzeln von η_ϱ und η_σ, sondern von der Summe $\eta_\varrho + \eta_\sigma$ ab. Da diese wegen $\eta_\sigma = d_1^* - \eta_\varrho$ konstant ist, folgt aus (4.2) und (4.5) $\Phi(x, d_1^*, 0) = \Phi(x, \eta_\varrho, d_1^* - \eta_\varrho)$ und daher nach (4.7) $\Psi(x, d_1^*, 0) = \Psi(x, \eta_\varrho, d_1^* - \eta_\varrho)$ für alle $x > \xi_1$.

Wir haben damit

$$(4.11)\quad \Psi(x, d_1^*, 0) \leqq \Psi(x, \eta_\varrho, d_1^* - \eta_\varrho) \leqq \Psi(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) \leqq \Psi(x, 0, 0)$$

bewiesen. Dabei ist die linke dieser Ungleichungen für alle x mit

$$\xi_1 < x < \begin{cases} \xi_1 - \frac{1}{k_1 d}\, v_{\mathfrak{R}}(\varrho, \sigma) & \text{für} \quad K_\varrho > K_\sigma \\ \infty & \text{für} \quad K_\varrho = K_\sigma \end{cases}$$

gültig, während die anderen für alle x mit

$$\xi_1 < x < \xi_1 - \frac{1}{k_1 d}\, v_{\mathfrak{R}}(\varrho, \tau)$$

gelten. Setzen wir unter Beachtung der Definition von $v_{\mathfrak{R}}(\varrho, \sigma)$ und $v_{\mathfrak{R}}(\varrho, \tau)$ und den Ungleichungen (2.11)

$$(4.12)\quad x(\varrho,\sigma,\tau)=\begin{cases}\xi_1+\dfrac{1}{d(k_\varrho-k_\sigma)}\log\dfrac{k_\varrho}{k_\sigma}, & \text{falls } k_\varrho>k_\sigma\begin{cases}>k_\tau\geqq k_n\\ =k_\tau>k_n\end{cases}\\ \xi_1+\dfrac{1}{d(k_\varrho-k_\tau)}\log\dfrac{k_\varrho}{k_\tau}, & \text{falls } k_\varrho=k_\sigma>k_\tau>k_n\\ \infty, & \text{falls}\begin{cases}k_\varrho=k_\sigma>k_\tau=k_n\\ k_\varrho>k_\sigma=k_\tau=k_n,\end{cases}\end{cases}$$

so gelten die Ungleichungen (4.11) für das Intervall $\xi_1<x<x(\varrho,\sigma,\tau)$. Insbesondere ist also für jedes ξ_2 aus diesem Intervall

$$(4.13)\quad \Psi_1=\Psi_1(\xi_2)=\Psi(\xi_2,d_1^*,0)\leqq\Psi(\xi_2,\eta_\varrho,\eta_\sigma)\leqq\Psi(\xi_2,0,0,)=\Psi_2(\xi_2)=\Psi_2.$$

Ist $K_\sigma>K_\tau$, so fallen die Funktionswerte $\Psi(\xi_2,\eta_\varrho,\eta_\sigma)$ nach (4.9) sowohl in Richtung wachsender η_ϱ als auch in Richtung wachsender η_σ, während im Falle $K_\sigma=K_\tau$ die Funktion $\Psi(\xi_2,\eta_\varrho,\eta_\sigma)$ auf jeder Parallelen zur η_σ-Achse konstant ist. Ebenfalls fällt nach (4.10) die Funktion $\Psi(\xi_2,\eta_\varrho,\eta_\sigma)$ für $K_\varrho>K_\sigma$ und wachsendes η_ϱ auf der Geraden $\eta_\sigma=d_1^*-\eta_\varrho$ und bleibt für $K_\varrho=K_\sigma$ auf dieser Geraden konstant. Betrachten wir nun die Fläche $z=z(\eta_\varrho,\eta_\sigma)=\Psi(\xi_2,\eta_\varrho,\eta_\sigma)$, so hat diese nach (4.13) für jedes c_2 aus dem Intervall $\langle\Psi_1,\Psi_2\rangle$ mit der Ebene $z=c_2$ eine Schnittkurve gemeinsam, deren Projektion $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{B}$ von Rand zu Rand verläuft. Aus den oben angeführten Gründen verläuft $\mathfrak{C}$ schlicht über der η_σ-Achse und kann keine zwei Punkte der η_ϱ-Achse, der η_σ-Achse oder der Geraden $\eta_\sigma=d_1^*-\eta_\varrho$ miteinander verbinden, außer wenn sie mit der η_σ-Achse bzw. der Geraden $\eta_\sigma=d_1^*-\eta_\varrho$ in ihrem ganzen Verlauf zusammen fällt. Die Kurve $\mathfrak{C}$ besitzt daher eine Darstellung $\eta_\varrho=\chi(\eta_\sigma)$, wobei χ in einem Intervall $\alpha\leqq\eta_\sigma\leqq\beta$ definiert und differenzierbar ist ($0\leqq\alpha\leqq\beta\leqq d_1^*$). α und β sind dabei die η_σ-Koordinaten der Endpunkte der Kurve $\mathfrak{C}$. Ferner ist χ Lösung der Gleichung $\Psi(\xi_2,\eta_\varrho,\eta_\sigma)=c_2$ und für alle Paare $(\eta_\varrho,\eta_\sigma)$, für die η_σ nicht in $\langle\alpha,\beta\rangle$ liegt, ist $\Psi(\xi_2,\eta_\varrho,\eta_\sigma)\neq c_2$ [7]).

Für $\eta_\sigma\in\langle\alpha,\beta\rangle$ setzen wir zur Abkürzung $\Phi^*(x,\eta_\sigma)=\Phi\big(x,\chi(\eta_\sigma),\eta_\sigma\big)$ und $\Psi^*(x,\eta_\sigma)=\Psi\big(x,\chi(\eta_\sigma),\eta_\sigma\big)$ und erhalten für $x>\xi_1$ wegen

$$\frac{d\chi}{d\eta_\sigma}=-\left.\frac{\Psi_{\eta_\sigma}(\xi_2,\eta_\varrho,\eta_\sigma)}{\Psi_{\eta_\varrho}(\xi_2,\eta_\varrho,\eta_\sigma)}\right|_{\eta_\varrho=\chi(\eta_\sigma)}$$

und (4.8)

$$(4.14)\quad\begin{cases}\Psi^*_{\eta_\sigma}(x,\eta_\sigma)=\Psi_{\eta_\sigma}(x,\eta_\varrho,\eta_\sigma)+\Psi_{\eta_\varrho}(x,\eta_\varrho,\eta_\sigma)\left.\dfrac{d\chi}{d\eta_\sigma}\right|_{\eta_\varrho=\chi=\chi(\eta_\sigma)}\\ \qquad=h_{\mathfrak{R}}\big(\Phi^*(x,\eta_\sigma)\big)\,h'_{\mathfrak{R}}\big(\Phi^*(x,\eta_\sigma)\big)\int\limits_0^{\Phi^*(x,\eta_\sigma)}h_{\mathfrak{R}}^{-1}(u)\,H'_{\mathfrak{R}}(u,\varrho,\tau)\,du\times\\ \qquad\times\{M\big(\Phi^*(x,\eta_\sigma),\varrho,\sigma,\tau\big)-M\big(\Phi^*(\xi_2,\eta_\sigma),\varrho,\sigma,\tau\big)\},\end{cases}$$

[7]) Man beachte, daß hier und im folgenden α, β, χ von c_2 abhängen; dasselbe gilt für die unten definierte Funktion Ψ^*.

wenn wir nur in $h_{\mathfrak{R}}$, $h'_{\mathfrak{R}}$, $H'_{\mathfrak{R}}$ und M jeweils $\eta_\varrho = \chi(\eta_\sigma)$ und $\eta_\tau = d_1^* - \eta_\sigma - \chi(\eta_\sigma)$ einsetzen.

4. Ist $K_\varrho = K_\sigma > K_\tau$, so ist für $x > \xi_1$ nach (4.8) $\Psi_{\eta_\varrho}(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) = \Psi_{\eta_\sigma}(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma)$, also $\frac{d\chi}{d\eta_\sigma} = -1$, während für $K_\varrho > K_\sigma = K_\tau$ aus (4.9) $\Psi_{\eta_\sigma}(x, \eta_\varrho, \eta_\sigma) \equiv 0$ und damit auch $\frac{d\chi}{d\eta_\sigma} = 0$ folgt. In beiden Fällen ist also $\Psi^*_{\eta_\sigma}(x, \eta_\sigma) \equiv 0$ und wir erhalten

Satz 5. *Ist $K_\varrho = K_\sigma > K_\tau$ oder $K_\varrho > K_\sigma = K_\tau$ und $\xi_1 < \xi_2 < x(\varrho, \sigma, \tau)$, so ist die Interpolationsaufgabe (b) genau dann lösbar, wenn c_2 im Intervall $\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle$ liegt und mit der dann durch c_2 in $\langle \alpha, \beta \rangle$ bestimmten Funktion $\chi = \chi(\eta_\sigma) = \chi(\eta_\sigma, c_2)$ die Funktionen $\Psi^*(x, \eta_\sigma) = \Psi\big(x, \chi(\eta_\sigma), \eta_\sigma\big)$ für jedes η_σ aus $\langle \alpha, \beta \rangle$ die Gleichung $\Psi^*(\xi_3, \eta_\sigma) = c_3$ erfüllen. Ist die Aufgabe lösbar, so erhalten wir die gesuchten Integrale von (1.3) durch*

$$y_\nu(x) = \eta_\nu e^{K_\nu \Phi^*(x, \eta_\sigma)}, \qquad \nu = 1, \ldots, n,$$

$$\eta_\sigma \in \langle \alpha, \beta \rangle, \qquad \eta_\varrho = \chi(\eta_\sigma), \qquad \eta_\tau = d_1^* - \eta_\sigma - \chi(\eta_\sigma).$$

Zusatz. a) Da $\Psi^*_{\eta_\sigma}(\xi_3, \eta_\sigma) \equiv 0$ ist, genügt es in Satz 5 zu fordern, daß die Gleichung $\Psi^*(\xi_3, \eta_\sigma) = c_3$ für ein η_σ aus $\langle \alpha, \beta \rangle$ ist.

b) Ist unter den angegebenen Voraussetzungen (*b*) lösbar und ist im Fall $K_\varrho > K_\sigma = K_\tau$ $c_2 \neq \Psi(x, d_1^*, 0)$, so ist (*b*) mehrdeutig lösbar, da jedes η_σ aus $\langle \alpha, \beta \rangle$ gewählt werden kann und hier $\alpha < \beta$ ist.

c) Ist $x(\varrho, \sigma, \tau) < \infty$, so kann nach (4.6) und Hilfssatz 1 auch $\xi_2 = x(\varrho, \sigma, \tau)$ zugelassen werden.

5. Bei den folgenden Überlegungen können wir nun $K_\sigma > K_\varrho > K_\tau$ voraussetzen. Aus unseren Untersuchungen in **3.** folgt zunächst, da $\Psi^*(x, \eta_\sigma)$ eine stetige Funktion von η_σ ist,

Satz 6. *Ist $K_\varrho > K_\sigma > K_\tau$ und $\xi_1 < \xi_2 \leqq x(\varrho, \sigma, \tau)$, so gibt es mindestens eine Lösung der Interpolationsaufgabe (b), wenn c_2 in $\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle$ liegt und c_3 der Ungleichung*

$$\operatorname{Min}\{\Psi^*(\xi_3, \eta_\sigma) \,|\, \eta_\sigma \in \langle \alpha, \beta \rangle\} \leqq c_3 \leqq \operatorname{Max}\{\Psi^*(\xi_3, \eta_\sigma) \,|\, \eta_\sigma \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$$

genügt. Liegt c_2 nicht in $\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle$ oder ist die vorangehende Ungleichung nicht erfüllt, so ist die Aufgabe nicht lösbar.

Schränken wir das Intervall für ξ_3 ein, so läßt sich Satz 6 verschärfen zu

Satz 7. *Ist $K_\varrho > K_\sigma > K_\tau$ und $\xi_1 < \xi_2$, $\xi_3 \leqq x(\varrho, \sigma, \tau)$, $\xi_2 \neq \xi_3$, so ist (b) eindeutig lösbar, wenn c_2 in $\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle$ liegt und*

$$\Psi^*(\xi_3, \alpha) \leqq c_3 \leqq \Psi^*(\xi_3, \beta) \quad \text{für} \quad \xi_1 < \xi_3 < \xi_2$$

bzw.

$$\Psi^*(\xi_3, \beta) \leqq c_3 \leqq \Psi^*(\xi_3, \alpha) \quad \text{für} \quad \xi_1 < \xi_2 < \xi_3$$

gilt.

Beweis. In dem zugelassenen Intervall ist $\Phi^*(x, \eta_\sigma)$ eine eigentlich monoton fallende und daher $M\left(\Phi^*(x, \eta_\sigma), \varrho, \sigma, \tau\right)$ nach (4.6) und Hilfssatz 3 eine im strengen Sinn monoton wachsende Funktion von x. Da das Integral in (4.14) nach (2.12) negativ ist, erhalten wir für $\eta_\sigma \in \langle \alpha, \beta \rangle$

$$\Psi^*_{\eta_\sigma}(\xi_3, \eta_\sigma) \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad \xi_1 < \xi_3 < \xi_2 \leqq x(\varrho, \sigma, \tau) \\ < 0 & \text{für} \quad \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 \leqq x(\varrho, \sigma, \tau). \end{cases}$$

Hieraus und aus Satz 6 folgt nun die Behauptung unmittelbar.

Der Zusatz in Hilfssatz 3 zeigt, daß Satz 7 für $\xi_1 < \xi_2 \leqq x(\varrho, \sigma, \tau) < \xi_3$ falsch werden kann.

Sind die Voraussetzungen und Bedingungen des Satzes 7 erfüllt, so gibt es genau ein $\bar{\eta}_\sigma$ aus dem Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$, für das $\Psi^*(\xi_3, \bar{\eta}_\sigma) = c_3$ ist. Das Integral von (1.3), das die Bedingungen (b) erfüllt, wird daher durch

$$y_\nu(x) = \bar{\eta}_\nu e^{K_\nu \Phi^*(x, \bar{\eta}_\sigma)}, \quad \nu = 1, \ldots, n, \quad \bar{\eta}_\nu = \eta_\nu \text{ für } \nu \neq \varrho, \sigma, \tau, \begin{cases} \bar{\eta}_\varrho = \chi(\bar{\eta}_\sigma) \\ \bar{\eta}_\tau = d_1^* - \bar{\eta}_\sigma - \bar{\eta}_\varrho \end{cases}$$

gegeben.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 9. Juli 1960)

EWEIDA, M. T.
Math. Zeitschr. 74, 319–324 (1960)

On Bessel Polynomials

By
M. T. EWEIDA

1. INTRODUCTION. The Bessel polynomials were defined by KRALL and FRINK [9] as the solution of the differential equation

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (a\,x + b)\frac{dy}{dx} - n(n + a - 1)\,y = 0$$

where n is a positive integer and a and b are arbitrary parameters. Several authors as AGARWAL [1], AL-SALAM [2], BRAFMAN [3], BURCHNALL [4], CARLITZ [5], DICKINSON [6], GROSSWALD [8], RAINVILLE [10] and TOSCANE [11] have contributed to the study of the Bessel polynomials.

In this paper we shall study further these polynomials to obtain more properties, integral representations and expansion formulae.

2. Let

$$Y_n^{(\alpha)}(x) = y_n(x, \alpha + 2, 2) \quad \text{and} \quad Y_n^{(0)}(x) = y_n(x).$$

Following the definition of BURCHNALL,

$$\Theta_n^{(\alpha)}(x) = x^n\, Y_n^{(\alpha)}(1/x) \quad \text{and} \quad \vartheta_n(x) = x^n\, y_n(1/x). \tag{2.1}$$

Also it is easy to see the relation between the Bessel polynomials and the Laguerre polynomials namely

$$Y_n^{(\alpha)}(x) = n!\left(-\frac{x}{2}\right)^n L_n^{(-2n-\alpha-1)}\left(\frac{2}{x}\right) \tag{2.2}$$

and

$$\Theta_n^{(\alpha)}(x) = n!\,(-2)^{-n}\, L_n^{(-2n-\alpha-1)}(2x). \tag{2.3}$$

Also from the definition of the modified Bessel function $\mathsf{K}_{n+\frac{1}{2}}(x)$ [12; 80], it follows directly [5]

$$\mathsf{K}_{n+\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x}\, x^{-(n+\frac{1}{2})}\, \vartheta_n(x). \tag{2.4}$$

Again from the definition of the modified Bessel function $I_{n+\frac{1}{2}}(x)$ [12; 80],

$$I_{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-)^n}{\sqrt{2\pi}} \cdot x^{-(n+\frac{1}{2})} \cdot \{e^x\, \vartheta_n(-x) - e^{-x}\, \vartheta_n(x)\}, \tag{2.5}$$

$$\underline{I}_{(n+\frac{1}{2})}(x) = \frac{(-)^n}{\sqrt{2\pi}} \cdot x^{-(n+\frac{1}{2})} \cdot \{e^x\, \vartheta_n(-x) + e^{-x}\, \vartheta_n(x)\}. \tag{2.6}$$

Also we can deduce the following relationships:

$$\vartheta_n(x) = (-)^n e^x x^{(2n+1)} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \cdot \left\{\frac{e^{-x}}{x}\right\}, \tag{2.7}$$

$$\vartheta_n(-x) = (-)^n e^{-x} x^{(2n+1)} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \cdot \left\{\frac{e^{x}}{x}\right\}, \tag{2.8}$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m \cdot \{e^{-x}\vartheta_n(x)\} = (-)^m e^{-x}\vartheta_{n-m}(x), \tag{2.9}$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m \cdot \{e^{x}\vartheta_n(-x)\} = (-)^m e^{x}\vartheta_{n-m}(-x). \tag{2.10}$$

Let $\psi(a, c; x)$ be the confluent hypergeometric function [7; V. I; 248]. Hence

$$\begin{cases} \Theta_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2^n}\psi(-n, -2n-\alpha;\ 2x) \\ \qquad = 2^{n+\alpha+1} x^{(2n+\alpha+1)} \psi(n+\alpha+1,\ 2n+\alpha+2; 2x). \end{cases} \tag{2.11}$$

Since

$$\frac{d^n}{dx^n}\{\psi(k+\alpha+1,\ 2k+\alpha+2;\ x)\}$$
$$= (-)^n (k+\alpha+1)_n \psi(k+\alpha+n+1,\ 2k+\alpha+n+2;\ x),$$

where

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+n-1),$$

we have

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{\Theta_k^{(\alpha)}(x/2)}{x^{2k+\alpha+1}}\right\} = (-)^n (k+\alpha+1)_n \left\{\frac{\Theta_k^{(\alpha+n)}(x/2)}{x^{2k+\alpha+n+1}}\right\}. \tag{2.12}$$

We can express $\vartheta_n(x)$ in terms of MEIJER'S G-function as follows. Since [7; V. I; 206]

$$e^{-x}\mathsf{K}_\nu(x) = \pi^{\frac{1}{2}} G_{12}^{20}\left(2x\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2} \\ \nu, -\nu\end{matrix}\right)$$

then it follows from (2.4)

$$\vartheta_n(x) = 2^{\frac{1}{2}} x^{n+\frac{1}{2}} e^{2x} G_{12}^{20}\left(2x\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2} \\ n+\frac{1}{2}, -(n+\frac{1}{2})\end{matrix}\right). \tag{2.13}$$

3. SOME INTEGRAL REPRESENTATIONS. We remark first that since

$$\int_0^\infty e^{-xt} t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}\,dt = \Gamma(a)\,\psi(a, c;\ x) \qquad (Re(a) > 0)$$

it follows directly from (2.1), (2.11), that

$$Y_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+n+1)} \int_0^\infty t^{(\alpha+n)} \left(1+\frac{xt}{2}\right)^n \exp(-t)\,dt$$

which is the integral given by AGARWAL [1] to define the Bessel polynomials.

Since

$$\mathsf{K}_{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2}x)^{n+\frac{1}{2}}}{\Gamma(n+1)} \cdot \int_1^\infty e^{-xt}(t^2-1)^n\,dt \qquad (Re(x) > 0)$$

it follows from (2.4)

$$\vartheta_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2^n n!} e^x \int_1^\infty e^{-xt}(t^2-1)^n dt \tag{3.1}$$

or

$$\vartheta_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2^n n!} e^x \int_0^\infty e^{-x\cosh\varphi} \cdot (\sinh\varphi)^{2n+1} d\varphi. \tag{3.2}$$

Now

$$I_{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-)^n x^{n+\frac{1}{2}}}{2^n n! \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-1}^{1} e^{-xt}(t^2-1)^n dt,$$

so that from (2.5)

$$(-)^n \vartheta_n(-x) = \frac{x^{2n+1} e^{-x}}{2^n n!} \cdot \int_{-1}^{\infty} e^{-xt}(t^2-1)^n dt. \tag{3.3}$$

Again from the relation [7; V. II; 83]

$$K_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2x)^\nu \Gamma\left(\nu+\tfrac{1}{2}\right) \int_0^\infty (t^2+x^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} \cos t\, dt$$

we obtain

$$\vartheta_n(x) = \frac{2^{n+1}}{\pi} n!\, e^x \cdot x^{2n+1} \int_0^\infty \frac{\cos t}{(t^2+n^2)^n} dt. \tag{3.4}$$

Also using the relation [7; V. II; 190]

$$n!\, L_n^{(\alpha)}(x) = e^x x^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty e^{-t} t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha[2(tx)^{\frac{1}{2}}] dt$$

and (2.3) we get

$$\Theta_n^{(\alpha)}(x) = (-)^{n+\alpha+1} \cdot 2^{\frac{\alpha+1}{2}} e^{2x} x^{\frac{2n+\alpha+1}{2}} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\left(\frac{\alpha+\alpha}{2}\right)} J_{2n+\alpha+1}[2(2tx)^{\frac{1}{2}}] dt. \tag{3.5}$$

Also if $x>0$, we know [7; V. I; 274]

$$\psi(n+\alpha+1,\ 2n+\alpha+2;\ 2x)$$
$$= (2x)^{n+\alpha+\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-x\cosh 2t} P_{2n+\alpha+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\alpha}(\cosh t) \cdot (2\sinh t)^{\alpha+\frac{1}{2}} dt.$$

Thus

$$\Theta_n^{(\alpha)}(x) = 2^{2n+2\alpha+\frac{3}{2}} x^{(3n+2\alpha+\frac{3}{2})} \int_0^\infty e^{-x\cosh 2t} P_{2n+\alpha+\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}-\alpha)}(\cosh t) \cdot (2\sinh t)^{\alpha+\frac{1}{2}} dt.$$

Put $\alpha = -n$

$$\Theta_n^{(-n)}(x) = 2^{\frac{3}{2}} x^{n+\frac{3}{2}} \int_0^\infty e^{-x\cosh 2t} P_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\cosh t) \cdot (2\sinh t)^{-(n-\frac{1}{2})} dt, \tag{3.6}$$

where $P_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(x)$ is the associated Legendre function.

Again since if $x>0$ [7; V. I; 286]

$$\pi\psi(-n,-2n;2x)\cdot\psi(-n,-2n;2x)=2e^{2x}(2x)^{2n+1}\int_0^{\pi/2}K_{2n+1}(x\sec t)\cdot\sec t\,dt,$$

then

$$\pi[\vartheta_n(x)]^2=2^2x^{2n+1}e^{2x}\int_0^{\infty}K_{2n+1}(2x\cosh t)\,dt. \tag{3.1}$$

Similarly we can show

$$\pi[\vartheta_n(x)]^2=2^2x^{2n+1}e^{2x}\int_0^{\infty}K_0(2x\cosh t)\cdot\cosh(2n+1)t\,dt. \tag{3.8}$$

Moreover if m, n are positive integers $(m>n,\ \mathrm{Re}(x)>-1)$

$$\Gamma(m-n)\,\Gamma(m+n+1)\,P_n^{-m}(x)=(\pi/2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2-1)^{m/2}\int_0^{\infty}e^{-tx}K_{n+\frac{1}{2}}(t)\cdot t^{m-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Thus from (2.4)

$$\Gamma(m-n)\,\Gamma(m+n+1)\,P_n^{-m}(x)=(x^2-1)^{m/2}\int_0^{\infty}e^{-t(x+1)}t^{m-n-1}\vartheta_n(t)\,dt \tag{3.9}$$

or

$$\begin{cases}\Gamma(m-n)\,\Gamma(m+n+1)\int_1^x\cdots\int_1^x P_n(x)\,(dx)^m\\ =(x^2-1)^m\int_0^{\infty}e^{-t(x+1)}t^{m-n-1}\vartheta_n(t)\,dt,\end{cases} \tag{3.10}$$

where $P_n(x)$ is the Legendre polynomial.

Using the integral [7; V. I; 95]

$$\int_0^{\infty}K_\nu[a(t^2+z^2)^{\frac{1}{2}}]\cdot(t^2+z^2)^{-\nu/2}\cdot t^{2\mu+1}\,dt$$
$$=2^\mu a^{-\mu-1}z^{1+\mu-\nu}\Gamma(\mu+1)\,K_{\nu-\mu-1}(az)\quad(a>0,\ \mathrm{Re}(\mu)>-1)$$

and (2.4) we can obtain

$$\vartheta_{n-1}(z)=z^{2n-1}e^z\int_z^{\infty}e^{-t}t^{-2n}\vartheta_n(t)\,dt. \tag{3.11}$$

Also since we have [7; V. I; 51]

$$\int_0^{\infty}K_\nu(\beta t)\cdot t^{\mu-1}\,dt=2^{\mu-2}\beta^{-\mu}\,\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right),$$

where $\mathrm{Re}(\mu\pm\nu)>0$, $\mathrm{Re}(\beta)>0$; then putting $\mu=n+\frac{3}{2}$, $\nu=n+\frac{1}{2}$, $\beta=1$, we can easily obtain

$$2^n(n!)=x\int_0^{\infty}e^{-xt}\vartheta_n(xt)\,dt \tag{3.12}$$

or

$$2^n(n!)=\int_0^{\infty}e^{-t}\vartheta_n(t)\,dt. \tag{3.13}$$

4. INTEGRAL REPRESENTATION OF THE PRODUCT OF TWO BESSEL POLYNOMIALS. Since [12; 439]

$$K_\nu(u)\,K_\nu(v)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\exp\left[-\frac{t}{2}-\frac{(u^2+v^2)}{2t}\right]K_\nu\left(\frac{uv}{t}\right)dt$$

and (2.4) we deduce

$$\vartheta_n(u)\,\vartheta_n(v) = \frac{e^{u+v}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left[t+\frac{(u+v)^2}{t}\right]} \cdot t^{n-\frac{1}{2}} \cdot \vartheta_n\left(\frac{u\,v}{t}\right) dt. \tag{4.1}$$

Put $v=-u$, then

$$\vartheta_n(u) \cdot \vartheta_n(-u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}}\, t^{n-\frac{1}{2}}\, \vartheta_n\left(\frac{-u^2}{t}\right) dt. \tag{4.2}$$

5. Expansion formulae. Since if $s>r$ [7; V. II; 100]

$$(s^2-r^2)^{-\frac{1}{4}}\, \mathsf{K}_{\frac{1}{2}}[z(s^2-r^2)^{\frac{1}{2}}] = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z\,r^2}{2}\right)^m \cdot \frac{s^{-m-\frac{1}{2}}}{m!} \cdot \mathsf{K}_{m+\frac{1}{2}}(z\,s)\,,$$

then it follows from (2.4) and the definition of $\mathsf{K}_{\frac{1}{2}}(x)$

$$\frac{s\,e^{s\left[z-(s^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\right]}}{(s^2-r^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^2}{2s}\right)^m \cdot \frac{\vartheta_m(z\,s)}{m!}\,. \tag{5.1}$$

Put $s=r\cosh\varphi$, we get

$$e^{z\,r\exp(\varphi)} = \tanh\varphi \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{2\cosh\varphi}\right)^m \cdot \frac{\vartheta_m(z\,r\cosh\varphi)}{m!}\,. \tag{5.2}$$

Also since if $|\lambda-1|<1$,

$$\psi(a,c;2\lambda x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!}\,(1-\lambda)^k \cdot (2x)^k\, \psi(a+k,\ c+k;\ 2x)$$

then using (2.11) we obtain

$$\Theta_n^{(\alpha)}(\lambda x) = \lambda^{(2n+\alpha+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+\alpha+1)_k}{k!} \cdot (1-\lambda)^k\, \Theta_n^{(\alpha+k)}(x). \tag{5.3}$$

As a particular case put $\alpha=-n$, $\mu=\lambda-1$, we obtain [2]

$$\frac{1}{1+\mu}\, Y_n^{-n}\left(\frac{x}{1+\mu}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\mu)^k \cdot Y_n^{k-n}(x). \tag{5.4}$$

Again by putting $\lambda=\left(1+\frac{y}{x}\right)$ in (5.3), we have

$$\Theta_n^{(\alpha)}(x+y) = \left(\frac{x+y}{x}\right)^{2n+\alpha+1} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k\, \frac{(n+\alpha+1)_k}{k!} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^k \cdot \Theta_n^{(\alpha+k)}(x). \tag{5.5}$$

6. Finally it is worth mentioning that since

$$\mathsf{K}_\mu(x) = \lim_{\nu\to\infty} \left\{\nu^{-\mu}\, e^{-i\mu\pi}\, Q_\nu^\mu\left(\frac{\cosh x}{\nu}\right)\right\},$$

where Q_ν^μ is the Legendre function of the second kind, then

$$\vartheta_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^x \cdot x^{(n+\frac{1}{2})} \cdot \lim_{\nu\to\infty} \left\{\nu^{-(n+\frac{1}{2})} \cdot e^{-i(n+\frac{1}{2})\pi}\, Q_\nu^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\cosh x}{n+\frac{1}{2}}\right)\right\}. \tag{6.1}$$

References

[1] AGARWAL, R. P.: On Bessel polynomials. Canad. J. Math. **6**, 410–415 (1954). — [2] AL-SALAM, W. A.: The Bessel polynomials. Duke Math. J. **24**, No. 4, 529–546 (1957). — [3] BRAFMAN, F.: A set of generating functions for Bessel polynomials. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 275–277 (1953). — [4] BURCHNALL, J. L.: The Bessel polynomials. Canad. J. Math. **3**, 62–68 (1951). — [5] CARLITZ, L.: On the Bessel polynomials. Duke Math. J. **24**, 151–162 (1957). — [6] DICKINSON, D.: On Lommel and Bessel polynomials. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 946–956 (1954). — [7] ERDELYI: Higher transcendental functions, I and II. NewYork-Toronto-London: McGraw-Hill 1953. — [8] GROSSWALD, E.: On some algebraic properties of the Bessel polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 197–210 (1951). — [9] KRALL, H., and O. FRINK: A new class of orthogonal polynomials: the Bessel polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. **55**, 100–115 (1949). — [10] RAINVILLE, E. D.: Generating functions for Bessel and related polynomials. Canad. J. Math. **5**, 104–106 (1953). — [11] TOSCANO, L.: Osservazioni, confronti e complementi su particolari polinomi ipergeometrici. Le Matematiche **10**, 121–133. — [12] WATSON, G. N.: Theory of Bessel functions. Cambridge 1952.

Department of Pure Mathematics, Faculty of Science, Cairo University (U.A.R.)

(Eingegangen am 19. November 1959)

SPECHT, W.
Math. Zeitschr. 74, 325–366 (1960)

Zur Theorie der meßbaren Gruppen

Von

WILHELM SPECHT

In einer Untersuchung zur allgemeinen Theorie des Maßes über den unter dem Namen „Hausdorffsches Paradoxon" berühmt gewordenen Satz[1]) hat J. VON NEUMANN[2]) den Begriff der meßbaren Gruppe eingeführt: Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *meßbar*, wenn in ihr eine reellwertige Funktion

$$\mu\colon \mathfrak{R} \to \mu(\mathfrak{R})$$

erklärt werden kann, die jedem Komplex $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{G}$ ein reelles *Maß* $\mu(\mathfrak{R})$ zuordnet unter Einhaltung nachstehender Bedingungen[3]):

1. *Es gilt* $\mu(\mathfrak{G}) = 1$.

2. *Es gilt* $\mu(\mathfrak{R}) \geqq 0$ *für jeden Komplex* $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{G}$.

3. *Für jedes Paar von Komplexen* $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2 \subseteq \mathfrak{G}$ *mit leerem Durchschnitt* $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_2 = 0$ *besteht die Gleichung*

$$\mu(\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2) = \mu(\mathfrak{R}_1) + \mu(\mathfrak{R}_2).$$

4. *Für jeden nichtleeren Komplex* $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{G}$ *und jedes Element* $G \in \mathfrak{G}$ *gilt*

$$\mu(\mathfrak{R}G) = \mu(\mathfrak{R}).$$

Es bezeichne im folgenden $\mathfrak{m}(\mathfrak{G})$ die (abstrakte) Gruppeneigenschaft[4]), eine *meßbare Gruppe* zu sein:

$$\mathfrak{m}(\mathfrak{G}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn die Gruppe } \mathfrak{G} \text{ meßbar ist,} \\ 0, & \text{wenn die Gruppe } \mathfrak{G} \text{ nicht meßbar ist.} \end{cases}$$

Da sowohl meßbare als auch nicht meßbare Gruppen existieren, erhebt sich die Frage nach einer Abgrenzung der Klasse aller meßbaren Gruppen.

1.

Die Definition der Meßbarkeit einer Gruppe kann, weil in sie die Eigenschaft der Invertierbarkeit der Elemente nicht eingeht, auf Halbgruppen aus-

[1]) Vgl. F. HAUSDORFF: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914. Anhang, Anmerkungen zum zehnten Kapitel.

[2]) Vgl. J. v. NEUMANN: Zur allgemeinen Theorie des Maßes. Fundamenta math. **13**, 71–116 (1929).

[3]) In Bezeichnung und Begriffbildung stütze ich mich auf mein Buch: W. SPECHT, Gruppentheorie. Berlin: Springer 1956. (Weiterhin mit GT zitiert.)

[4]) Über abstrakte Gruppeneigenschaften vgl. GT, Abschnitt 1.4.4. — R. BAER: Die Potenzen einer gruppentheoretischen Eigenschaft. Abh. Hamburg **22**, 276–294 (1958).

gedehnt werden [5]). Eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$ heiße demgemäß *meßbar*, wenn jedem Komplex $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{H}$ ein reelles Maß $\mu(\mathfrak{K})$ zugeordnet werden kann unter Einhaltung nachstehender Bedingungen:

1. *Es gilt* $\mu(\mathfrak{H}) = 1$.

2. *Es gilt* $\mu(\mathfrak{K}) \geqq 0$ *für jeden Komplex* $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{H}$.

3. *Für jedes Paar von Komplexen* $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2 \subseteq \mathfrak{H}$ *mit leerem Durchschnitt* $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 = 0$ *besteht die Gleichung*

$$\mu(\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2) = \mu(\mathfrak{K}_1) + \mu(\mathfrak{K}_2).$$

4. *Für jeden Komplex* $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{H}$ *und jedes Element* $H \in \mathfrak{H}$ *gilt*

$$\mu(\mathfrak{K}H) = \mu(\mathfrak{K}).$$

Die Eigenschaft der Meßbarkeit einer Gruppe läßt sich noch in anderer, für Beweisführungen häufig besser geeigneten Weise beschreiben, wobei ich wiederum aus Zweckmäßigkeitsgründen die Begriffe allgemeiner für Halbgruppen auseinandersetze:

Ist eine beliebige Halbgruppe $\mathfrak{H}$ vorgegeben, so will ich unter einer (*beschränkten, reellen*) *Funktion* $f(X)$ *auf* $\mathfrak{H}$ eine Abbildungsvorschrift

$$f\colon X \to f(X)$$

verstehen, die jedem Element $X \in \mathfrak{H}$ einen reellen Wert $f(X)$ aus einem endlichen Intervall

$$-\infty < C_f = \inf_{X \in \mathfrak{H}} f(X) \leqq f(X) \leqq \sup_{X \in \mathfrak{H}} f(X) = C_f < +\infty$$

der reellen Zahlengeraden zuordnet. Da die (in üblicher Weise erklärte) lineare Verbindung

$$f(X) = a_1 f_1(X) + a_2 f_2(X)$$

beliebiger beschränkter Funktionen $f_1(X)$, $f_2(X)$ auf $\mathfrak{H}$ mit beliebigen reellen Faktoren a_1, a_2 wieder eine reelle beschränkte Funktion auf $\mathfrak{H}$ darstellt, ist die Menge $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ aller reeller beschränkter Funktionen auf der Halbgruppe $\mathfrak{H}$ ein linearer Raum über dem Körper der reellen Zahlen. Jede Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ läßt sich durch ein beliebiges Element $H \in \mathfrak{H}$ in eine (gleichfalls beschränkte) Funktion

$$f^H(X) = f(XH)$$

transformieren. Jeder reellen Zahl c entspricht eine konstante Funktion $f(X) = c$, die jedem Element $X \in \mathfrak{H}$ den Wert c zuordnet.

Der lineare Funktionenraum $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ über einer Halbgruppe $\mathfrak{H}$ besitzt ein *additives Maß*, wenn jeder Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ ein (reeller) *Mittelwert* $M(f)$ zugeordnet werden kann unter Einhaltung nachstehender Bedingungen:

1. *Unterliegt die Funktion* $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ *der Beschränkung*

$$c_f \leqq f(X) \leqq C_f$$

[5]) Vgl. GT, Abschnitt 1.3.1.

für jedes $X \in \mathfrak{H}$, *so gilt*

$$c_f \leqq M(f) \leqq C_f.$$

2. *Für jedes Paar von Funktionen* $f_1(X)$, $f_2(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ *und jedes Paar reeller Zahlen* a_1, a_2 *besteht die Gleichung*

$$M(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 M(f_1) + a_2 M(f_2).$$

3. *Für jede Funktion* $f(X) \in B(\mathfrak{H})$ *und jedes Element* $H \in \mathfrak{H}$ *besteht die Gleichung*

$$M(f^H) = M(f).$$

Unter Verwendung der soeben eingeführten Begriffe gilt

Satz 1. *Eine Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist genau dann meßbar, wenn der Funktionenraum* $\mathsf{B}(\mathfrak{G})$ *über* $\mathfrak{G}$ *ein additives Maß besitzt.*

Bemerkung. Da der Beweis dieses Satzes wesentlich von der Invertierbarkeit der Elemente einer Gruppe abhängt, kann die gleiche Aussage für Halbgruppen allgemein nicht erwartet werden.

Beweis. Besitzt der Funktionenraum $\mathsf{B}(\mathfrak{G})$ über der Gruppe $\mathfrak{G}$ ein additives Maß, so entspricht jedem Komplex $\mathfrak{K} \subseteqq \mathfrak{G}$ eine charakteristische (beschränkte) Funktion

$$\varphi_{\mathfrak{K}}(X) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } X \in \mathfrak{K}, \\ 0, & \text{wenn } X \notin \mathfrak{K}, \end{cases}$$

mit dem Mittelwert

$$\mu(\mathfrak{K}) = M(\varphi_{\mathfrak{K}}).$$

Die hierdurch erklärte Funktion ist, wie man leicht nachprüft, ein Maß der Gruppe $\mathfrak{G}$. Denn es gilt

$$\varphi_{\mathfrak{G}}(X) = 1 \qquad \text{für jedes } X \in \mathfrak{G},$$

also

$$\mu(\mathfrak{G}) = 1,$$

ferner

$$\varphi_{\mathfrak{K}}(X) \geqq 0 \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{G} \text{ und jedes } \mathfrak{K} \subseteqq \mathfrak{G},$$

also

$$\mu(\mathfrak{K}) \geqq 0.$$

Für Komplexe $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2 \subseteqq \mathfrak{G}$ mit leerem Durchschnitt $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 = 0$ besteht ferner die Gleichung

$$\varphi_{\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2}(X) = \varphi_{\mathfrak{K}_1}(X) + \varphi_{\mathfrak{K}_2}(X),$$

woraus

$$\mu(\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2) = \mu(\mathfrak{K}_1) + \mu(\mathfrak{K}_2)$$

folgt. Schließlich gilt für jeden Komplex $\mathfrak{K} \subseteqq \mathfrak{G}$ und jedes Element $G \in \mathfrak{G}$

$$\varphi_{\mathfrak{K}G}(X) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } X \in \mathfrak{K}G, \\ 0, & \text{wenn } X \notin \mathfrak{K}G, \end{cases}$$

$$\varphi_{\mathfrak{K}}^{G^{-1}}(X) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } XG^{-1} \in \mathfrak{K}, \text{ d.h. } X \in \mathfrak{K}G, \\ 0, & \text{wenn } XG^{-1} \notin \mathfrak{K}, \text{ d.h. } X \notin \mathfrak{K}G, \end{cases}$$

also

$$\varphi_{\mathfrak{R}}^{G^{-1}}(X) = \varphi_{\mathfrak{R}}(XG^{-1}) = \varphi_{\mathfrak{R}G}(X) \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{G}$$

und folglich

$$\mu(\mathfrak{R}) = M(\varphi_{\mathfrak{R}}) = M(\varphi_{\mathfrak{R}}^{G^{-1}}) = M(\varphi_{\mathfrak{R}G}) = \mu(\mathfrak{R}G).$$

Ist andererseits $f(X)$ eine beliebige beschränkte Funktion über einer meßbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ mit dem Maß $\mu(\mathfrak{R})$, so bezeichne für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$Z_\varepsilon = (\cdots < z_{-2} < z_{-1} < z_0 < z_1 < z_2 < \cdots)$$

eine beliebige Zerlegung der reellen Zahlengeraden in Intervalle

$$z_n \leqq x < z_{n+1} \quad \text{mit} \quad 0 < z_{n+1} - z_n \leqq \varepsilon$$

und $\mathfrak{R}(f, Z_\varepsilon, n)$ den Komplex aller Elemente $X \in \mathfrak{G}$, die der Bedingung

$$z_n \leqq f(X) < z_{n+1}$$

genügen. Da (wegen der Beschränktheit der Funktion $f(X)$) nur endlich viele dieser Komplexe nichtleer sind, stellt

$$M(f, Z_\varepsilon) = \sum_{-\infty}^{+\infty} z_n \mu\left(\mathfrak{R}(f, Z_\varepsilon, n)\right)$$

eine endliche Summe dar. In bekannter Weise folgert man nun die Konvergenz dieser Werte gegen einen Grenzwert

$$M(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} M(f, Z_\varepsilon).$$

Die hierdurch erklärte Funktion $M(f)$ stellt dann ein additives Maß des Funktionenraumes $\mathsf{B}(\mathfrak{G})$ dar.

Unterliegt nämlich die Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{G})$ der Beschränkung

$$c_f \leqq f(X) \leqq C_f \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{G},$$

so gilt auch

$$c_f \leqq M(f) \leqq C_f.$$

Die Eigenschaft

$$M(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 M(f_1) + a_2 M(f_2)$$

ist unmittelbar erkennbar. Für die transformierte Funktion

$$f^H(X) = f(XH)$$

besteht die Ungleichung

$$z_n \leqq f^H(X) = f(XH) < z_{n+1}$$

genau dann wenn

$$X \in \mathfrak{R}(f^H, Z_\varepsilon, n) \quad \text{bzw.} \quad XH \in \mathfrak{R}(f, Z_\varepsilon, n).$$

Mithin besteht die Gleichung

$$\mu\left(\mathfrak{R}(f^H, Z_\varepsilon, n)\right) = \mu\left(\mathfrak{R}(f, Z_\varepsilon, n)\, H^{-1}\right) = \mu\left(\mathfrak{R}(f, Z_\varepsilon, n)\right),$$

also auch die Gleichung

$$M(f^H, Z_\varepsilon) = \sum_{-\infty}^{+\infty} z_n \mu\left(\mathfrak{R}(f^H, Z_\varepsilon, n)\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} z_n \mu\left(\mathfrak{R}(f, Z_\varepsilon, n)\right) = M(f, Z_\varepsilon).$$

Hieraus folgt

$$M(f^H) = M(f).$$

Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Die Existenz meßbarer Gruppen zeigt der

Satz 2. *Jede endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ ist meßbar.*

Beweis. Besitzt die endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ die Ordnung $\operatorname{ord}(\mathfrak{G}) = g$ und die Elemente $G_1, G_2, \ldots, G_g$, so läßt sich jede Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(G)$ als g-tupel

$$f(X) = [f(G_1), f(G_2), \ldots, f(G_g)]$$

reeller Zahlen beschreiben. Man überzeugt sich leicht davon, daß der Ausdruck

$$M(f) = \frac{1}{g}\left(f(G_1) + f(G_2) + \cdots + f(G_g)\right)$$

die geforderten Eigenschaften eines Mittelwertes besitzt. Mithin ist die endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ meßbar.

Als Ergänzung zu diesem Satze mag noch erwähnt werden:

Satz 2*. *Eine endliche meßbare Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit Einheit E ist eine (endliche) Gruppe.*

Beweis. Besitzt die Halbgruppe $\mathfrak{H}$ die Ordnung $\operatorname{ord}(\mathfrak{H}) = h$ und die Elemente $E = H_1, H_2, \ldots, H_h$, so bestehen die Gleichungen

$$\mu(E) = \mu(H_2) = \cdots = \mu(H_h)$$

und

$$1 = \mu(\mathfrak{H}) = \mu(E) + \mu(H_2) + \cdots + \mu(H_h) = h\,\mu(E).$$

Mithin gilt

$$\mu(H) = 1/h \quad \text{für jedes } H \in \mathfrak{H}.$$

Daher besteht für einen Komplex $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{H}$ die Gleichung

$$\mu(\mathfrak{K}) = k/h$$

genau dann, wenn $\mathfrak{K}$ aus k Elementen besteht. Die für jedes Element $H \in \mathfrak{H}$ gültige Gleichung

$$\mu(\mathfrak{H}) = \mu(\mathfrak{H}H) = 1$$

zeigt, daß der Komplex $\mathfrak{H}H$ aus genau h Elementen besteht. Da hieraus die Gleichung

$$\mathfrak{H}H = \mathfrak{H} \quad \text{für jedes } H \in \mathfrak{H}$$

folgt, ist $\mathfrak{H}$ eine (endliche) Gruppe.

Die Existenz nichtmeßbarer Gruppen zeigt der

Satz 3 (F. HAUSDORFF). *Das freie Produkt*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_{2,3} = \mathfrak{Z}_2 * \mathfrak{Z}_3$$

einer zyklischen Gruppe $\mathfrak{Z}_2$ *der Ordnung* 2 *und einer zyklischen Gruppe* $\mathfrak{Z}_3$ *der Ordnung* 3 *ist eine nichtmeßbare Gruppe.*

Beweis. Jedes Element der Gruppe

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_{2,3} = \{A, B\} \quad \text{mit } A^2 = B^3 = E$$

besitzt eine (eindeutige) Normalform

$$F_k = B^{\nu} A B^{\nu_1} A B^{\nu_2} \dots A B^{\nu_k} \quad \text{bzw.} \quad G_k = B^{\nu} A B^{\nu_1} A B^{\nu_2} \dots A B^{\nu_k} A,$$

deren Exponenten ν bzw. $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ einen der Werte 0, 1, 2 bzw. einen der Werte 1, 2 haben. Den Index $k \geqq 0$ nennen wir die Länge der Elemente $F_k, G_k \in \mathfrak{G}$; von der Länge $k = 0$ sind die Elemente

$$F_0 = E, B, B^2 \quad \text{bzw.} \quad G_0 = A, BA, B^2A.$$

Wir zerlegen nun die Gruppe $\mathfrak{G}$ in drei paarweise fremde Komplexe:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2,$$

dergestalt daß die Gleichungen

$$\mathfrak{R}_0 A = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2; \qquad \mathfrak{R}_0 B = \mathfrak{R}_1; \qquad \mathfrak{R}_0 B^2 = \mathfrak{R}_2$$

bestehen, und zwar nach folgender induktiver Vorschrift (bezüglich der Länge der Elemente von $\mathfrak{G}$):

1. Es gelte $F_0 = B^{\nu} \in \mathfrak{R}_{\nu}$ für $\nu = 0, 1, 2$.

2. Wenn $F_k \in \mathfrak{R}_0$, dann gelte $G_k = F_k A \in \mathfrak{R}_1$; wenn $F_k \in \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$, dann gelte $G_k = F_k A \in \mathfrak{R}_0$.

3. Wenn $G_k \in \mathfrak{R}_{\nu}$ für $\nu = 0, 1, 2$, dann gelte

$$F_{k+1} = G_k B \in \mathfrak{R}_{\nu+1} \quad \text{und} \quad F_{k+1} = G_k B^2 \in \mathfrak{R}_{\nu+2}$$

(bei mod 3 reduzierten Indizes).

Offensichtlich sind nach dieser Vorschrift die Komplexe $\mathfrak{R}_{\nu}$ paarweise fremd, und es besteht die Gleichung

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2.$$

Für Elemente $F_k \in \mathfrak{R}_0$ bzw. $G'_k = F'_k A \in \mathfrak{R}_0$ gilt weiter

$$F_k A = G_k \in \mathfrak{R}_1 \quad \text{bzw.} \quad G'_k A = F'_k \in \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2;$$

daher besteht die Beziehung

$$\mathfrak{R}_0 A \subseteq \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2.$$

Für Elemente $F_k \in \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ bzw. $G'_k = F'_k A \in \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ gilt

$$F_k A = G_k \in \mathfrak{R}_0 \quad \text{bzw.} \quad G'_k = F'_k A \in \mathfrak{R}_1, \quad \text{also} \quad G'_k A = F'_k \in \mathfrak{R}_0;$$

hieraus folgt

$$(\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2)\, A \subseteqq \mathfrak{K}_0$$

und damit die Gleichung

$$\mathfrak{K}_0 A = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2.$$

Für Elemente $G_k \in \mathfrak{K}_r$ bzw. $F'_{k+1} = G'_k B \in \mathfrak{K}_r$ bzw. $F''_{k+1} = G''_k B^2 \in \mathfrak{K}_r$ gilt gemäß der Vorschrift

$$F_{k+1} = G_k B \in \mathfrak{K}_{r+1}$$

bzw.

$$F'_{k+1} B^2 = G'_k \in \mathfrak{K}_{r-1}, \qquad \text{also } F'_{k+1} B = G'_k B^2 \in \mathfrak{K}_{r+1}$$

bzw.

$$F''_{k+1} B = G''_k \in \mathfrak{K}_{r-2} = \mathfrak{K}_{r+1};$$

mithin besteht die Beziehung

$$\mathfrak{K}_r B \subseteqq \mathfrak{K}_{r+1},$$

also

$$\mathfrak{K}_0 B \subseteqq \mathfrak{K}_1; \qquad \mathfrak{K}_1 B \subseteqq \mathfrak{K}_2; \qquad \mathfrak{K}_2 B \subseteqq \mathfrak{K}_0$$

und folglich

$$\mathfrak{K}_0 B = \mathfrak{K}_1; \qquad \mathfrak{K}_0 B^2 = \mathfrak{K}_2.$$

Wäre nun die Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_{2,3}$ meßbar, so müßte gelten

$$1 = \mu(\mathfrak{G}) = \mu(\mathfrak{K}_0 + \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2) = \mu(\mathfrak{K}_0) + \mu(\mathfrak{K}_1) + \mu(\mathfrak{K}_2);$$
$$\mu(\mathfrak{K}_0) = \mu(\mathfrak{K}_0 A) = \mu(\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2) = \mu(\mathfrak{K}_1) + \mu(\mathfrak{K}_2);$$
$$\mu(\mathfrak{K}_0) = \mu(\mathfrak{K}_0 B) = \mu(\mathfrak{K}_1);$$
$$\mu(\mathfrak{K}_0) = \mu(\mathfrak{K}_0 B^2) = \mu(\mathfrak{K}_2),$$

was offensichtlich unmöglich ist. Die Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_{2,3}$ ist also nicht meßbar.

2.

Wesentlich tiefer als das Bisherige liegt der [6])

Satz 4 (S. Banach-J. v. Neumann). *Jede abelsche Gruppe ist meßbar.*

Dieser Satz folgt aus dem allgemeineren, für das Weitere auch als Beweisprinzip wertvollen

Satz 4*. *Der Funktionenraum* $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ *über einer abelschen Halbgruppe* $\mathfrak{H}$ *besitzt ein additives Maß.*

Bemerkung. Auf Grund des Satzes 1 ist der Satz von S. Banach-J. v. Neumann unmittelbare Folgerung des Satzes 4*.

Der Beweis des Satzes 4* bedarf einiger Vorbereitungen [7]). Der Funktionenraum $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ über der abelschen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ ist ein linearer $\mathfrak{H}$-invarianter Raum über dem Körper der reellen Zahlen auf Grund der folgenden drei Eigenschaften:

[6]) Vgl. S. Banach: Sur le problème de la mesure. Fundamenta math. 4, 7—33 (1923).

[7]) Der hier durchgeführte Beweis ist eine Verallgemeinerung des Banachschen Gedankengangs, gestützt auf Bemerkungen J. v. Neumanns.

1. Jede lineare Verbindung

$$f(X) = a_1 f_1(X) + a_2 f_2(X)$$

von Funktionen $f_1(X), f_2(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ mit reellen Faktoren a_1, a_2 gehört dem Raum $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ an.

2. Jede Transformierte

$$f^H(X) = f(XH)$$

einer Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ mit einem Element $H \in \mathfrak{H}$ gehört dem Raum $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ an.

3. Jede lineare Verbindung

$$f(X) = a_1 f_1(X) + a_2 f_2(X)$$

von Funktionen $f_1(X), f_2(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ mit reellen Faktoren a_1, a_2 genügt für jedes Element $H \in \mathfrak{H}$ der Gleichung

$$f^H(X) = a_1 f_1^H(X) + a_2 f_2^H(X).$$

Als $\mathfrak{H}$-*invarianten Teilraum des Funktionenraumes* $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ bezeichnen wir jede Teilmenge $\mathfrak{A}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ mit diesen drei Eigenschaften.

Eine Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ heiße *Nilfunktion*, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt:

Zu jedem reellen Wert $\varepsilon > 0$ läßt sich eine endliche Serie von Elementen $H_1, H_2, \ldots, H_n \in \mathfrak{H}$ angeben, derart daß für jedes $X \in \mathfrak{H}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} f(XH_\nu)\right| < \varepsilon$$

besteht.

Lemma 1. *Die Menge $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$ aller Nilfunktionen ist ein $\mathfrak{H}$-invarianter Teilraum des Funktionenraumes $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$.*

Beweis. Für Nilfunktionen $f(X), g(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ lassen sich zu vorgegebenem Wert $\varepsilon > 0$ Elemente $F_1, F_2, \ldots, F_m$ bzw. $G_1, G_2, \ldots, G_n$ aus $\mathfrak{H}$ derart angeben, daß für jedes $X \in \mathfrak{H}$

$$\frac{1}{m}\left|\sum_{\mu=1}^{m} f(XF_\mu)\right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} g(XG_\nu)\right| < \varepsilon.$$

Daher gilt auch für $1 \leqq \nu \leqq n$ bzw. $1 \leqq \mu \leqq m$ und jedes $X \in \mathfrak{H}$

$$\frac{1}{m}\left|\sum_{\mu=1}^{m} f(XG_\nu F_\mu)\right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} g(XF_\mu G_\nu)\right| < \varepsilon.$$

Da die Halbgruppe $\mathfrak{H}$ abelsch ist, folgt weiter für jedes Paar reeller Zahlen a, b und jedes $X \in \mathfrak{H}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{mn}\left|\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}[a f(XF_\mu G_\nu) + b g(XF_\mu G_\nu)]\right|$$

$$\leqq \frac{|a|}{mn}\sum_{\nu=1}^{n}\left|\sum_{\mu=1}^{m} f(XG_\nu F_\mu)\right| + \frac{|b|}{mn}\sum_{\mu=1}^{m}\left|\sum_{\nu=1}^{n} g(XF_\mu G_\nu)\right| < (|a| + |b|)\,\varepsilon.$$

Mithin ist auch die lineare Verbindung $af(X) + bg(X)$ eine Nilfunktion.

Besteht für eine Nilfunktion $f(X) \in \mathsf{N}(\mathfrak{H})$ die Ungleichung

$$\frac{1}{m}\left|\sum_{\mu=1}^{m} f(XF_\mu)\right| < \varepsilon \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H},$$

so gilt für jedes Paar von Elementen $X, H \in \mathfrak{H}$ auch

$$\frac{1}{m}\left|\sum_{\mu=1}^{m} f^H(XF_\mu)\right| = \frac{1}{m}\left|\sum_{\mu=1}^{m} f(XHF_\mu)\right| < \varepsilon.$$

Mithin ist die Transformierte $f^H(X)$ eine Nilfunktion.

Auf das Lemma 1 läßt sich in bekannter Weise eine Klasseneinteilung des Funktionenraumes $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ nach dem Teilraum $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$ gründen mittels der Festsetzung:

Zwei Funktionen $f(X), g(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ *heißen kongruent* mod $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$:

$$f(X) \equiv g(X) \bmod \mathsf{N},$$

wenn die Differenz $f(X) - g(X)$ *eine Nilfunktion ist.*

Unmittelbare Folgerung aus Lemma 1 ist dann

Lemma 2. *Es gilt* $f(X) \equiv f(X)$ *mod* N.

Aus $f(X) \equiv g(X)$ mod N folgt $g(X) \equiv f(X)$ mod N.

Aus $f(X) \equiv g(X)$ mod N *und* $g(X) \equiv h(X)$ mod N *folgt* $f(X) \equiv h(X)$ mod N.

Aus $f_1(X) \equiv g_1(X)$ mod N *und* $f_2(X) \equiv g_2(X)$ mod N *folgt für beliebige reelle Faktoren* a_1, a_2

$$a_1 f_1(X) + a_2 f_2(X) \equiv a_1 g_1(X) + a_2 g_2(X) \bmod \mathsf{N}.$$

Aus $f(X) \equiv g(X)$ mod N *folgt für jedes Element* $H \in \mathfrak{H}$

$$f^H(X) \equiv g^H(X) \bmod \mathsf{N}.$$

Besondere Bedeutung kommt für das Weitere der Aussage zu:

Lemma 2*. *Für jede Funktion* $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ *und jedes Element* $H \in \mathfrak{H}$ *gilt*

$$f^H(X) \equiv f(X) \bmod \mathsf{N}.$$

Beweis. Unterliegt die Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ der Beschränkung

$$c \leqq f(X) \leqq C \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H},$$

so genügt die Funktion

$$g(X) = f(X) - f(XH) \quad \text{mit } H \in \mathfrak{H}$$

der Ungleichung

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} g(XH^\nu)\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} f(XH^\nu) - f(XH^{\nu+1})\right| = \frac{1}{n}\left|f(XH) - f(XH^{n+1})\right| \leqq \frac{C-c}{n}.$$

Mithin ist die Funktion $g(X)$ eine Nilfunktion.

Wir bezeichnen eine Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ als *positiv* mod $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$:

$$f(X) > 0 \bmod \mathsf{N},$$

wenn eine reelle Zahl $C > 0$ und eine Serie von Elementen $H_1, H_2, \ldots, H_n \in \mathfrak{H}$ existiert, derart daß die Ungleichung

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(XH_\nu) \geqq C > 0 \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H}$$

besteht; eine Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ heißt *negativ* mod $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$:

$$f(X) < 0 \bmod \mathsf{N},$$

wenn die Funktion $-f(X)$ positiv mod N ist. Wir schreiben für Funktionen $f(X), g(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ auch

$$f(X) > g(X) \bmod \mathsf{N} \quad \text{oder} \quad g(X) < f(X) \bmod \mathsf{N},$$

wenn $f(X) - g(X)$ positiv mod N ist.

Für diese Ordnung der Funktionen $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ mod $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$ stellen wir leicht nachstehende Regeln fest:

Lemma 3. *Aus* $f(X) > 0 \bmod \mathsf{N}$ *folgt* $f^H(X) > 0 \bmod \mathsf{N}$ *für jedes* $H \in \mathfrak{H}$.

Aus $f(X) > 0 \bmod \mathsf{N}$ *und* $g(X) > 0 \bmod \mathsf{N}$ *folgt*

$$f(X) + g(X) > 0 \bmod \mathsf{N}.$$

Aus $f(X) > 0 \bmod \mathsf{N}$ *folgt für jede reelle Zahl* $a > 0$

$$a f(X) > 0 \bmod \mathsf{N}.$$

Aus $f(X) > 0 \bmod \mathsf{N}$ *und* $g(X) \equiv 0 \bmod \mathsf{N}$ *folgt*

$$f(X) + g(X) > 0 \bmod \mathsf{N}.$$

Aus $f(X) > g(X) \bmod \mathsf{N}$ *und* $g(X) > h(X) \bmod \mathsf{N}$ *folgt*

$$f(X) > h(X) \bmod \mathsf{N}.$$

Aus $f(X) > g(X) \bmod \mathsf{N}$ *und*

$$f(X) \equiv f_1(X) \bmod \mathsf{N}; \quad g(X) \equiv g_1(X) \bmod \mathsf{N}$$

folgt

$$f_1(X) > g_1(X) \bmod \mathsf{N}.$$

Beweis. Besteht für eine mod N positive Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ die Ungleichung

$$\frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^{m} f(XF_\mu) \geqq C > 0 \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H},$$

so folgt für jedes Element $H \in \mathfrak{H}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^{m} f^H(XF_\mu) = \frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^{m} f(XHF_\mu) \geqq C > 0 \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H},$$

für jede reelle Zahl $a > 0$ die Ungleichung

$$\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m} a\, f(XF_\mu) \geqq a\, C > 0 \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H}.$$

Besteht für eine weitere mod N positive Funktion $g(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ die Ungleichung

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} g(XG_\nu) \geqq D > 0 \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H},$$

so folgt für $1 \leqq \nu \leqq n$ bzw. $1 \leqq \mu \leqq m$ und jedes $X \in \mathfrak{H}$

$$\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m} f(XF_\mu G_\nu) \geqq C > 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} g(XF_\mu G_\nu) \geqq D > 0,$$

also

$$\frac{1}{m\,n}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} [f(XF_\mu G_\nu) + g(XF_\mu G_\nu)] \geqq C + D > 0.$$

Besteht für eine mod N positive Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ die Ungleichung

$$\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m} f(XF_\mu) \geqq C > 0 \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H},$$

so lassen sich zu einer Nilfunktion $g(X) \in \mathsf{N}(\mathfrak{H})$ Elemente $G_1, G_2, \ldots, G_n \in \mathfrak{H}$ angeben, derart daß

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} g(XG_\nu)\right| < \frac{C}{2} \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H}.$$

Daraus folgt für $1 \leqq \nu \leqq n$ bzw. $1 \leqq \mu \leqq m$ und jedes $X \in \mathfrak{H}$

$$\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m} f(XF_\mu G_\nu) \geqq C > 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} g(XF_\mu G_\nu)\right| < \frac{C}{2},$$

also

$$\frac{1}{m\,n}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} [f(XF_\mu G_\nu) + g(XF_\mu G_\nu)]$$

$$\geqq \frac{1}{m\,n}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} f(XF_\mu G_\nu) - \frac{1}{m\,n}\sum_{\mu=1}^{m}\left|\sum_{\nu=1}^{n} g(XF_\mu G_\nu)\right| > C - \frac{C}{2} = \frac{C}{2} > 0.$$

Die letzten beiden Aussagen des Lemma 3 sind unmittelbare Folgerungen des Vorangehenden.

Wir stellen ferner fest:

Lemma 3*. *Eine Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ erfüllt höchstens eine der drei Beziehungen*

$$f(X) > 0 \bmod \mathsf{N}; \quad f(X) \equiv 0 \bmod \mathsf{N}; \quad f(X) < 0 \bmod \mathsf{N}.$$

Beweis. Es genügt nachzuweisen, daß die Annahmen

$$f(X) > 0 \bmod \mathsf{N} \quad \text{und} \quad f(X) \equiv 0 \bmod \mathsf{N},$$

sowie die Annahmen

$$f(X) > 0 \bmod \mathsf{N} \quad \text{und} \quad f(X) < 0 \bmod \mathsf{N}$$

unverträglich sind.

Für eine mod N positive Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ existieren eine Konstante $C > 0$ und eine Serie von Elementen $H_\nu \in \mathfrak{H}$, derart daß

$$g(X) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(XH_\nu) \geqq C > 0 \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H}.$$

Da dann für jedes Serie von Elementen $F_\mu \in \mathfrak{H}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^{m} g(XF_\mu) \geqq C > 0 \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H}$$

besteht, ist $g(X)$ weder eine Nilfunktion noch eine mod N negative Funktion.

Aus der Annahme $f(X) \equiv 0 \bmod \mathsf{N}$ würde folgen

$$g(X) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f^{H_\nu}(X) \equiv \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(X) \equiv f(X) \equiv 0 \bmod \mathsf{N};$$

aus der Annahme $f(X) < 0 \bmod \mathsf{N}$ würde folgen

$$g(X) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f^{H_\nu}(X) < 0 \bmod \mathsf{N}.$$

Auf Grund der bisherigen Ergebnisse erhalten wir nunmehr

Lemma 4. *Die Menge $\Phi(\mathfrak{H}) = \mathsf{B}(\mathfrak{H})/\mathsf{N}(\mathfrak{H})$ der Restklassen des Funktionenraumes $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ nach dem Teilraum $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$ der Nilfunktionen ist ein geordneter linearer Raum über dem Körper der reellen Zahlen unter folgenden Festsetzungen:*

1. *Für jedes Paar von Restklassen $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(\mathfrak{H})$ und jedes Paar reeller Zahlen a_1, a_2 bezeichne die lineare Verbindung*

$$\varphi = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2$$

die Restklasse aller Funktionen

$$f(X) = a_1 f_1(X) + a_2 f_2(X) \quad \text{mit} \quad f_1(X) \in \varphi_1 \quad \text{und} \quad f_2(X) \in \varphi_2.$$

2. *Für ein Paar von Restklassen $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(\mathfrak{H})$ bestehe die Ordnungsbeziehung*

$$\varphi_1 < \varphi_2 \quad (\text{oder } \varphi_2 > \varphi_1),$$

wenn die Beziehung

$$f_1(X) < f_2(X) \bmod \mathsf{N} \quad \text{für jedes } f_1(X) \in \varphi_1 \text{ und } f_2(X) \in \varphi_2$$

besteht.

Die Eindeutigkeit der in diesem Lemma gegebenen Erklärungen ist durch das Lemma 2 bzw. das Lemma 3 gesichert.

Eine Restklasse $\varphi \in \Phi(\mathfrak{H})$ bezeichnen wir auch als eine *Hyperfunktion*. Insbesondere bezeichne in diesem Zusammenhang die reelle Zahl a stets diejenige Hyperfunktion aus $\Phi(\mathfrak{H})$, der die Zahl a (als konstante Funktion über $\mathfrak{H}$) angehört; demgemäß bezeichnet 0 die Klasse $\mathsf{N}(\mathfrak{H})$ der Nilfunktionen aus $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$.

Die Ordnungsbeziehung im Hyperfunktionenraum $\Phi(\mathfrak{H})$ wird durch die nachstehend aufgeführten Eigenschaften gekennzeichnet, die aus den bisherigen Ergebnissen leicht hergeleitet werden können:

1. *Aus* $\varphi_1 < \varphi_2$ *und* $\varphi_2 < \varphi_3$ *folgt* $\varphi_1 < \varphi_3$.

2. *Aus* $\varphi_1 < \varphi_2$ *folgt* $a\,\varphi_1 < a\,\varphi_2$ *für jede reelle Zahl* $a > 0$.

3. *Aus* $\varphi_1 < \psi_1$ *und* $\varphi_2 < \psi_2$ *folgt* $\varphi_1 + \varphi_2 < \psi_1 + \psi_2$.

4. *Für jede Hyperfunktion* $\varphi \in \Phi(\mathfrak{H})$ *besteht höchstens eine der drei Beziehungen*

$$\varphi > 0; \quad \varphi = 0; \quad \varphi < 0.$$

Weiter erhalten wir das wichtige

Lemma 4*. *Jede Hyperfunktion* $\varphi \in \Phi(\mathfrak{H})$ *ist beschränkt, d. h. es existieren reelle Konstante* c *und* C, *derart daß die Ungleichungen*

$$c < \varphi < C$$

bestehen.

Beweis. Ist δ eine beliebige positive reelle Zahl und $f(X)$ eine beliebige (beschränkte) Funktion aus der Hyperfunktion $\varphi \in \Phi(\mathfrak{H})$, so existieren Konstante c und C, derart daß

$$c + \delta < f(X) < C - \delta \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H}.$$

Da dann auch für jedes Paar von Elementen X, $H_1 \in \mathfrak{H}$

$$0 < \delta < f(XH_1) - c \quad \text{und} \quad 0 < \delta < C - f(XH_1),$$

folgt

$$c < f(X) \bmod \mathsf{N} \quad \text{und} \quad f(X) < C \bmod \mathsf{N}$$

und damit $c < \varphi < C$.

3.

Der Beweis des Satzes 4* ist ein fast unmittelbare Folgerung aus dem

Lemma 5. *Der Hyperfunktionenraum* $\Phi(\mathfrak{H})$ *besitzt ein (reellwertiges) Maß*

$$M\colon \varphi \to M(\varphi) \quad \text{für jedes } \varphi \in \Phi(\mathfrak{H})$$

mit den Eigenschaften:

1. *Für jedes Paar von Hyperfunktionen* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(\mathfrak{H})$ *und jedes Paar reeller Zahlen* a_1, a_2 *besteht die Gleichung*

$$M(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 M(\varphi_1) + a_2 M(\varphi_2).$$

2. *Genügen zwei Hyperfunktionen* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(\mathfrak{H})$ *der Ordnungsbeziehung* $\varphi_1 < \varphi_2$, *so besteht die Ungleichung*

$$M(\varphi_1) \leqq M(\varphi_2).$$

3. *Für jede konstante Hyperfunktion* $c \in \Phi(\mathfrak{H})$ *besteht die Gleichung*

$$M(c) = c.$$

Nach Beweis dieses Lemma liefert die Zuordnung

$$f(X) \to M(f) = M(\varphi) \quad \text{für jede Funktion } f(X) \in \varphi \in \Phi(\mathfrak{H})$$

ein additives Maß des Funktionenraumes $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ über der Halbgruppe $\mathfrak{H}$, da aus der für jede Funktion $f(X)$ und jedes Element $H \in \mathfrak{H}$ gültigen Kongruenz

$$f^H(X) \equiv f(X) \bmod \mathsf{N}$$

auch die Invarianzbedingung

$$M(f^H) = M(f)$$

gewonnen wird.

Unter einem Teilraum Ω des Hyperfunktionenraumes $\Phi(\mathfrak{H})$ der Halbgruppe $\mathfrak{H}$ verstehen wir in gewohnter Weise einen linearen Teilraum, also eine Teilmenge von $\Phi(\mathfrak{H})$ mit der Eigenschaft:

Für jedes Paar von Hyperfunktionen $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega$ und jedes Paar reeller Zahlen a_1, a_2 gehört die lineare Verbindung $\varphi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$ zur Menge Ω.

Insbesondere bilden die konstanten Hyperfunktionen aus $\Phi(\mathfrak{H})$ einen Teilraum Ω_0 von $\Phi(\mathfrak{H})$.

Ist Ω ein beliebiger Teilraum des Raumes $\Phi(\mathfrak{H})$ und ψ eine nicht zu Ω gehörende Hyperfunktion aus $\Phi(\mathfrak{H})$, so bezeichne $\Omega(\psi)$ den von allen linearen Verbindungen

$$\varphi = \varphi_0 + c\psi \quad \text{mit} \quad \varphi_0 \in \Omega$$

gebildeten Teilraum in $\Phi(\mathfrak{H})$. Daß $\Omega(\psi)$ in der Tat Teilraum von $\Phi(\mathfrak{H})$ ist, leuchtet unmittelbar ein. Die angegebene Darstellung einer Hyperfunktion $\varphi \in \Omega(\psi)$ ist überdies eindeutig, da eine Gleichung

$$\varphi = \varphi_0 + c\psi = \varphi_0' + c'\psi \quad \text{mit} \quad \varphi_0, \varphi_0' \in \Omega$$

im Falle $c \neq c'$ auf

$$\psi = \frac{1}{c - c'}(\varphi_0' - \varphi_0) \in \Omega$$

führen würde, während im Falle $c = c'$ auch die Gleichung $\varphi_0 = \varphi_0'$ folgt.

Wir wählen nun zum Beweise des Lemma 5 im Hyperfunktionenraum $\Phi(\mathfrak{H})$ eine *aufsteigend wohlgeordnete Kette* (Ω_ν) von Teilräumen aus mit folgenden Eigenschaften:

1. *Es sei Ω_0 der Teilraum aller konstanten Hyperfunktionen aus $\Phi(\mathfrak{H})$.*
2. *Es sei*

$$\Omega_\nu \subset \Omega_{\nu+1} = \Omega_\nu(\psi_{\nu+1}) \quad \textit{für jeden Index } \nu < \sigma \in \Lambda,$$

$$\Omega_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \Omega_\nu \quad \textit{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \sigma.$$

3. *Es sei $\Omega_\sigma = \Phi(\mathfrak{H})$.*

Dabei bezeichnet Λ eine geeignet gewählte, wohlgeordnete Indexmenge von der Mächtigkeit des Raumes $\Phi(\mathfrak{H})$.

Der Beweis der Möglichkeit einer solchen Auswahl läßt sich leicht erbringen mittels einer Wohlordnung

$$(\varphi)\colon \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_\nu, \varphi_{\nu+1}, \cdots$$

aller Hyperfunktionen $\varphi_\nu \in \Phi(\mathfrak{H})$. Zunächst sei Ω_0 der Teilraum der konstanten Hyperfunktionen aus $\Phi(\mathfrak{H})$. Sind für einen Index $\lambda \in \Lambda$ sämtliche Teilräume Ω_ν mit einem Index $\nu < \lambda$ gemäß der angegebenen Vorschrift ausgewählt, so setze man für einen Limesindex λ

$$\Omega_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \Omega_\nu .$$

Offenbar ist diese Vereinigung Teilraum in $\Phi(\mathfrak{H})$. Ist aber λ nicht Limesindex und ψ_λ die erste nicht zum Teilraum $\Omega_{\lambda-1}$ gehörende Hyperfunktion in der Wohlordnung (φ), so setze man

$$\Omega_\lambda = \Omega_{\lambda-1}(\psi_\lambda) .$$

Diese Konstruktion läßt sich so lange fortsetzen, bis die Gleichung

$$\Omega_\sigma = \Phi(\mathfrak{H})$$

eintritt.

Wir zeigen nun durch transfinite Induktion, daß für jeden Teilraum Ω_λ der Kette (Ω_ν) ein *additives Maß* $M_\lambda(\varphi)$ als reellwertige Funktion erklärt werden kann mit folgenden Eigenschaften:

1. *Für jedes Paar von Hyperfunktionen* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega_\lambda$ *und jedes Paar reeller Zahlen* a_1, a_2 *besteht die Gleichung*

$$M_\lambda(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 M_\lambda(\varphi_1) + a_2 M_\lambda(\varphi_2) .$$

2. *Genügen zwei Hyperfunktionen* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega_\lambda$ *der Ordnungsbeziehung* $\varphi_1 < \varphi_2$, *so besteht die Ungleichung*

$$M_\lambda(\varphi_1) \leqq M_\lambda(\varphi_2) .$$

3. *Für jede Hyperfunktion* $\varphi \in \Omega_\nu$ *mit einem Index* $\nu < \lambda$ *besteht die Gleichung*

$$M_\nu(\varphi) = M_\lambda(\varphi) .$$

Im Teilraum Ω_0 der konstanten Hyperfunktionen aus $\Phi(\mathfrak{H})$ setzen wir fest

$$M_0(c) = c .$$

Offenbar besitzt dieses Maß $M_0(\varphi)$ sämtliche geforderten Eigenschaften. Zur Durchführung der transfiniten Induktion dürfen wir daher annehmen, für jeden Index $\varkappa < \lambda$ sei bereits ein additives Maß $M_\varkappa(\varphi)$ mit den verlangten Eigenschaften bestimmt.

1. Im Falle eines Limesindex λ erkläre man für den Teilraum

$$\Omega = \bigcup_{\nu<\lambda} \Omega_\nu$$

die Funktion

$$M_\lambda(\varphi) = M_\varkappa(\varphi) , \quad \text{wenn } \varphi \in \Omega_\varkappa \text{ mit einem Index } \varkappa < \lambda .$$

Der Wert $M_\lambda(\varphi)$ ist eindeutig bestimmt, da im Falle

$$\varphi \in \Omega_\varkappa \cap \Omega_\mu \quad \text{mit Indizes } \varkappa < \lambda \text{ und } \mu < \lambda$$

die Gleichung

$$M_\varkappa(\varphi) = M_\mu(\varphi)$$

besteht. Gehören die Hyperfunktionen $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega_\lambda$ dem Teilraum $\Omega_\varkappa$ mit einem Index $\varkappa < \lambda$ an, so gilt das Gleiche für jede lineare Verbindung $\varphi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$. Aus der Gleichung

$$M_\varkappa(\varphi) = M_\varkappa(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 M_\varkappa(\varphi_1) + a_2 M_\varkappa(\varphi_2)$$

folgt

$$M_\lambda(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 M_\lambda(\varphi_1) + a_2 M_\lambda(\varphi_2).$$

In gleicher Weise erhalten wir für zwei Hyperfunktionen $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega_\lambda$, die dem Teilraum $\Omega_\varkappa$ mit einem Index $\varkappa < \lambda$ angehören und der Ordnungsbeziehung $\varphi_1 < \varphi_2$ genügen, die Ungleichung

$$M_\varkappa(\varphi_1) \leqq M_\varkappa(\varphi_2),$$

also auch

$$M_\lambda(\varphi_1) \leqq M_\lambda(\varphi_2).$$

Schließlich besteht für jede konstante Hyperfunktion $c \in \Omega_0 \subseteqq \Omega_\lambda$ die Gleichung

$$M_\lambda(c) = M_0(c) = c.$$

2. Ist λ nicht Limesindex, so ist im Teilraum $\Omega_{\lambda-1}$ ein additives Maß $M_{\lambda-1}(\varphi)$ mit den verlangten Eigenschaften bestimmt. Der Teilraum

$$\Omega_\lambda = \Omega_{\lambda-1}(\psi) \quad \text{mit} \quad \psi = \psi_\lambda \notin \Omega_{\lambda-1}$$

besteht aus sämtlichen Hyperfunktionen der Gestalt

$$\varphi = \varphi_0 + c\psi \quad \text{mit} \quad \varphi_0 \in \Omega_{\lambda-1}$$

(in eindeutig bestimmter Darstellung). Nach Lemma 4* exisitieren Hyperfunktionen $\gamma \in \Omega_{\lambda-1}$, die der Ordnungsbeziehung

$$\psi < \gamma$$

genügen. Demgemäß setzen wir

$$M_\lambda(\psi) = \inf_{\psi < \gamma \in \Omega_{\lambda-1}} M_{\lambda-1}(\gamma)$$

und weiter

$$M_\lambda(\varphi) = M_\lambda(\varphi_0 + c\psi) = M_{\lambda-1}(\varphi_0) + c M_\lambda(\psi).$$

Da die Darstellung $\varphi = \varphi_0 + c\psi$ der Hyperfunktion $\varphi \in \Omega_\lambda$ mit $\varphi_0 \in \Omega_{\lambda-1}$ eindeutig ist, wird durch diese Festsetzung eine eindeutige Funktion im Teilraum $\Omega_\lambda = \Omega_{\lambda-1}(\psi)$ erklärt.

Für jedes Paar von Hyperfunktionen

$$\varphi' = \varphi_0' + c'\psi; \quad \varphi'' = \varphi_0'' + c''\psi \quad \text{mit} \quad \varphi_0', \varphi_0'' \in \Omega_{\lambda-1}$$

aus dem Teilraum Ω_λ und ihre lineare Verbindung

$$\varphi = a_1\varphi' + a_2\varphi'' = a_1\varphi_0' + a_2\varphi_0'' + (a_1 c' + a_2 c'')\psi \quad \text{mit} \quad a_1\varphi_0' + a_2\varphi_0'' \in \Omega_{\lambda-1}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} M_\lambda(\varphi) &= M_{\lambda-1}(a_1\varphi_0' + a_2\varphi_0'') + (a_1 c' + a_2 c'')\, M_\lambda(\psi) \\ &= a_1\big(M_{\lambda-1}(\varphi_0') + c' M_\lambda(\psi)\big) + a_2\big(M_{\lambda-1}(\varphi_0'') + c'' M_\lambda(\psi)\big) \\ &= a_1 M_\lambda(\varphi') + a_2 M_\lambda(\varphi'')\,. \end{aligned}$$

Genügt die Hyperfunktion $\varphi = \varphi_0 + c\,\psi \in \Omega_\lambda$ mit $\varphi_0 \in \Omega_{\lambda-1}$ der Ordnungsbeziehung

$$0 < \varphi_0 + c\,\psi = \varphi\,,$$

so erhalten wir im Falle $c = 0$

$$M_\lambda(\varphi) = M_{\lambda-1}(\varphi_0) \geqq 0\,.$$

Im Falle $c > 0$ erhalten wir für jede Funktion $\gamma \in \Omega_{\lambda-1}$, die der Beziehung $\psi < \gamma$ genügt,

$$0 < \varphi_0 + c\,\psi < \varphi_0 + c\,\gamma\,,$$

also

$$0 \leqq M_{\lambda-1}(\varphi_0) + c\, M_{\lambda-1}(\gamma)$$

und infolgedessen

$$0 \leqq M_{\lambda-1}(\varphi_0) + c \inf_{\psi < \gamma} M_{\lambda-1}(\gamma) = M_{\lambda-1}(\varphi_0) + c\, M_\lambda(\psi) = M_\lambda(\varphi)\,.$$

Im Falle $c < 0$ erhalten wir

$$-c\,\psi < \varphi_0, \quad \text{d.h.} \quad \psi < -\frac{1}{c}\,\varphi_0\,,$$

also

$$M_\lambda(\psi) \leqq M_{\lambda-1}\Big(-\frac{1}{c}\,\varphi_0\Big)$$

und damit

$$0 \leqq M_{\lambda-1}(\varphi_0) + c\, M_\lambda(\psi) = M_\lambda(\varphi)\,.$$

Schließlich erhalten wir für jede Hyperfunktion $\varphi_0 \in \Omega_\varkappa$ mit einem Index $\varkappa < \hat{\lambda}$ oder $\varkappa \leqq \lambda - 1$ nach Induktionsannahme

$$M_\lambda(\varphi_0) = M_{\lambda-1}(\varphi_0) = M_\varkappa(\varphi_0)\,.$$

Auf Grund der Gleichung $\Omega_\sigma = \Phi(\mathfrak{H})$ stellt nun die Funktion

$$M(\varphi) = M_\sigma(\varphi) \quad \text{für jedes } \varphi \in \Phi(\mathfrak{H})$$

das gesuchte Maß des Hyperfunktionsraumes $\Phi(\mathfrak{H}) = \mathsf{B}(\mathfrak{H})/\mathsf{N}(\mathfrak{H})$ dar. Damit ist das Lemma 5, also auch der Satz 4* vollständig bewiesen.

3*.

Eine nähere Betrachtung der Beweisführung zum Satze 4* zur Feststellung, inwieweit sie von der Kommutativität der Halbgruppe $\mathfrak{H}$ tatsächlich abhängt, zeigt sogleich, daß Vertauschungen von Elementen aus $\mathfrak{H}$ nur im Verlauf der Beweise zu den Lemmata 1 und 3 vorgenommen werden mußten, während

der Beweis des wichtigsten Lemma 5 von der Halbgruppe $\mathfrak{H}$ überhaupt unabhängig ist, da in ihm der Hyperfunktionenraum $\Phi(\mathfrak{H})$ lediglich in seiner Eigenschaft als (teilweise geordneter) linearer Raum über dem Körper der reellen Zahlen auftritt.

In diesem Abschnitt will ich nun ergänzend zeigen, daß in der Tat die Voraussetzung der Kommutativität nicht völlig ausgenutzt wird und daher durch eine schwächere Voraussetzung ersetzt werden kann. Um die Dinge durchsichtiger darstellen zu können, nehme ich zunächst eine einfache, aber zweckmäßige Erweiterung der vorgegebenen (nicht notwendig abelschen) Halbgruppe $\mathfrak{H}$ vor.

Die Menge $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ aller (formalen) *linearen Mittel*

$$\mathfrak{a} = \sum_X a(X)\, X \qquad (\text{über } X \in \mathfrak{H})$$

in der Halbgruppe $\mathfrak{H}$, gebildet mit nichtnegativen rationalen Zahlen $a(X)$ der Summe

$$\sum_X a(X) = 1 \qquad (\text{über } X \in \mathfrak{H}),$$

unter denen jeweils nur endlich viele von Null verschieden sind, ist, wie man sich leicht überlegt, eine Halbgruppe, die *Mittelhalbgruppe* $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ *über der Halbgruppe* $\mathfrak{H}$, *unter* folgenden Festsetzungen:

1. *Es gelte*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \quad \text{d.h.} \quad \sum_X a(X)\, X = \sum_X b(X)\, X$$

dann und nur dann, wenn

$$a(X) = b(X) \quad \textit{für jedes } X \in \mathfrak{H}.$$

2. *Für jedes geordnete Paar von Elementen*

$$\mathfrak{a} = \sum_X a(X)\, X; \qquad \mathfrak{b} = \sum_Y b(Y)\, Y \qquad (\textit{über } X, Y \in \mathfrak{H})$$

der Menge $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ *sei*

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \sum_{X,Y} a(X)\, b(Y)\, XY = \sum_Z \Big(\sum_{XY=Z} a(X)\, b(Y) \Big) Z.$$

Jedes Element $\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ besitzt dann eine (im wesentlichen eindeutige) Darstellung

$$\mathfrak{a} = a_1 H_1 + a_2 H_2 + \cdots + a_m H_m$$

mit paarweise verschiedenen Elementen $H_1, H_2, \ldots, H_m \in \mathfrak{H}$ und positiven rationalen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ der Summe

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 1.$$

Da insbesondere die Elemente $1.\, H = H \in \mathfrak{H}$ selbst der Mittelhalbgruppe $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ angehören, ist $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ eine Erweiterung der Halbgruppe $\mathfrak{H}$.

Für jede beschränkte Funktion $f(X)$ des Funktionenraumes $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ über der Halbgruppe $\mathfrak{H}$ bestimmt nun jedes Element $\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ eine Mittelfunktion $f^{\mathfrak{a}}(X)$ durch die Festsetzung

$$f^{\mathfrak{a}}(X) = f(X\mathfrak{a}) = \sum_H a(H)\, f^H(X) = \sum_H a(H)\, f(XH).$$

Dabei besteht die Regel:

Für jedes geordnete Paar von Elementen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ *und jede Funktion* $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ *besteht die Gleichung*

$$f^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(X) = g^{\mathfrak{a}}(X) \quad \textit{mit} \quad g(X) = f^{\mathfrak{b}}(X).$$

Unter der hier vorgenommenen Vereinfachung der Bezeichnung ist, wie man sofort erkennt, nach der im Abschnitt 2 gegebenen Definition die Funktion $f(X) \in \mathsf{B}(\mathfrak{H})$ genau dann eine Nilfunktion, wenn sich zu jedem reellen Wert $\varepsilon > 0$ ein Element $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\varepsilon)$ der Mittelhalbgruppe $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ angeben läßt, derart daß für jedes $X \in \mathfrak{H}$ die Ungleichung

$$|f(X\mathfrak{a})| < \varepsilon$$

besteht. In diesem Falle gilt auch für jedes Element $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$

$$|f(X\mathfrak{x}\mathfrak{a})| < \varepsilon.$$

Denn aus der Ungleichung

$$|f(X\mathfrak{a})| < \varepsilon \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H}$$

folgt

$$|f(XH\mathfrak{a})| < \varepsilon \quad \text{für jedes Paar } X, H \in \mathfrak{H}$$

und damit für jedes Element

$$\mathfrak{x} = \sum_H x(H)\, H$$

der Mittelhalbgruppe $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} |f(X\mathfrak{x}\mathfrak{a})| &= \Big|\sum_{H,G} x(H)\, a(G)\, f(XHG)\Big| \leqq \sum_H x(H) \Big|\sum_G a(G)\, f(XHG)\Big| \\ &= \sum_H x(H)\, |f(XH\mathfrak{a})| < \varepsilon \sum_H x(H) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ist demnach $f(X)$ eine Nilfunktion aus $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$, also

$$|f(X\mathfrak{a})| < \varepsilon,$$

so gilt für jedes $\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ auch

$$|f(X\mathfrak{b}\mathfrak{a})| < \varepsilon.$$

Mithin ist auch die Transformierte

$$f(X\mathfrak{b}) = f^{\mathfrak{b}}(X) \quad \text{für jedes } \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$$

eine Nilfunktion.

Zum Beweise des Lemma 1 bleibt somit noch nachzuweisen:

Sind $f(X), g(X)$ *Nilfunktionen aus* $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$, *so ist jede lineare Verbindung* $h(X) = af(X) + bg(X)$ *eine Nilfunktion.*

Nach Voraussetzung existieren Elemente $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$, derart daß die Ungleichungen

$$|f(X\mathfrak{a})| < \varepsilon; \quad |g(X\mathfrak{b})| < \varepsilon \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H},$$

also auch für jedes Paar von Elementen $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ die Ungleichungen

$$|f(X\mathfrak{b}_0\mathfrak{a})| < \varepsilon; \quad |g(X\mathfrak{a}_0\mathfrak{b})| < \varepsilon \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H}$$

bestehen. Lassen sich die Elemente $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$ derart wählen, daß eine Gleichung

$$\mathfrak{b}_0\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$$

eintritt, so bestehen zugleich die Ungleichungen

$$|f(X\mathfrak{c})| < \varepsilon; \quad |g(X\mathfrak{c})| < \varepsilon \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H},$$

aus denen nun die Folgerung

$$|h(X\mathfrak{c})| = |af(X\mathfrak{c}) + bg(X\mathfrak{c})| < (|a| + |b|)\varepsilon \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{H}$$

gezogen werden kann.

Jede abelsche Halbgruppe $\mathfrak{H}$ besitzt eine abelsche Mittelhalbgruppe $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$; in diesem Falle kann die Gleichung

$$\mathfrak{b}_0\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0\mathfrak{b} \quad \text{durch} \quad \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}; \quad \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}$$

stets gelöst werden. Im nichtabelschen Falle muß die Lösbarkeit als Forderung gestellt werden:

(**F**) *Die Mittelhalbgruppe* $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ *der Halbgruppe* $\mathfrak{H}$ *besitze die Eigenschaft: Zu jedem Paar von Elementen* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ *existiert ein Paar von Elementen* $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$, *derart daß die Gleichung*

$$\mathfrak{b}_0\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0\mathfrak{b}$$

besteht.

Dann gilt, wie wir soeben zeigten:

Lemma 1*. *Die Halbgruppe* $\mathfrak{H}$ *genüge der Forderung* (**F**). *Dann ist die Menge* $\mathbf{N}(\mathfrak{H})$ *aller Nilfunktionen ein* $\mathfrak{H}$*-invarianter Teilraum des Funktionenraumes* $\mathbf{N}(\mathfrak{H})$.

Die Beweise der Lemmata 2 und 2* lassen sich ohne Änderung auf Halbgruppen übertragen, die der Forderung (**F**) genügen. Demgemäß bedeute die Kongruenz

$$f(X) \equiv g(X) \bmod \mathbf{N},$$

daß die Differenz $f(X) - g(X)$ der Funktionen $f(X), g(X) \in \mathbf{B}(\mathfrak{H})$ eine Nilfunktion ist. Dieser Kongruenzbegriff besitzt alle in den Lemmata 2 und 2* angegebenen Eigenschaften.

Eine Funktion $f(X) \in \mathbf{B}(\mathfrak{H})$ ist nach der Definition des Abschnittes 2 positiv mod $\mathbf{N}(\mathfrak{H})$:

$$f(X) > 0 \bmod \mathbf{N},$$

wenn eine reelle Zahl $C>0$ und ein Element $\mathfrak{a}\in\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ existiert, derart daß die Ungleichung

$$f(X\mathfrak{a})\geqq C>0 \quad \text{für jedes } X\in\mathfrak{H}$$

besteht. Daraus folgt für jedes Element

$$\mathfrak{x}=\sum_H x(H)\,H$$

der Mittelhalbgruppe $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ die Ungleichung

$$f(X\mathfrak{x}\mathfrak{a})=\sum_H x(H)\,f(XH\mathfrak{a})\geqq C\sum_H x(H)=C>0.$$

Mithin gilt (entsprechend dem Lemma 3):

Aus $f(X)>0 \bmod \mathsf{N}$ *folgt* $f(X\mathfrak{a})>0 \bmod \mathsf{N}$ *für jedes* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$.

Aus $f(X)>0 \bmod \mathsf{N}$ *folgt* $af(X)>0 \bmod \mathsf{N}$ *für jedes* $a>0$.

Zum Beweis des Lemma 3 bleibt somit noch nachzuweisen:

Aus $f(X)>0 \bmod \mathsf{N}$ *und* $g(X)>0 \bmod \mathsf{N}$ *folgt* $f(X)+g(X)>0 \bmod \mathsf{N}$.

Aus $f(X)>0 \bmod \mathsf{N}$ *und* $g(X)\equiv 0 \bmod \mathsf{N}$ *folgt* $f(X)+g(X)>0 \bmod \mathsf{N}$.

Beweis. Bestehen für $\bmod \mathsf{N}$ positive Funktionen $f(X), g(X)\in\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ mit geeigneten Elementen $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ die Ungleichungen

$$f(X\mathfrak{a})\geqq C>0;\quad g(X\mathfrak{b})\geqq D>0 \quad \text{für jedes } X\in\mathfrak{H},$$

so gilt für jedes Paar von Elementen $\mathfrak{a}_0,\mathfrak{b}_0\in\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ auch

$$f(X\mathfrak{b}_0\mathfrak{a})\geqq C>0;\quad g(X\mathfrak{a}_0\mathfrak{b})\geqq D>0,$$

also im Falle der Gleichung

$$\mathfrak{b}_0\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$$

die Ungleichung

$$f(X\mathfrak{c})+g(X\mathfrak{c})\geqq C+D>0.$$

Für eine $\bmod \mathsf{N}$ positive Funktion $f(X)\in\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ und eine Nilfunktion $g(X)\in\mathsf{N}(\mathfrak{H})$ läßt sich eine Konstante $C>0$ und ein Element $\mathfrak{a}\in\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$, dann aber auch ein Element $\mathfrak{b}\in\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ derart angeben, daß zugleich die Ungleichungen

$$f(X\mathfrak{a})\geqq C>0 \quad \text{und} \quad |g(X\mathfrak{b})|<\frac{C}{2} \quad \text{für jedes } X\in\mathfrak{H}$$

bestehen. Da dann für jedes Paar von Elementen $\mathfrak{a}_0,\mathfrak{b}_0\in\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ auch die Ungleichungen

$$f(X\mathfrak{b}_0\mathfrak{a})\geqq C>0 \quad \text{und} \quad |g(X\mathfrak{a}_0\mathfrak{b})|<\frac{C}{2} \quad \text{für jedes } X\in\mathfrak{H}$$

gelten, kann im Falle der Gleichung

$$\mathfrak{b}_0\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$$

wiederum die Folgerung

$$f(X\mathfrak{c})+g(X\mathfrak{c})\geqq C-\frac{C}{2}=\frac{C}{2}>0$$

gezogen werden.

Damit ist das Lemma 3 auch gültig für jede Halbgruppe $\mathfrak{H}$, die der Forderung (**F**) genügt. Die Beweise der weiteren Lemmata 3*, 4, 4* sowie 5 lassen sich nun ohne Änderung übernehmen. Der Satz 4* läßt sich daher in folgender Gestalt verallgemeinern:

Satz 4.** *Die Mittelhalbgruppe* $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ *über der Halbgruppe* $\mathfrak{H}$ *genüge der Forderung*:

(**F**) *Zu jedem Paar von Elementen* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ *existiert ein Paar von Elementen* $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$, *das der Gleichung*

$$\mathfrak{b}_0 \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \mathfrak{b}$$

genügt.

Dann besitzt der Funktionenraum $\mathsf{B}(\mathfrak{H})$ *über der Halbgruppe* $\mathfrak{H}$ *ein additives Maß.*

Es muß freilich noch angemerkt werden, daß die Ausbeute dieses Satzes nicht sehr ergiebig ist, da die Meßbarkeit derjenigen nichtabelschen Gruppen $\mathfrak{G}$, für deren Mittelhalbgruppe $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ ich bisher die Eigenschaft (**F**) nachweisen konnte, sich auf anderem Wege weit leichter beweisen läßt.

4.

Die Übertragungsmöglichkeiten der abstrakten Gruppeneigenschaft $\mathfrak{m}(\mathfrak{G})$, eine *meßbare Gruppe* zu sein, kennzeichnet der [8])

Satz 5. *Die abstrakte Gruppeneigenschaft* $\mathfrak{m}(\mathfrak{G})$ *ist eine Syloweigenschaft, d.h.*:

Jedes homomorphe Bild $\overline{\mathfrak{U}}$ *einer jeden Untergruppe* $\mathfrak{U}$ *einer meßbaren Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist meßbar.*

Ist $\mathfrak{N}$ *ein meßbarer Normalteiler einer Gruppe* $\mathfrak{G}$ *mit meßbarer Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, *so ist auch* $\mathfrak{G}$ *meßbar.*

Ist $\mathfrak{U}$ *eine meßbare Untergruppe,* $\mathfrak{N}$ *ein meßbarer Normalteiler in der Gruppe* $\mathfrak{G}$, *so ist das Kompositum* $\mathfrak{U}\mathfrak{N}$ *eine meßbare Untergruppe in* $\mathfrak{G}$.

Die Vereinigung $\mathfrak{V}$ *einer Kette* $\mathsf{K} = (\mathfrak{U})$ *meßbarer Untergruppen einer Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist meßbare Untergruppe in* $\mathfrak{G}$.

Beweis. 1. Ist $\mathfrak{N}$ Normalteiler einer meßbaren Gruppe $\mathfrak{G}$, so induziert jede beschränkte Funktion $\varphi(\mathfrak{N}X)$ aus dem Funktionenraum $\mathsf{B}(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$ der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ eine Funktion

$$f(X) = \varphi(\mathfrak{N}X) \quad \text{für jedes } X \in \mathfrak{G}$$

des Funktionenraumes $\mathsf{B}(\mathfrak{G})$. Der in $\mathsf{B}(\mathfrak{G})$ erklärte Mittelwert

$$M_{\mathfrak{G}}(f) = M_{\mathfrak{G}/\mathfrak{N}}(\varphi)$$

bestimmt auch, wie man leicht nachrechnet, einen Mittelwert im Funktionenraum $\mathsf{B}(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$.

[8]) Über Syloweigenschaften vgl. GT, Abschnitt 1.4.4.

2. Wird die meßbare Gruppe $\mathfrak{G}$ mit dem Maß $\mu(\mathfrak{R})$ nach der Untergruppe $\mathfrak{U}$ in rechtsseitige Restklassen zerlegt:

$$\mathfrak{G} = \sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{U} \qquad (\text{über } \iota \in \mathfrak{I}),$$

so läßt sich einem Komplex $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{U}$ der Komplex

$$\sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{G}$$

zuordnen. Man erkläre in $\mathfrak{U}$ die Funktion

$$\nu(\mathfrak{L}) = \mu\left(\sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L}\right).$$

Dann gilt

$$\nu(\mathfrak{U}) = \mu\left(\sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{U}\right) = \mu(\mathfrak{G}) = 1,$$

$$\nu(\mathfrak{L}) = \mu\left(\sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L}\right) \geqq 0,$$

ferner für Komplexe $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 \subseteq \mathfrak{U}$ mit leerem Durchschnitt $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2 = 0$ wegen

$$\sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L}_1 \cap \sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L}_2 = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L}_1 \cup \sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L}_2 = \sum_{\iota} A_\iota (\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2)$$

auch

$$\nu(\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2) = \nu(\mathfrak{L}_1) + \nu(\mathfrak{L}_2).$$

Schließlich erhalten wir für jedes Element $U \in \mathfrak{U}$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \nu(\mathfrak{L}U) = \mu\left(\sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L}U\right) &= \mu\left(\left(\sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L}\right) U\right) \\ &= \mu\left(\sum_{\iota} A_\iota \mathfrak{L}\right) = \nu(\mathfrak{L}). \end{aligned}$$

Mithin ist die Funktion $\nu(\mathfrak{L})$ ein Maß der Untergruppe $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{G}$.

3. Ist $\mathfrak{N}$ ein meßbarer Normalteiler mit dem Maß $\nu(\mathfrak{L})$ in einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so läßt sich jedem Komplex $\mathfrak{R}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ der reelle Wert

$$\mu_0(\mathfrak{R}) = \nu(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{N})$$

zuordnen. Dann gilt

$$\mu_0(\mathfrak{G}) = 1; \quad \mu_0(\mathfrak{R}) \geqq 0 \qquad \text{für jeden Komplex } \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{G}$$

und für jedes Paar von Komplexen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2 \subseteq \mathfrak{G}$ mit leerem Durchschnitt $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_2 = 0$

$$\mu_0(\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2) = \mu_0(\mathfrak{R}_1) + \mu_0(\mathfrak{R}_2).$$

Ferner besteht für Elemente $X \equiv Y \bmod \mathfrak{N}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ wegen

$$\mathfrak{R}X \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{R}Y \cdot Y^{-1}X \cap \mathfrak{N} = (\mathfrak{R}Y \cap \mathfrak{N})\, Y^{-1}X \quad \text{mit} \quad Y^{-1}X \equiv E \bmod \mathfrak{N}$$

die Gleichung

$$\mu_0(\mathfrak{R}X) = \nu(\mathfrak{R}X \cap \mathfrak{N}) = \nu\left((\mathfrak{R}Y \cap \mathfrak{N})\, Y^{-1}X\right) = \nu(\mathfrak{R}Y \cap \mathfrak{N}) = \mu_0(\mathfrak{R}Y).$$

Infolgedessen liefern die Werte

$$f_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{N}X) = \mu_0(\mathfrak{R}X) \qquad \text{für jedes } X \in \mathfrak{G}$$

zu jedem Komplex $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{G}$ eine beschränkte Funktion aus dem Funktionenraum $\mathsf{B}(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$ der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Im Falle der Meßbarkeit der Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist dann der Mittelwert

$$\mu(\mathfrak{R}) = M_{\mathfrak{G}/\mathfrak{N}}(f_{\mathfrak{R}}),$$

wie man leicht nachweist, ein Maß der Gruppe $\mathfrak{G}$.

4. Ist $\mathfrak{U}$ meßbare Untergruppe, $\mathfrak{N}$ meßbarer Normalteiler der Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist wegen der Isomorphie

$$\mathfrak{U}/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}\,\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$$

die Faktorgruppe $\mathfrak{U}\,\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ als homomorphes Bild von $\mathfrak{U}$ meßbar. Da auch $\mathfrak{N}$ meßbar ist, folgt nach dem soeben in 3. Bewiesenen die Meßbarkeit des Kompositums $\mathfrak{U}\,\mathfrak{N}$.

Die letzte Aussage des Satzes 5 läßt eine wichtige Verallgemeinerung zu, die vom Begriff des Rasters einer Gruppe $\mathfrak{G}$ Gebrauch macht. Als *Raster* $\mathsf{P} = (\mathfrak{V})$ *einer Gruppe* $\mathfrak{G}$ bezeichne ich jede Untergruppenmenge der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *Jedes Element* $G \in \mathfrak{G}$ *gehört einer Untergruppe* $\mathfrak{V} \in \mathsf{P}$ *an.*

2. *Gehören die Untergruppen* $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ *der Menge* P *an, so gilt das Gleiche für das Kompositum* $\{\mathfrak{V}_1 \cup \mathfrak{V}_2\}$.

Auf Grund dieser Eigenschaften ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ die Vereinigung $\bigcup \mathfrak{V}$ des Rasters $\mathsf{P} = (\mathfrak{V})$. Beispielsweise ist die Menge aller endlicherzeugbaren Untergruppen einer Gruppe stets ein Raster dieser Gruppe. Wir bemerken ferner:

Lemma 6. *Jedes Raster* $\mathsf{P} = (\mathfrak{V})$ *einer Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist (hinsichtlich der Untergruppenkomposition) eine abelsche Halbgruppe.*

Beweis. Als Kompositum zweier Untergruppen $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ des Rasters P in der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{V} = \{\mathfrak{V}_1 \cup \mathfrak{V}_2\}$ Untergruppe des Rasters P; dabei gilt

$$\{\mathfrak{V}_1 \cup \mathfrak{V}_2\} = \{\mathfrak{V}_2 \cup \mathfrak{V}_1\}$$

und für jedes Tripel von Untergruppen $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{V}_3$ des Rasters P das Assoziativgesetz

$$\{\{\mathfrak{V}_1 \cup \mathfrak{V}_2\} \cup \mathfrak{V}_3\} = \{\mathfrak{V}_1 \cup \{\mathfrak{V}_2 \cup \mathfrak{V}_3\}\} = \{\mathfrak{V}_1 \cup \mathfrak{V}_2 \cup \mathfrak{V}_3\}.$$

Es gilt der

Satz 5*. *Besitzt eine Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ein Raster* $\mathsf{P} = (\mathfrak{V})$ *aus meßbaren Untergruppen* $\mathfrak{V} < \mathfrak{G}$, *so ist auch* $\mathfrak{G}$ *meßbar.*

Bemerkung. Enthält eine Gruppe $\mathfrak{G}$ eine Kette $\mathsf{K} = (\mathfrak{U})$ meßbarer Untergruppen $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$, so besitzt die Vereinigung $\mathfrak{V} = \bigcup \mathfrak{U}$ der Kette K das Raster $\mathsf{K} = (\mathfrak{U})$. Mithin ist $\mathfrak{V}$ meßbar. Die letzte Aussage des Satzes 5 ist daher Sonderfall des Satzes 5*.

Beweis. Besitzt die Gruppe $\mathfrak{G}$ ein Raster $\mathsf{P}=(\mathfrak{P})$ aus meßbaren Untergruppen $\mathfrak{P}\subset\mathfrak{G}$, so besitzt jede Untergruppe $\mathfrak{P}\in\mathsf{P}$ ein Maß $\nu(\mathfrak{P};\mathfrak{L})$, das jedem Komplex $\mathfrak{L}\subseteq\mathfrak{P}$ ein reelles Maß $\nu(\mathfrak{P};\mathfrak{L})$ zuordnet. Man erkläre in der Gruppe $\mathfrak{G}$ für einen beliebigen Komplex $\mathfrak{K}\subseteq\mathfrak{G}$ und jede Untergruppe $\mathfrak{P}\in\mathsf{P}$ den Wert

$$\mu(\mathfrak{P};\mathfrak{K})=\nu(\mathfrak{P};\mathfrak{P}\cap\mathfrak{K}).$$

Dann gilt, wie man sogleich erkennt,

$$\mu(\mathfrak{P};\mathfrak{G})=1;\qquad 0\leqq\mu(\mathfrak{P};\mathfrak{K})\leqq 1\quad\text{für jeden Komplex }\mathfrak{K}\subseteq\mathfrak{G}$$

und für jedes Paar von Komplexen $\mathfrak{K}_1,\mathfrak{K}_2\subseteq\mathfrak{G}$ mit leerem Durchschnitt $\mathfrak{K}_1\cap\mathfrak{K}_2=0$

$$\mu(\mathfrak{P};\mathfrak{K}_1\cup\mathfrak{K}_2)=\mu(\mathfrak{P};\mathfrak{K}_1)+\mu(\mathfrak{P};\mathfrak{K}_2).$$

Ferner erhalten wir für jeden Komplex $\mathfrak{K}\subseteq\mathfrak{G}$ und jedes Element $G\in\mathfrak{G}$ die Gleichung

$$\mu(\mathfrak{P};\mathfrak{K}G)=\mu(\mathfrak{P};\mathfrak{K}),\quad\text{sobald } G\in\mathfrak{P}.$$

Für einen vorgegebenen Komplex $\mathfrak{K}\subseteq\mathfrak{G}$ stellt dann die Menge aller Werte $\mu(\mathfrak{P};\mathfrak{K})$ eine (beschränkte) Funktion über dem Raster $\mathsf{P}=(\mathfrak{P})$ dar, also eine Funktion aus dem Funktionenraum $\mathsf{B}(\mathsf{P})$ über der abelschen Halbgruppe P (im Sinne des Lemma 6).

Nach Satz 4* besitzt der Funktionenraum $\mathsf{B}(\mathsf{P})$ über der abelschen Halbgruppe P ein additives Maß $M(f)$, das jeder Funktion $f(\mathfrak{P})\in\mathsf{B}(\mathsf{P})$ einen reellen Mittelwert $M(f)$ zuordnet. Wir erklären demgemäß für die Komplexe $\mathfrak{K}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ die Funktion

$$\mu(\mathfrak{K})=M\big(\mu(\mathfrak{P};\mathfrak{K})\big).$$

Dann gilt wegen

$$\mu(\mathfrak{P};\mathfrak{G})=1\quad\text{und}\quad 0\leqq\mu(\mathfrak{P};\mathfrak{K})\leqq 1\quad\text{für jeden Komplex }\mathfrak{K}\subseteq\mathfrak{G}$$

zunächst

$$\mu(\mathfrak{G})=1\quad\text{und}\quad 0\leqq\mu(\mathfrak{K})\leqq 1\quad\text{für jeden Komplex }\mathfrak{K}\subseteq\mathfrak{G}$$

und wegen

$$\mu(\mathfrak{P};\mathfrak{K}_1\cup\mathfrak{K}_2)=\mu(\mathfrak{P};\mathfrak{K}_1)+\mu(\mathfrak{P};\mathfrak{K}_2)\qquad\text{im Falle }\mathfrak{K}_1\cap\mathfrak{K}_2=0$$

auch

$$\mu(\mathfrak{K}_1\cup\mathfrak{K}_2)=\mu(\mathfrak{K}_1)+\mu(\mathfrak{K}_2).$$

Nach Satz 4* besteht für jedes Paar von Untergruppen $\mathfrak{U},\mathfrak{P}\in\mathsf{P}$ und jeden Komplex $\mathfrak{K}\subseteq\mathfrak{G}$ die Gleichung

$$M\big(\mu(\{\mathfrak{U}\cup\mathfrak{P}\};\mathfrak{K})\big)=M\big(\mu(\mathfrak{P};\mathfrak{K})\big).$$

Bestimmt man zu einem beliebig vorgegebenen Element $G\in\mathfrak{G}$ eine G enthaltende Untergruppe $\mathfrak{U}\in\mathsf{P}$, so besteht für jedes $\mathfrak{P}\in\mathsf{P}$ und jeden Komplex $\mathfrak{K}\subseteq\mathfrak{G}$ die Gleichung

$$\mu\big(\{\mathfrak{U}\cup\mathfrak{P}\};\mathfrak{K}G\big)=\mu\big(\{\mathfrak{U}\cup\mathfrak{P}\};\mathfrak{K}\big)\qquad\text{wegen } G\in\{\mathfrak{U}\cup\mathfrak{P}\}.$$

Dann gilt aber auch

$$M\big(\mu\left(\{\mathfrak{U}\cup\mathfrak{B}\};\,\mathfrak{N}G\right)\big)=M\big(\mu\left(\{\mathfrak{U}\cup\mathfrak{B}\};\,\mathfrak{N}\right)\big),$$

andererseits

$$M\big(\mu\left(\{\mathfrak{U}\cup\mathfrak{B}\};\,\mathfrak{N}G\right)\big)=M\left(\mu\left(\mathfrak{B};\,\mathfrak{N}G\right)\right)=\mu\left(\mathfrak{N}G\right),$$

$$M\big(\mu\left(\{\mathfrak{U}\cup\mathfrak{B}\};\,\mathfrak{N}\right)\big)=M\left(\mu\left(\mathfrak{B};\,\mathfrak{N}\right)\right)=\mu\left(\mathfrak{N}\right)$$

und damit

$$\mu\left(\mathfrak{N}G\right)=\mu\left(\mathfrak{N}\right).$$

Mithin ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ meßbar.

Aus der Tatsache, daß die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{m}(\mathfrak{G})$ eine Syloweigenschaft ist, lassen sich leicht weitere Folgerungen ziehen[9]). Jede nichtmeßbare Gruppe $\mathfrak{G}$ enthält maximale meßbare Untergruppen, die wir als die $\mathfrak{m}$-*Sylowgruppen* der (nichtmeßbaren) Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichnen wollen. Da jede zyklische Untergruppe von $\mathfrak{G}$ (als abelsche Gruppe) meßbar ist, sind $\mathfrak{m}$-Sylowgruppen in nichtmeßbaren Gruppen von E verschieden.

Satz 6. *Jede nichtmeßbare Gruppe $\mathfrak{G}$ enthält unendlich viele verschiedene $\mathfrak{m}$-Sylowgruppen. Jede $\mathfrak{m}$-Sylowgruppe $\mathfrak{S}_m$ in $\mathfrak{G}$ ist ihr eigener Normalisator:*

$$\mathfrak{N}\left(\mathfrak{S}_m<\mathfrak{G}\right)=\mathfrak{S}_m.$$

Der Durchschnitt $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_m=\cap\,\mathfrak{S}_m$ aller $\mathfrak{m}$-Sylowgruppen der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist der maximale meßbare Normalteiler der Gruppe $\mathfrak{G}$. Die meßbaren Normalteiler $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$ bilden einen abgeschlossenen Verband; der maximale Normalteiler dieses Verbandes ist der Normalteiler $\mathfrak{M}_m<|\,\mathfrak{G}$.

Beweis. Eine $\mathfrak{m}$-Sylowgruppe $\mathfrak{S}$ der nichtmeßbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ ist Normalteiler des Normalisators $\mathfrak{N}(\mathfrak{S})=\mathfrak{N}(\mathfrak{S}<\mathfrak{G})$. Wäre $\mathfrak{N}(\mathfrak{S})$ von $\mathfrak{S}$ verschieden, so besäße die Faktorgruppe $\mathfrak{N}(\mathfrak{S})/\mathfrak{S}$ eine zyklische Untergruppe $\mathfrak{T}/\mathfrak{S}$. Dann wären $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}/\mathfrak{S}$, also auch $\mathfrak{T}$ meßbare Gruppen, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $\mathfrak{S}$ maximale meßbare Untergruppe in $\mathfrak{G}$ ist. Folglich besteht die Gleichheit $\mathfrak{N}(\mathfrak{S})=\mathfrak{S}$.

Zerlegen wir nun die (nichtmeßbare) Gruppe $\mathfrak{G}$ in Restklassen

$$\mathfrak{G}=\sum_{\iota}\mathfrak{S}\,X_\iota \qquad (\text{über } \iota\in\mathfrak{I})$$

nach der $\mathfrak{m}$-Sylowgruppe $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_m$, so ist jede der Gruppen

$$\mathfrak{S}_\iota=X_\iota^{-1}\,\mathfrak{S}\,X_\iota$$

eine $\mathfrak{m}$-Sylowgruppe in $\mathfrak{G}$. Aus einer Gleichung

$$\mathfrak{S}_\iota=\mathfrak{S}_\varkappa, \quad \text{d.h.} \quad X_\iota^{-1}\,\mathfrak{S}\,X_\iota=X_\varkappa^{-1}\,\mathfrak{S}\,X_\varkappa$$

folgt $X_\iota X_\varkappa^{-1}\,\mathfrak{S}=\mathfrak{S}\,X_\iota X_\varkappa^{-1}$, d.h. $X_\iota X_\varkappa^{-1}\in\mathfrak{N}(\mathfrak{S})=\mathfrak{S}$, also $\iota=\varkappa$.

Sämtliche $\mathfrak{m}$-Sylowgruppen $\mathfrak{S}_\iota=X_\iota^{-1}\,\mathfrak{S}\,X_\iota$ sind demnach verschieden.

[9]) Vgl. GT, Satz 1.4.28.

Wäre dabei $\mathfrak{S}$ von endlichem Index in $\mathfrak{G}$, so wäre nach dem Satze von H. POINCARÉ [10]) auch der Normalteiler

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_m = \bigcap_i \mathfrak{S}_i$$

von endlichem Index in $\mathfrak{G}$. Dann wären aber $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ (als endliche Gruppe), also auch $\mathfrak{G}$ selbst meßbar.

Die weiteren Aussagen des Satzes 6 sind allgemeingültig für beliebige Syloweigenschaften [11]).

5.

Nach den bisherigen Ergebnissen sind einerseits die endlichen Gruppen, andererseits die abelschen Gruppen meßbar. Mit Hilfe der Sätze 5 und 5* läßt sich nun auch die Meßbarkeit allgemeinerer Gruppentypen nachweisen.

Bezeichnen wir eine Gruppe $\mathfrak{G}$ als *klassenfinit*, wenn jede ihrer Ähnlichkeitsklassen aus endlich vielen Elementen besteht, so umfaßt der Typus der klassenfiniten Gruppe offensichtlich sowohl den Typus der endlichen, als auch den Typus der abelschen Gruppe. Es gilt der

Satz 7. *Jede klassenfinite Gruppe $\mathfrak{G}$ ist meßbar.*

Beweis. Da jedes Element G einer klassenfiniten Gruppe $\mathfrak{G}$ einem endlichen normalen Komplex $\mathfrak{K}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$, nämlich seiner Ähnlichkeitsklasse in $\mathfrak{G}$ angehört, bilden die von sämtlichen endlichen normalen Komplexen $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{G}$ erzeugten Normalteiler $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{K}\}$ ein Normalteilerraster $\mathsf{P} = (\mathfrak{N})$ in $\mathfrak{G}$. Nach Satz 5* ist folglich nur zu zeigen, daß diese endlicherzeugbaren Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ meßbar sind.

Es sei also $\mathfrak{K} = (K_1, K_2, \ldots, K_s)$ ein endlicher normaler Komplex aus der klassenfiniten Gruppe $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{K}\}$ sein Erzeugnis. Da jedes Element $K_\sigma \in \mathfrak{K}$ einer endlichen Ähnlichkeitsklasse von $\mathfrak{G}$ angehört, ist der Zentralisator $\mathfrak{Z}_\sigma = \mathfrak{Z}(K_\sigma)$ des Elementes K_σ in $\mathfrak{G}$ von endlichem Index

$$1 \leqq \operatorname{ind}(\mathfrak{G} : \mathfrak{Z}_\sigma) = k_\sigma \qquad \text{für } 1 \leqq \sigma \leqq s.$$

Nach dem bereits erwähnten Satze von H. POINCARÉ ist dann auch der Durchschnitt

$$\mathfrak{D} = \bigcap_{\sigma=1}^{s} \mathfrak{Z}_\sigma$$

Normalteiler in $\mathfrak{G}$ von endlichem Index

$$1 \leqq \operatorname{ind}(\mathfrak{G} : \mathfrak{D}) = k.$$

Mithin ist der Durchschnitt $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}$ Normalteiler in $\mathfrak{N}$ von endlichem Index

$$1 \leqq \operatorname{ind}(\mathfrak{N} : \mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}) \leqq \operatorname{ind}(\mathfrak{G} : \mathfrak{D}) = k.$$

---

[10]) Vgl. GT, Satz 1.2.15.
[11]) Vgl. GT, Satz 1.4.28.

Da der Normalteiler $\mathfrak{D}$ aus $\mathfrak{G}$ mit dem Komplex $\mathfrak{R}$, also mit dem Erzeugnis $\mathfrak{N}=\{\mathfrak{R}\}$ elementweise vertauschbar ist, ist der Durchschnitt $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{D}$ das Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ des Normalteilers $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$. Die Gruppe $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})=\mathfrak{N}\cap\mathfrak{D}$ ist als abelsche Gruppe, die Faktorgruppe $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}\cap\mathfrak{D}$ als endliche Gruppe meßbar. Nach Satz 5 ist dann auch $\mathfrak{N}$ meßbar.

Die weiteren Entwicklungen müssen sich auf allgemeinere Betrachtungen über abstrakte Gruppeneigenschaften stützen, die auch an sich vielleicht nicht ohne Interesse sind. Eine abstrakte Gruppeneigenschaft $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ kann als eine zweiwertige Funktion

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{G})=\begin{cases}1, \text{ d.h. } \mathfrak{G} \text{ ist eine } \mathfrak{e}\text{-Gruppe},\\ 0, \text{ d.h. } \mathfrak{G} \text{ ist keine } \mathfrak{e}\text{-Gruppe},\end{cases}$$

aufgefaßt werden, die isomorphen Gruppen $\mathfrak{G}\cong\mathfrak{G}^*$ den gleichen Wert $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})=\mathfrak{e}(\mathfrak{G}^*)$ zuordnet. Die (abstrakte) Gruppeneigenschaft $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ möge im folgenden als *vollvererbbar* bezeichnet werden, wenn sie der Forderung genügt:

Jedes homomorphe Bild $\overline{\mathfrak{U}}$ *einer jeden Untergruppe* $\mathfrak{U}$ *einer* $\mathfrak{e}$*-Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist gleichfalls eine* $\mathfrak{e}$*-Gruppe.*

Beispiele. 1. Die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{f}(\mathfrak{G})$, eine *endliche Gruppe* zu sein, ist vollvererbbar.

2. Die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{a}(\mathfrak{G})$, eine *abelsche Gruppe* zu sein, ist vollvererbbar.

3. Die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{k}(\mathfrak{G})$, eine *klassenfinite Gruppe* zu sein, ist vollvererbbar [12]).

4. Die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{m}(\mathfrak{G})$, eine *meßbare Gruppe* zu sein, ist vollvererbbar.

Zwischen Gruppeneigenschaften $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{e}'(\mathfrak{G})$ bestehe die *Ordnungsrelation*

$$\mathfrak{e}\leqq\mathfrak{e}',$$

wenn für jede Gruppe $\mathfrak{G}$ die Ungleichung

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{G})\leqq\mathfrak{e}'(\mathfrak{G})$$

besteht, d.h. wenn jede $\mathfrak{e}$-Gruppe $\mathfrak{G}$ auch eine $\mathfrak{e}'$-Gruppe ist. Für die Relation $\mathfrak{e}\leqq\mathfrak{e}'$ setzen wir $\mathfrak{e}<\mathfrak{e}'$, wenn wenigstens eine Gruppe $\mathfrak{G}$ existiert, die der Bedingung

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{G})=0;\qquad \mathfrak{e}'(\mathfrak{G})=1$$

genügt. Wenn gleichzeitig die Ordnungsrelationen

$$\mathfrak{e}\leqq\mathfrak{e}' \quad\text{und}\quad \mathfrak{e}'\leqq\mathfrak{e}$$

bestehen, sind die beiden Gruppeneigenschaften wegen der Gleichung

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{G})=\mathfrak{e}'(\mathfrak{G}) \qquad \text{für jede Gruppe } \mathfrak{G}$$

als *gleichwertig* zu bezeichnen. Offenbar gilt die Regel:

[12]) Vgl. GT, Abschnitt 1.4.5.

Aus $\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{e}'$ *und* $\mathfrak{e}' \leqq \mathfrak{e}''$ *folgt* $\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{e}''$.

Beispiel. Die Aussagen der Sätze 2, 4 und 7 lassen sich durch die Ordnungsrelationen

$$\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{k} \leqq \mathfrak{m} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{k} \leqq \mathfrak{m}$$

darstellen.

Aus einer beliebigen vollvererbbaren Gruppeneigenschaft $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ lassen sich nun durch die beiden nachfolgend erklärten Prinzipe weitere Gruppeneigenschaften ableiten:

Prinzip der Lokalisierung.

$\mathfrak{l}\mathfrak{e}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{1}$: *Jede endlicherzeugbare Untergruppe* $\mathfrak{U}$ *der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist eine* $\mathfrak{e}$*-Gruppe.* Oder: *Die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist eine lokale* $\mathfrak{e}$*-Gruppe.*

Prinzip der (transfiniten) Erweiterung.

$\mathfrak{n}\mathfrak{e}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{1}$: *Die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *besitzt eine Normalfolge* $(\mathfrak{U}_\nu)$, *deren Faktoren* $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ *sämtlich* $\mathfrak{e}$*-Gruppen sind.* Oder: *Die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist eine Meta-*$\mathfrak{e}$*-Gruppe.*

Als *Normalfolge der Gruppe* $\mathfrak{G}$ werde dabei eine (aufsteigend wohlgeordnete) Untergruppenkette $(\mathfrak{U}_\nu)$:

$$\mathfrak{U}_0 = E; \quad \mathfrak{U}_\nu \subset\!| \, \mathfrak{U}_{\nu+1}; \quad \mathfrak{U}_\sigma = \mathfrak{G} \qquad \text{für jeden Index } \nu < \sigma \in \Lambda,$$

$$\mathfrak{U}_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{U}_\nu \qquad \text{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \sigma,$$

in der Gruppe $\mathfrak{G}$, als ihre Faktoren die Faktorgruppen $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ aufeinanderfolgender Glieder der Kette bezeichnet [13]).

Beispiele. Es bedeutet demgemäß $\mathfrak{l}\mathfrak{f}(\mathfrak{G})$ die Gruppeneigenschaft, eine *lokalendliche Gruppe* zu sein, $\mathfrak{n}\mathfrak{f}(\mathfrak{G})$ die Gruppeneigenschaft, eine *metafinite Gruppe* [14]) zu sein, $\mathfrak{n}\mathfrak{a}(\mathfrak{G})$ die Gruppeneigenschaft, eine *metabelsche Gruppe* [15]) zu sein. Analog ist eine $\mathfrak{l}\mathfrak{k}$-Gruppe als eine *lokalklassenfinite Gruppe* zu bezeichnen.

Wir stellen fest:

Lemma 6. *Ist* $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ *eine vollvererbbare Gruppeneigenschaft, so sind auch die abgeleiteten Gruppeneigenschaften* $\mathfrak{l}\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ *und* $\mathfrak{n}\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ *vollvererbbar.*

Beweis. 1. Ist $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{l}\mathfrak{e}$-Gruppe, so ist jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{V}$ einer beliebigen Untergruppe $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ ist dann (als Untergruppe von $\mathfrak{G}$) eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Mithin ist auch $\mathfrak{H}$ eine $\mathfrak{l}\mathfrak{e}$-Gruppe.

In der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ nach einem beliebigen Normalteiler $\mathfrak{N} \subseteq\!| \, \mathfrak{G}$ ist jede endlicherzeugbare Untergruppe homomorphes Bild $\mathfrak{U}\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ einer endlicherzeugbaren Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$. Mit $\mathfrak{U}$ ist daher auch $\mathfrak{U}\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, also $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ eine $\mathfrak{l}\mathfrak{e}$-Gruppe.

[13]) Unter Λ ist hier und im folgenden eine wohlgeordnete Indexmenge hinreichend großer Mächtigkeit zu verstehen.

[14]) Vgl. W. Specht: Beiträge zur Gruppentheorie I, Lokalendliche Gruppen. Math. Nachr. **18**, 39–56 (1958).

[15]) Vgl. GT, Abschnitt 3.1.4.

Die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{l}\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ ist somit vollvererbbar.

2. Die $\mathfrak{n}\mathfrak{e}$-Gruppe $\mathfrak{G}$ besitze die Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$:

$$\mathfrak{U}_0 = E; \quad \mathfrak{U}_\nu \subset| \mathfrak{U}_{\nu+1}; \quad \mathfrak{U}_\sigma = \mathfrak{G} \qquad \text{für jeden Index } \nu < \sigma \in \Lambda,$$

$$\mathfrak{U}_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{U}_\nu \qquad \text{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \sigma,$$

mit $\mathfrak{e}$-Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$. Dann besitzt eine beliebige Untergruppe $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ die Normalfolge $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_\nu)$ (möglicherweise mit Wiederholungen):

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_0 = E; \quad \mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_\nu \leqq| \mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_{\nu+1}; \quad \mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_\sigma = \mathfrak{H} \qquad \text{für jeden Index } \nu < \sigma \in \Lambda,$$

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_\nu) \qquad \text{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \sigma,$$

deren Faktoren

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_\nu \cong (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_{\nu+1})\,\mathfrak{U}_\nu/\mathfrak{U}_\nu \leqq \mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$$

gleichfalls $\mathfrak{e}$-Gruppen sind.

Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ nach einem Normalteiler $\mathfrak{N} \leqq| \mathfrak{G}$ besitzt die Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu \mathfrak{N}/\mathfrak{N})$ (möglicherweise mit Wiederholungen):

$$\mathfrak{U}_0 \mathfrak{N}/\mathfrak{N} = 1; \quad \mathfrak{U}_\nu \mathfrak{N}/\mathfrak{N} \leqq| \mathfrak{U}_{\nu+1} \mathfrak{N}/\mathfrak{N}; \quad \mathfrak{U}_\sigma \mathfrak{N}/\mathfrak{N} = \mathfrak{G}/\mathfrak{N} \qquad \text{für jeden Index } \nu < \sigma \in \Lambda,$$

$$\mathfrak{U}_\lambda \mathfrak{N}/\mathfrak{N} = \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{U}_\nu \mathfrak{N}/\mathfrak{N} \qquad \text{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \sigma,$$

deren Faktoren

$$\frac{\mathfrak{U}_{\nu+1}\mathfrak{N}/\mathfrak{N}}{\mathfrak{U}_\nu \mathfrak{N}/\mathfrak{N}} \cong \frac{\mathfrak{U}_{\nu+1}\mathfrak{N}}{\mathfrak{U}_\nu \mathfrak{N}}$$

als homomorphe Bilder der Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ gleichfalls $\mathfrak{e}$-Gruppen sind.

Mithin ist auch die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{n}\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ vollvererbbar.

Lemma 7. *Für jede vollvererbbare Gruppeneigenschaft $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ bestehen die Ordnungsrelationen*

$$\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{e} \quad \textit{und} \quad \mathfrak{e} \leqq \mathfrak{n}\mathfrak{e},$$

sowie die Gleichungen

$$\mathfrak{l}(\mathfrak{l}\mathfrak{e}) = \mathfrak{l}\mathfrak{e} \quad \textit{und} \quad \mathfrak{n}(\mathfrak{n}\mathfrak{e}) = \mathfrak{n}\mathfrak{e}.$$

Genügen zwei Gruppeneigenschaften $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{e}'(\mathfrak{G})$ der Ordnungsrelation $\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{e}'$, so bestehen auch die Relationen

$$\mathfrak{l}\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{e}' \quad \textit{und} \quad \mathfrak{n}\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{n}\mathfrak{e}'.$$

Beweis. 1. In einer $\mathfrak{e}$-Gruppe $\mathfrak{G}$ ist jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{U}$ (nach Voraussetzung) eine $\mathfrak{e}$-Gruppe; mithin ist $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{l}\mathfrak{e}$-Gruppe:

$$\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{e}.$$

Jede $\mathfrak{e}$-Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt die triviale Normalfolge

$$E = \mathfrak{U}_0 \subset| \mathfrak{U}_1 = \mathfrak{G},$$

deren Faktor $\mathfrak{U}_1/\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist; mithin ist $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{n}\mathfrak{e}$-Gruppe:

$$\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{n}\mathfrak{e}.$$

2. Für jede vollvererbbare Gruppeneigenschaft $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ sind die abgeleiteten Gruppeneigenschaften $\mathfrak{l}\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{n}\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ gleichfalls vollvererbbar. Mithin bestehen die Relationen

$$\mathfrak{l}\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{l}(\mathfrak{l}\mathfrak{e}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{n}\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{n}(\mathfrak{n}\mathfrak{e}).$$

Jede endlicherzeugbare Gruppe $\mathfrak{U}$ einer $\mathfrak{l}(\mathfrak{l}\mathfrak{e})$-Gruppe $\mathfrak{G}$ ist eine $\mathfrak{l}\mathfrak{e}$-Gruppe, also eine $\mathfrak{e}$-Gruppe; mithin ist $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{l}\mathfrak{e}$-Gruppe:

$$\mathfrak{l}(\mathfrak{l}\mathfrak{e}) \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{e}.$$

Jede $\mathfrak{n}(\mathfrak{n}\mathfrak{e})$-Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt eine Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$:

$$\mathfrak{U}_0 = E; \quad \mathfrak{U}_\nu \subset| \mathfrak{U}_{\nu+1}; \quad \mathfrak{U}_\sigma = \mathfrak{G} \quad \text{für jeden Index } \nu < \sigma \in \Lambda,$$

$$\mathfrak{U}_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{U}_\nu \quad \text{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \sigma,$$

deren Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ $\mathfrak{n}\mathfrak{e}$-Gruppen sind, also ihrerseits Normalfolgen $(\mathfrak{B}_{\nu\mu}/\mathfrak{U}_\nu)$ besitzen:

$$\mathfrak{B}_{\nu 0}/\mathfrak{U}_\nu = 1; \quad \mathfrak{B}_{\nu\mu}/\mathfrak{U}_\nu \subset| \mathfrak{B}_{\nu\mu+1}/\mathfrak{U}_\nu; \quad \mathfrak{B}_{\nu\tau}/\mathfrak{U}_\nu = \mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$$
$$\text{für jeden Index } \mu < \tau = \tau_\nu \in \Lambda,$$

$$\mathfrak{B}_{\nu\lambda}/\mathfrak{U}_\nu = \bigcup_{\mu<\lambda} \mathfrak{B}_{\nu\mu}/\mathfrak{U}_\nu \quad \text{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \tau = \tau_\nu,$$

mit $\mathfrak{e}$-Faktoren

$$\frac{\mathfrak{B}_{\nu\mu+1}/\mathfrak{U}_\nu}{\mathfrak{B}_{\nu\mu}/\mathfrak{U}_\nu} \simeq \frac{\mathfrak{B}_{\nu\mu+1}}{\mathfrak{B}_{\nu\mu}}.$$

Die Verfeinerung $(\mathfrak{B}_{\nu\mu})$ der Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$ von $\mathfrak{G}$ ist also eine Normalfolge in $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{e}$-Faktoren. Mithin ist $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{n}\mathfrak{e}$-Gruppe:

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{n}\mathfrak{e}) \leqq \mathfrak{n}\mathfrak{e}.$$

3. Es bestehe die Relation $\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{e}'$. Jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{U}$ einer $\mathfrak{l}\mathfrak{e}$-Gruppe ist eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, also eine $\mathfrak{e}'$-Gruppe. Mithin ist $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{l}\mathfrak{e}'$-Gruppe:

$$\mathfrak{l}\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{e}'.$$

Eine $\mathfrak{n}\mathfrak{e}$-Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt eine Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$, deren Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ $\mathfrak{e}$-Gruppen, also auch $\mathfrak{e}'$-Gruppen sind. Mithin ist $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{n}\mathfrak{e}'$-Gruppe:

$$\mathfrak{n}\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{n}\mathfrak{e}'.$$

Beispiele. 1. Die Definition der *Syloweigenschaft* kann in folgender Weise formuliert werden [16]):

Eine Syloweigenschaft $\mathfrak{s}(\mathfrak{G})$ *ist eine vollvererbbare Gruppeneigenschaft, die den Gleichungen genügt*:

$$\mathfrak{l}\mathfrak{s} = \mathfrak{n}\mathfrak{s} = \mathfrak{s}.$$

2. Der Inhalt der Sätze 5 und 5* kann zu folgender Aussage zusammengefaßt werden:

[16]) Vgl. GT, Abschnitt 1.4.4.

Satz 5.** *Die Gruppeneigenschaft* $\mathfrak{m}(\mathfrak{G})$, *eine meßbare Gruppe zu sein, ist vollvererbbar und erfüllt die Gleichungen*

$$\mathfrak{l}\mathfrak{m} = \mathfrak{n}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}.$$

3. Bezeichnet $\mathfrak{f}(\mathfrak{G})$ die Gruppeneigenschaft, eine *endliche Gruppe* zu sein, so ist $\mathfrak{l}\mathfrak{f}(\mathfrak{G})$ die Gruppeneigenschaft, eine *lokalendliche Gruppe* zu sein. Da $\mathfrak{l}\mathfrak{f}(\mathfrak{G})$ eine Syloweigenschaft ist [17]), bestehen die Gleichungen

$$(*) \qquad \mathfrak{l}\mathfrak{l}\mathfrak{f} = \mathfrak{n}\mathfrak{l}\mathfrak{f} = \mathfrak{l}\mathfrak{f}.$$

Überdies gilt aber

$$(**) \qquad \mathfrak{n}\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{f} \quad \text{und} \quad \mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{f} = \mathfrak{l}\mathfrak{f}.$$

Wir wollen zeigen, daß die Beziehungen (**) aus den Gleichungen (*) formal abgeleitet werden können:

Da $\mathfrak{f}(\mathfrak{G})$ vollvererbbar ist, gilt $\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{f}$, also

$$\mathfrak{n}\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{n}\mathfrak{l}\mathfrak{f} = \mathfrak{l}\mathfrak{f}$$

und daher auch

$$\mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{l}\mathfrak{f} = \mathfrak{l}\mathfrak{f}.$$

Andererseits folgt aus der Relation $\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{n}\mathfrak{f}$ die Relation

$$\mathfrak{l}\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{f}$$

und die Gleichung

$$\mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{f} = \mathfrak{l}\mathfrak{f}.$$

Die Relation $\mathfrak{n}\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{f}$ ist die Formel für den bekannten Satz [18]):

Jede Gruppe $\mathfrak{G}$, *die eine Normalfolge* $(\mathfrak{U}_\nu)$ *mit endlichen Faktoren* $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ *besitzt, ist lokalendlich.*

Bekanntlich gilt genauer [19])

$$\mathfrak{n}\mathfrak{f} < \mathfrak{l}\mathfrak{f}.$$

4. Für die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{a}(\mathfrak{G})$, eine *abelsche Gruppe* zu sein, besteht die Gleichung $\mathfrak{l}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, da eine „lokalabelsche" Gruppe notwendig abelsch ist. Die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{n}\mathfrak{a}(\mathfrak{G})$ kennzeichnet den Typus der *metabelschen Gruppe*, die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{a}(\mathfrak{G})$ den Typus der *lokalmetabelschen Gruppe*. Bekanntlich besteht die genauere Ordnungsrelation

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{n}\mathfrak{a} < \mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{a}.$$

Die beiden Prinzipe der Lokalisierung und der (transfiniten) Erweiterung erlauben nun durch Iteration die Bildung aufsteigender Ketten von abstrakten Gruppeneigenschaften gemäß folgender transfiniter Induktion:

1. *Es sei* $\mathfrak{e}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{e}_0(\mathfrak{G})$ *eine vollvererbbare abstrakte Gruppeneigenschaft.*

---

[17]) Vgl. GT, Satz 1.4.40*.
[18]) Vgl. GT, Satz 1.4.42.
[19]) Vgl. a. a. O.[14]) Beispiel 1 im Anhang.

2. *Es sei σ eine beliebige Ordnungszahl und für jede Ordnungszahl $\nu<\sigma$ eine (vollvererbbare) abstrakte Gruppeneigenschaft $\mathfrak{e}_\nu(\mathfrak{G})$ erklärt.*

Ist σ keine Limeszahl, so sei

$$\mathfrak{e}_\sigma(\mathfrak{G}) = \mathfrak{l}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{e}_{\sigma-1}(\mathfrak{G}).$$

Ist σ Limeszahl, so sei

$$\mathfrak{e}_\sigma^*(\mathfrak{G}) = \max_{\nu<\sigma} \mathfrak{e}_\nu(\mathfrak{G}) \quad \textit{für jede Gruppe } \mathfrak{G}$$

und

$$\mathfrak{e}_\sigma(\mathfrak{G}) = \mathfrak{l}\,\mathfrak{e}_\sigma^*(\mathfrak{G}).$$

Auf Grund dieser Definition gilt also:

(1) *Ist σ keine Limeszahl, so bedeutet $\mathfrak{e}_\sigma(\mathfrak{G})=\mathfrak{1}$:*

Jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{U}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt eine Normalfolge $(\mathfrak{B}_\nu)$:

$$\mathfrak{B}_0 = E; \quad \mathfrak{B}_\nu \subset\!| \mathfrak{B}_{\nu+1}; \quad \mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{U} \quad \textit{für jeden Index } \nu<\tau=\tau(\mathfrak{U}),$$

$$\mathfrak{B}_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{B}_\nu \quad \textit{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \tau,$$

deren Faktoren $\mathfrak{B}_{\nu+1}/\mathfrak{B}_\nu$ $\mathfrak{e}_{\sigma-1}$-Gruppen sind.

(2) *Ist σ Limeszahl, so bedeutet $\mathfrak{e}_\sigma(\mathfrak{G})=\mathfrak{1}$:*

Jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{G}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist eine $\mathfrak{e}_\nu$-Gruppe mit einer Ordnungszahl $\nu=\nu(\mathfrak{U})<\sigma$.

Da offensichtlich für jede Ordnungszahl σ die Relation

$$\mathfrak{e}_\sigma \leqq \mathfrak{e}_{\sigma+1},$$

für jede Limeszahl σ und jede Ordnungszahl $\nu<\sigma$ die Relation

$$\mathfrak{e}_\nu \leqq \mathfrak{e}_\sigma^* \leqq \mathfrak{e}_\sigma$$

besteht, bezeichnen wir die Menge $(\mathfrak{e}_\nu(\mathfrak{G}))$ aller Eigenschaften $\mathfrak{e}_\nu$ mit einem Index $\nu \leqq \sigma$ als *die aus der Eigenschaft $\mathfrak{e}_0(\mathfrak{G})$ ableitbare Eigenschaftenfolge der Länge σ.*

Jede der Eigenschaften $\mathfrak{e}_\sigma(\mathfrak{G})$ ist eine vollvererbbare Gruppeneigenschaft. Da nämlich $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})=\mathfrak{e}_0(\mathfrak{G})$ nach Voraussetzung vollvererbbar ist, darf zur Durchführung einer transfiniten Induktion angenommen werden, sämtliche Eigenschaften $\mathfrak{e}_\nu(\mathfrak{G})$ mit einem Index $\nu<\sigma$ seien vollvererbbar. Ist dann σ keine Limeszahl, so ist $\mathfrak{e}_{\sigma-1}(\mathfrak{G})$ vollvererbbar; das Gleiche gilt für die Eigenschaften $\mathfrak{n}\mathfrak{e}_{\sigma-1}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{e}_{\sigma-1}(\mathfrak{G})=\mathfrak{e}_\sigma(\mathfrak{G})$. Ist aber σ eine Limeszahl, so ist die Gruppeneigenschaft

$$\mathfrak{e}_\sigma^*(\mathfrak{G}) = \max_{\nu<\sigma} \mathfrak{e}_\nu(\mathfrak{G})$$

vollvererbbar. Gilt nämlich für eine Gruppe

$$\mathfrak{e}_\sigma^*(\mathfrak{G}) = \mathfrak{e}_\mu(\mathfrak{G}) = \mathfrak{1} \quad \text{mit einem Index } \mu<\sigma,$$

so gilt für jede Untergruppe $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ und jede Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ nach einem Normalteiler $\mathfrak{N} \trianglelefteq \mathfrak{G}$

$$\mathfrak{e}_\mu(\mathfrak{H}) = \mathfrak{e}_\mu(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) = \mathfrak{1},$$

also auch

$$\mathfrak{e}_\sigma^*(\mathfrak{H}) = \mathfrak{e}_\sigma^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) = \mathfrak{1}.$$

Da demnach $\mathfrak{e}_\sigma^*(\mathfrak{G})$ vollvererbbar ist, gilt das Gleiche für die Eigenschaft $\mathfrak{e}_\sigma(\mathfrak{G}) = \mathfrak{l}\mathfrak{e}_\sigma^*(\mathfrak{G})$.

In der aus der Gruppeneigenschaft $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ ableitbaren Eigenschaftenfolge $(\mathfrak{e}_\nu(\mathfrak{G}))$ der Länge σ kann eine Gleichung

$$\mathfrak{e}_{\lambda+1} = \mathfrak{e}_\lambda \qquad \text{für einen Index } \lambda < \sigma$$

eintreten. Offenbar gilt dann auch

$$\mathfrak{e}_{\lambda+1} = \mathfrak{e}_\lambda = \mathfrak{e}_\mu = \mathfrak{e}_\sigma \qquad \text{für jeden Index } \lambda < \mu < \sigma.$$

Es besteht der

Satz 8. *In der aus einer vollvererbbaren Gruppeneigenschaft* $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ *ableitbaren Eigenschaftenfolge* $(\mathfrak{e}_\nu(\mathfrak{G}))$ *der Länge* σ *tritt eine Gleichung*

$$\mathfrak{e}_{\lambda+1} = \mathfrak{e}_\lambda \qquad \textit{für einen Index } \lambda < \sigma$$

genau dann ein, wenn $\mathfrak{e}_\lambda(\mathfrak{G})$ *eine Syloweigenschaft ist.*

Beweis. 1. Ist die (vollvererbbare) Gruppeneigenschaft $\mathfrak{e}_\lambda(\mathfrak{G})$ eine Syloweigenschaft, so bestehen die Gleichungen

$$\mathfrak{l}\,\mathfrak{e}_\lambda = \mathfrak{n}\,\mathfrak{e}_\lambda = \mathfrak{e}_\lambda.$$

Daher folgt

$$\mathfrak{e}_{\lambda+1} = \mathfrak{l}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{e}_\lambda = \mathfrak{l}\,\mathfrak{e}_\lambda = \mathfrak{e}_\lambda.$$

2. Besteht die Gleichung

$$\mathfrak{e}_{\lambda+1} = \mathfrak{l}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{e}_\lambda = \mathfrak{e}_\lambda,$$

so folgt aus der Ordnungsrelation

$$\mathfrak{e}_\lambda \leqq \mathfrak{n}\,\mathfrak{e}_\lambda \leqq \mathfrak{l}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{e}_\lambda = \mathfrak{e}_\lambda$$

die Gleichung $\mathfrak{e}_\lambda = \mathfrak{n}\,\mathfrak{e}_\lambda$ und weiter die Gleichung

$$\mathfrak{l}\,\mathfrak{e}_\lambda = \mathfrak{l}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{e}_\lambda = \mathfrak{e}_{\lambda+1} = \mathfrak{e}_\lambda.$$

Mithin ist $\mathfrak{e}_\lambda(\mathfrak{G})$ eine Syloweigenschaft.

Wir bemerken weiter:

Satz 9. *Es seien* $\mathfrak{d}(\mathfrak{G})$ *und* $\mathfrak{e}(\mathfrak{G})$ *vollvererbbare Gruppeneigenschaften und* $(\mathfrak{d}_\nu(\mathfrak{G}))$ *bzw.* $(\mathfrak{e}_\nu(\mathfrak{G}))$ *die aus ihnen ableitbaren Eigenschaftenfolgen. Besteht die Relation* $\mathfrak{d} \leqq \mathfrak{e}$, *so besteht auch die Relation* $\mathfrak{d}_\lambda \leqq \mathfrak{e}_\lambda$ *für jede Ordnungszahl* λ.

Beweis. Zur Durchführung einer transfiniten Induktion darf angenommen werden, es gelte außer der Relation $\mathfrak{d} \leqq \mathfrak{e}$ jede Relation $\mathfrak{d}_\nu \leqq \mathfrak{e}_\nu$ mit einer

Ordnungszahl $\nu < \lambda$. Ist λ nicht Limeszahl, so gilt $\mathfrak{d}_{\lambda-1} \leqq \mathfrak{e}_{\lambda-1}$. Hieraus folgt nach Lemma 7

$$\mathfrak{n}\,\mathfrak{d}_{\lambda-1} \leqq \mathfrak{n}\,\mathfrak{e}_{\lambda-1}$$

und

$$\mathfrak{d}_\lambda = \mathfrak{l}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{d}_{\lambda-1} \leqq \mathfrak{l}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{e}_{\lambda-1} = \mathfrak{e}_\lambda .$$

Ist λ Limeszahl, so genügt jede Gruppe $\mathfrak{G}$ nach Induktionsannahme der Ungleichung

$$\mathfrak{d}_\nu(\mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{e}_\nu(\mathfrak{G}) \qquad \text{für jeden Index } \nu < \lambda .$$

Hieraus folgt für jede Gruppe $\mathfrak{G}$ die Ungleichung

$$\mathfrak{d}_\lambda^*(\mathfrak{G}) = \max_{\nu<\lambda} \mathfrak{d}_\nu(\mathfrak{G}) \leqq \max_{\nu<\lambda} \mathfrak{e}_\nu(\mathfrak{G}) = \mathfrak{e}_\lambda^*(\mathfrak{G}),$$

also die Relation

$$\mathfrak{d}_\lambda^* \leqq \mathfrak{e}_\lambda^*$$

und weiter nach Lemma 7 die Relation

$$\mathfrak{d}_\lambda = \mathfrak{l}\,\mathfrak{d}_\lambda^* \leqq \mathfrak{l}\,\mathfrak{e}_\lambda^* = \mathfrak{e}_\lambda .$$

Beispiele. 1. Aus der Gruppeneigenschaft $\mathfrak{f}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{f}_0(\mathfrak{G})$, eine ***endliche Gruppe*** zu sein, gewinnen wir die Gruppeneigenschaft

$$\mathfrak{f}_1(\mathfrak{G}) = \mathfrak{l}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{f}_0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{l}\,\mathfrak{f}(\mathfrak{G}),$$

eine *lokalendliche Gruppe* zu sein. Da $\mathfrak{l}\,\mathfrak{f}(\mathfrak{G})$ eine Syloweigenschaft ist, besteht die Gleichung

$$\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{l}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{l}\,\mathfrak{f}_0 .$$

Die aus der Gruppeneigenschaft $\mathfrak{f}(\mathfrak{G})$ ableitbare Eigenschaftenfolge ist $(\mathfrak{f}_0, \mathfrak{f}_1)$, hat also die Länge 1.

2. Für jede *Syloweigenschaft* $\mathfrak{s}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{s}_0(\mathfrak{G})$ besteht nach Satz 8 die Gleichung

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0 = \mathfrak{s}_1 .$$

Infolgedessen besteht auch für die Gruppeneigenschaft $\mathfrak{m}(\mathfrak{G})$, eine *meßbare Gruppe* zu sein, die Gleichung

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}_1 .$$

3. Aus der Gruppeneigenschaft $\mathfrak{a}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{a}_0(\mathfrak{G})$, eine *abelsche Gruppe* zu sein, können wir zunächst die Gruppeneigenschaft

$$\mathfrak{a}_1(\mathfrak{G}) = \mathfrak{l}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{a}(\mathfrak{G})$$

ableiten, die den Typus der *lokalmetabelschen Gruppe* kennzeichnet. Ich weiß nicht, ob in der aus der Gruppeneigenschaft $\mathfrak{a}(\mathfrak{G})$ ableitbaren Eigenschaftenfolge $(\mathfrak{a}_\nu(\mathfrak{G}))$ für eine gewisse Ordnungszahl λ die Gleichung

$$\mathfrak{a}_{\lambda+1} = \mathfrak{a}_\lambda$$

eintritt, und vermute auch nichts. Zur näheren Beleuchtung dieser Frage will ich die folgenden beiden Aussagen beweisen:

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ heiße *ordnungsfinit*, wenn jedes Element $G \in \mathfrak{G}$ eine endliche Ordnung besitzt. Jede lokalendliche Gruppe ist ordnungsfinit; neuerdings weiß man, daß es ordnungsfinite Gruppen gibt, die nicht lokalendlich sind, wodurch eine langgehegte Vermutung der Gruppentheorie widerlegt ist.

Satz 10. *Für jede Ordnungszahl $\sigma \geqq 1$ ist jede ordnungsfinite $\mathfrak{a}_\sigma$-Gruppe $\mathfrak{G}$ eine lokalendliche $\mathfrak{a}_1$-Gruppe.*

Beweis. Offenbar genügt es, nachzuweisen, daß jede ordnungsfinite $\mathfrak{a}_2$-Gruppe $\mathfrak{G}$ eine lokalendliche $\mathfrak{a}_1$-Gruppe ist.

In einer ordnungsfiniten $\mathfrak{a}_2$-Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ eine Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$:

$$\mathfrak{U}_0 = E; \quad \mathfrak{U}_\nu \subset\!| \, \mathfrak{U}_{\nu+1}; \quad \mathfrak{U}_\tau = \mathfrak{H} \qquad \text{für jeden Index } \nu < \tau = \tau(\mathfrak{H}),$$
$$\mathfrak{U}_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{U}_\nu \qquad \text{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \tau,$$

deren Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ $\mathfrak{a}_1$-Gruppen, d.h. lokalmetabelsche Gruppen sind. Da $\mathfrak{H}$ endlicherzeugbar ist, ist der Index τ nicht Limesindex und folglich von der Gestalt $\tau = \lambda + n$, worin n eine natürliche Zahl und λ entweder eine Limeszahl oder 0 bedeutet. Der Faktor $\mathfrak{H}/\mathfrak{U}_{\tau-1}$ ist eine endlicherzeugbare ordnungsfinite $\mathfrak{a}_1$-Gruppe, also metabelsch. Da eine ordnungsfinite metabelsche Gruppe lokalendlich [20]) ist, ist $\mathfrak{H}/\mathfrak{U}_{\tau-1}$ eine endliche metabelsche Gruppe. Als Untergruppe von endlichem Index in $\mathfrak{H}$ ist demnach $\mathfrak{U}_{\tau-1}$ eine endlicherzeugbare ordnungsfinite Gruppe [21]). Durch eine vollständige Induktion ergibt sich, daß auch die Gruppe $\mathfrak{U}_\lambda$ endlicherzeugbar ist, weshalb nur $\lambda = 0$ gelten kann. Mithin ist $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe mit einer Normalfolge

$$E = \mathfrak{U}_0 \subset\!| \, \mathfrak{U}_1 \subset\!| \cdots \subset\!| \, \mathfrak{U}_{n-1} \subset\!| \, \mathfrak{U}_n = \mathfrak{H},$$

deren Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ metabelsch sind. Daher ist auch $\mathfrak{H}$ metabelsch.

In der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist demnach jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H}$ endlich und metabelsch. Folglich ist $\mathfrak{G}$ eine lokalendliche, lokalmetabelsche Gruppe, d.h. eine lokalendliche $\mathfrak{a}_1$-Gruppe.

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ ist nach R. BAER [22]) eine *noethersche Gruppe*, wenn sie der Maximalbedingung genügt, eine *lokalnoethersche Gruppe*, wenn jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ eine noethersche Gruppe ist, also der Maximalbedingung genügt. Bekanntlich ist eine Gruppe $\mathfrak{G}$ genau dann eine noethersche Gruppe, wenn jede Untergruppe $\mathfrak{H} \leqq \mathfrak{G}$ endlicherzeugbar ist.

Für diesen Gruppentypus besteht der

Satz 11*. *Für jede Ordnungszahl $\sigma \geqq 1$ ist jede lokalnoethersche $\mathfrak{a}_\sigma$-Gruppe $\mathfrak{G}$ eine (lokalnoethersche) $\mathfrak{a}_1$-Gruppe.*

---

[20]) Vgl. GT, Satz 3.1.19.

[21]) Vgl. GT, Satz 2.1.4.

[22]) Vgl. R. BAER: Noethersche Gruppen. Math. Z. **66**, 269–288 (1956). — Lokal Noethersche Gruppen. Math. Z. **66**, 341–363 (1956).

Dieser Satz ergibt sich aus der folgenden allgemeinen Aussage:

Satz 11. *Es sei* $\mathfrak{e}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{e}_0(\mathfrak{G})$ *eine beliebige vollvererbbare Gruppeneigenschaft und* $(\mathfrak{e}_\nu(\mathfrak{G}))$ *die aus ihr ableitbare Eigenschaftenfolge. Für jede Ordnungszahl* $\sigma \geqq 1$ *ist jede lokalnoethersche* $\mathfrak{e}_\sigma$*-Gruppe* $\mathfrak{G}$ *eine (lokalnoethersche)* $\mathfrak{e}_1$*-Gruppe.*

Beweis. Offenbar genügt es wiederum nachzuweisen, daß jede lokalnoethersche $\mathfrak{e}_2$-Gruppe $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{e}_1$-Gruppe ist.

Jede endlicherzeugbare (und damit noethersche) Untergruppe $\mathfrak{H}$ einer lokalnoetherschen $\mathfrak{e}_2$-Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt eine Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$, deren Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ $\mathfrak{e}_1$-Gruppen sind. Da $\mathfrak{H}$ der Maximalbedingung genügt, ist die Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$ endlich:

$$E = \mathfrak{U}_0 \subset | \, \mathfrak{U}_1 \subset | \cdots \subset | \, \mathfrak{U}_{n-1} \subset | \, \mathfrak{U}_n = \mathfrak{H}.$$

Hierbei ist jede Untergruppe $\mathfrak{U}_\nu$, also auch jeder Faktor $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ eine noethersche Gruppe, also endlicherzeugbar. Jede endlicherzeugbare noethersche $\mathfrak{e}_1$-Gruppe $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ besitzt eine (endliche) Normalfolge

$$\mathfrak{U}_\nu/\mathfrak{U}_\nu = \mathfrak{B}_{\nu 0}/\mathfrak{U}_\nu \subset | \, \mathfrak{B}_{\nu 1}/\mathfrak{U}_\nu \subset | \cdots \subset | \, \mathfrak{B}_{\nu, m-1}/\mathfrak{U}_\nu \subset | \, \mathfrak{B}_{\nu m}/\mathfrak{U}_\nu = \mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$$

mit $\mathfrak{e}$-Faktoren

$$\frac{\mathfrak{B}_{\nu,\mu+1}/\mathfrak{U}_\nu}{\mathfrak{B}_{\nu\mu}/\mathfrak{U}_\nu} \cong \frac{\mathfrak{B}_{\nu,\mu+1}}{\mathfrak{B}_{\nu\mu}}.$$

Die Verfeinerung $(\mathfrak{B}_{\nu\mu})$ der Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$ in $\mathfrak{H}$ ist also eine Normalfolge von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{e}$-Faktoren.

Jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ besitzt somit eine Normalfolge mit $\mathfrak{e}$-Faktoren; daher ist $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{e}_1$-Gruppe.

6.

Unter den im vorangehenden Abschnitt eingeführten Bezeichnungen drücken die Ordnungsrelationen

$$\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{k} \leqq \mathfrak{m}; \qquad \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{k} \leqq \mathfrak{m}$$

die folgenden Sachverhalte aus:

Jede endliche oder abelsche Gruppe ist klassenfinit.

Jede klassenfinite Gruppe ist meßbar.

Bezeichnen wir nun noch zur Abkürzung mit $\mathfrak{c}(\mathfrak{G})$ die Gruppeneigenschaft, *eine endliche oder eine abelsche Gruppe* zu sein, so bestehen auch die Relationen

$$\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{c} \leqq \mathfrak{k} \leqq \mathfrak{m} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{c} \leqq \mathfrak{k} \leqq \mathfrak{m}.$$

Da die Gruppeneigenschaften $\mathfrak{c}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{k}(\mathfrak{G})$ vollvererbbar sind, können aus ihnen die Eigenschaftsfolgen $(\mathfrak{c}_\nu(\mathfrak{G}))$ bzw. $(\mathfrak{k}_\nu(\mathfrak{G}))$ abgeleitet werden. Nach Satz 9 folgt aus der Relation

$$\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{k} \leqq \mathfrak{m}$$

die Relation

$$\mathfrak{c}_\lambda \leqq \mathfrak{k}_\lambda \leqq \mathfrak{m}_\lambda \quad \text{für jede Ordnungszahl } \lambda$$

und auf Grund der nach Satz 8 für jede Ordnungszahl λ gültigen Gleichung

$$\mathfrak{m}_\lambda = \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$$

Satz 12. *Es bezeichne* $\mathfrak{k}(\mathfrak{G})$ *die Gruppeneigenschaft, eine klassenfinite Gruppe zu sein, und* $(\mathfrak{k}_\nu(\mathfrak{G}))$ *die aus* $\mathfrak{k}(\mathfrak{G})$ *ableitbare Eigenschaftsfolge.*

Jede $\mathfrak{k}_\sigma$*-Gruppe* $\mathfrak{G}$ *(bei beliebiger Ordnungszahl* σ*) ist meßbar.*

Gleichwertig mit diesem Satze ist übrigens der

Satz 12*. *Es bezeichne* $\mathfrak{c}(\mathfrak{G})$ *die Gruppeneigenschaft, eine endliche oder eine abelsche Gruppe zu sein, und* $(\mathfrak{c}_\nu(\mathfrak{G}))$ *die aus* $\mathfrak{c}(\mathfrak{G})$ *ableitbare Eigenschaftenfolge.*

Jede $\mathfrak{c}_\sigma$*-Gruppe (bei beliebiger Ordnungszahl* σ*) ist meßbar.*

Die Gleichwertigkeit der Sätze 12 und 12* ergibt sich aus den zwischen den Eigenschaftsfolgen $(\mathfrak{c}_\nu(\mathfrak{G}))$ und $(\mathfrak{k}_\nu(\mathfrak{G}))$ bestehenden Relationen

$$\mathfrak{k}_n \leqq \mathfrak{c}_{n+1} \leqq \mathfrak{k}_{n+1} \qquad \text{für jeden natürlichen Index } 1 \leqq n < \omega,$$

$$\mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{c}_\lambda \qquad \text{für jede Ordnungszahl } \omega \leqq \lambda.$$

Beweis. Wir beginnen mit einer Untersuchung des durch die Eigenschaft $\mathfrak{l}\mathfrak{k}(\mathfrak{G})$ gekennzeichneten Typus der *lokalklassenfiniten Gruppe*. Jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H}$ einer lokalklassenfiniten Gruppe $\mathfrak{G}$ ist klassenfinit und besitzt, wie wir bereits beim Beweise des Satzes 7 feststellten, ein Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H})$ von endlichem Index [23]), also eine Normalfolge (möglicherweise mit Wiederholungen)

$$E \subseteqq | \mathfrak{Z}(\mathfrak{H}) \subseteqq | \mathfrak{H},$$

deren Faktoren endliche oder abelsche, also $\mathfrak{c}$-Gruppen sind. Da demnach jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{n}\mathfrak{c}$-Gruppe ist, ist $\mathfrak{G}$ selbst eine $\mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{c}$-Gruppe, d.h. eine $\mathfrak{c}_1$-Gruppe. Mithin besteht die Ordnungsrelation

$$\mathfrak{l}\mathfrak{k} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 \leqq \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{k}.$$

Hieraus erhält man weiter

$$\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{k} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{l}\mathfrak{k} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}_2 \leqq \mathfrak{k}_2$$

und durch vollständige Induktion

$$\mathfrak{k}_n \leqq \mathfrak{c}_{n+1} \leqq \mathfrak{k}_{n+1} \qquad \text{für jeden natürlichen Index } 1 \leqq n < \omega.$$

Da demnach für jede Gruppe $\mathfrak{G}$ die Ungleichungen

$$\mathfrak{k}_n(\mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{c}_{n+1}(\mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{k}_{n+1}(\mathfrak{G})$$

bestehen, erhält man

$$\mathfrak{k}^*_\omega(\mathfrak{G}) = \max \mathfrak{k}_n(\mathfrak{G}) \leqq \max \mathfrak{c}_{n+1}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{c}^*_\omega(\mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{k}^*_\omega(\mathfrak{G})$$

und

$$\mathfrak{k}_\omega = \mathfrak{l}\mathfrak{k}^*_\omega \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{c}^*_\omega = \mathfrak{c}_\omega \leqq \mathfrak{k}_\omega.$$

[23]) Vgl. auch B. H. NEUMANN: Groups with finite classes of conjugate elements. Proc. London Math. Soc. (3) **1**, 178–187 (1951).

Aus der Gleichung $\mathfrak{k}_\omega = \mathfrak{c}_\omega$ folgt nun auch die Gleichung

$$\mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{c}_\lambda \qquad \text{für jede Ordnungszahl } \omega \leqq \lambda.$$

Ich weiß nicht, ob bereits für einen natürlichen Index m die Gleichung

$$\mathfrak{k}_m = \mathfrak{c}_m \ .$$

eintritt; ebensowenig weiß ich, ob für eine Ordnungszahl λ die Gleichung

$$\mathfrak{k}_{\lambda+1} = \mathfrak{k}_\lambda \quad \text{oder} \quad \mathfrak{c}_{\lambda+1} = \mathfrak{c}_\lambda$$

eintritt.

Auf Grund der eingangs angegebenen Relation

$$\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{c} \leqq \mathfrak{k}$$

besteht auch die Relation

$$\mathfrak{l}\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1.$$

Die Klasse der $\mathfrak{c}_1$-Gruppen enthält also insbesondere die Klasse der lokalendlichen Gruppen. Umgekehrt aber ist jede ordnungsfinite $\mathfrak{c}_1$-Gruppe eine lokalendliche Gruppe. Denn es gilt allgemeiner der

Satz 13. *Jede ordnungsfinite $\mathfrak{c}_\sigma$-Gruppe $\mathfrak{G}$ (bei beliebiger Ordnungszahl σ) ist lokalendlich.*

Beweis. Es genügt wiederum, nachzuweisen, daß jede ordnungsfinite $\mathfrak{c}_2$-Gruppe $\mathfrak{G}$ lokalendlich ist.

Jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H}$ einer ordnungsfiniten $\mathfrak{c}_2$-Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt eine Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$:

$$\mathfrak{U}_0 = E; \quad \mathfrak{U}_\nu \subset| \mathfrak{U}_{\nu+1}; \quad \mathfrak{U}_\tau = \mathfrak{H} \qquad \text{für jeden Index } \nu < \tau = \tau(\mathfrak{H}),$$

$$\mathfrak{U}_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{U}_\nu \qquad \text{für jeden Limesindex } \lambda \leqq \tau,$$

deren Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ (ordnungsfinite) $\mathfrak{c}_1$-Gruppen sind. Da $\mathfrak{H}$ endlicherzeugbar ist, ist τ keine Limeszahl, also von der Gestalt $\tau = \lambda + n$, worin n eine natürliche Zahl und λ entweder eine Limeszahl oder 0 bedeutet.

Der Faktor $\mathfrak{H}/\mathfrak{U}_{\tau-1}$ ist demnach eine endlicherzeugbare ordnungsfinite $\mathfrak{c}_1$-Gruppe, besitzt also eine Normalfolge $(\mathfrak{V}_\mu/\mathfrak{U}_{\tau-1})$ mit endlichen oder (ordnungsfiniten) abelschen Faktoren. Dann kann die Normalfolge $(\mathfrak{V}_\mu/\mathfrak{U}_{\tau-1})$ aber derart verfeinert werden, daß in ihr nur endliche Faktoren auftreten. Mithin ist $\mathfrak{H}/\mathfrak{U}_{\tau-1}$ eine endlicherzeugbare ordnungsfinite metafinite Gruppe, also endlich [24]). Dann ist aber $\mathfrak{U}_{\tau-1}$ eine endlicherzeugbare ordnungsfinite Gruppe. Durch vollständige Induktion zieht man nun die Folgerung, daß auch $\mathfrak{U}_\lambda$ eine endlicherzeugbare Gruppe ist, was nur im Falle $\lambda = 0$ zutrifft.

Mithin ist $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe, die Gruppe $\mathfrak{G}$ selbst also eine lokalendliche Gruppe.

[24]) Vgl. GT, Satz 1.4.42.

Jede lokalendliche Gruppe ist, wie wir gesehen haben, meßbar. Ob es nichtlokalendliche ordnungsfinite Gruppen gibt, die gleichfalls meßbar sind, ist mir unbekannt.

Eine unmittelbare Folgerung des Satzes 11 ist auch der

Satz 13*. *Jede lokalnoethersche $\mathfrak{c}_\sigma$-Gruppe $\mathfrak{G}$ (bei beliebiger Ordnungszahl $\sigma \geqq 1$) ist eine (lokalnoethersche) $\mathfrak{c}_1$-Gruppe.*

Die Struktur der lokalnoetherschen $\mathfrak{c}_1$-Gruppe kennzeichnet

Satz 14. *Folgende beiden Aussagen sind gleichwertig:*

1. *Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist eine lokalnoethersche $\mathfrak{c}_1$-Gruppe.*

2. *Jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt eine endliche Normalfolge*

$$E = \mathfrak{U}_0 \subset | \, \mathfrak{U}_1 \subset | \cdots \subset | \, \mathfrak{U}_{n-1} \subset | \, \mathfrak{U}_n = \mathfrak{H} \qquad (n = n(\mathfrak{H})),$$

deren Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ entweder endliche Gruppen oder unendlichzyklische Gruppen sind.

Beweis. 1. Jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H}$ einer lokalnoetherschen $\mathfrak{c}_1$-Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt eine (endliche) Normalfolge

$$E = \mathfrak{U}_0 \subset | \, \mathfrak{U}_1 \subset | \cdots \subset | \, \mathfrak{U}_{n-1} \subset | \, \mathfrak{U}_n = \mathfrak{H},$$

deren Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ entweder endlich oder abelsch sind. Im abelschen Falle ist der Faktor $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ als noethersche Gruppe direktes Produkt einer endlichen abelschen und einer freien abelschen Gruppe endlichen Ranges [25]). Dann kann aber die Normalfolge $(\mathfrak{U}_\nu)$ derart verfeinert werden, daß nur endliche und unendlichzyklische Faktoren auftreten.

2. Besitzt jede endlicherzeugbare Untergruppe $\mathfrak{H}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ eine endliche Normalfolge

$$E = \mathfrak{U}_0 \subset | \, \mathfrak{U}_1 \subset | \cdots \subset | \, \mathfrak{U}_{n-1} \subset | \, \mathfrak{U}_n = \mathfrak{H}$$

mit endlichen oder unendlichzyklischen Faktoren $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$, so ist $\mathfrak{H}$ eine $\mathfrak{nc}$-Gruppe, also $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{Inc}$-Gruppe, d.h. eine $\mathfrak{c}_1$-Gruppe. Da jeder Faktor $\mathfrak{U}_{\nu+1}/\mathfrak{U}_\nu$ eine noethersche Gruppe ist, ist auch $\mathfrak{H}$ eine noethersche Gruppe [26]), die Gruppe $\mathfrak{G}$ also eine lokalnoethersche Gruppe.

7.

Nach dem Satz 3 von F. HAUSDORFF ist die Gruppe

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_{2,3} = \{A, B\} \quad \text{mit} \quad A^2 = B^3 = E$$

nicht meßbar. Da die Gruppe $\mathfrak{F}_{2,3}$ homomorphes Bild der freien Gruppe $\mathfrak{F}_2$ vom Range 2, diese wiederum Untergruppe jeder freien Gruppe $\mathfrak{F}_r$ beliebigen Ranges $r > 1$ ist, gilt der

[25]) Vgl. GT, Satz 2.4.17*.

[26]) Vgl. a.a.O.[22]) oder GT, Abschnitt 1.4.4, Beispiel 4*.

Satz 15. *Jede Gruppe* $\mathfrak{G}$, *die eine freie Gruppe* $\mathfrak{F}_r$, *vom Range* $r > 1$ *als Untergruppe enthält, ist nicht meßbar.*

Die Negation der diesem Satze zugrundeliegenden Voraussetzung führt auf die Definition:

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ *heiße verschränkt, wenn zwischen je zwei von* E *und voneinander verschiedenen Elementen* $G, H \in \mathfrak{G}$ *eine (nichttriviale) Relation*

$$R(G,H) = G^{a_1} H^{b_1} G^{a_2} H^{b_2} \dots G^{a_n} H^{b_n} = E$$

einer Länge $n \geqq 1$ *mit von Null verschiedenen Exponenten* $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ *besteht.*

Sinngemäß sind die beiden Gruppen der Ordnung 1 bzw. 2 als verschränkte Gruppen anzusehen.

Offenbar ist eine Gruppe $\mathfrak{G}$ genau dann nicht verschränkt, wenn sie eine freie Gruppe $\mathfrak{F}_2$ vom Range 2 als Untergruppe enthält. Bezeichnet im folgenden $\mathfrak{v}(\mathfrak{G})$ die abstrakte Gruppeneigenschaft, eine *verschränkte Gruppe* zu sein, so besteht nach Satz 15 die Ordnungsrelation $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{v}$, also der

Satz 15*. *Jede nicht verschränkte Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist nicht meßbar. Jede meßbare Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist verschränkt.*

Ich weiß nicht, ob jede verschränkte Gruppe meßbar ist. Einerseits konnte ich nur nachweisen, daß jede lokalendliche Gruppe meßbar ist, andererseits ist jede ordnungsfinite Gruppe offensichtlich verschränkt. Es gilt jedoch der

Satz 16. *Die Gruppeneigenschaft* $\mathfrak{v}(\mathfrak{G})$ *ist eine Syloweigenschaft*:

$$\mathfrak{l}\mathfrak{v} = \mathfrak{n}\mathfrak{v} = \mathfrak{v}.$$

Jedes homomorphe Bild $\overline{\mathfrak{U}}$ *einer jeden Untergruppe* $\mathfrak{U}$ *einer verschränkten Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist verschränkt.*

Ist $\mathfrak{N}$ *ein verschränkter Normalteiler der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *mit verschränkter Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, *so ist die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *verschränkt.*

Besitzt die Gruppe $\mathfrak{G}$ *ein Raster* $\mathsf{P} = (\mathfrak{P})$ *aus verschränkten Untergruppen* $\mathfrak{P} < \mathfrak{G}$, *so ist* $\mathfrak{G}$ *verschränkt.*

Beweis. 1. Zwei voneinander und von E verschiedene Elemente U, V einer Untergruppe $\mathfrak{U}$ einer verschränkten Gruppe $\mathfrak{G}$ erfüllen als Elemente von $\mathfrak{G}$ eine nichttriviale Relation

$$R(U,V) = U^{a_1} V^{b_1} U^{a_2} V^{b_2} \dots U^{a_n} V^{b_n} = E.$$

Mithin ist $\mathfrak{U}$ verschränkt.

2. Es sei $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler der verschränkten Gruppe $\mathfrak{G}$. Wäre die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ nicht verschränkt, so würden zwei von $\mathfrak{N}$ und voneinander verschiedene Restklassen $\mathfrak{N}X, \mathfrak{N}Y \in \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ existieren, die eine freie Gruppe $\{\mathfrak{N}X, \mathfrak{N}Y\} = \mathfrak{U}/\mathfrak{N}$ vom Range 2 erzeugen. Dann wäre aber $\mathfrak{F} = \{X, Y\}$ eine freie Untergruppe vom Range 2 in $\mathfrak{G}$, da eine nichttriviale Relation $R(X,Y) = E$ auf die gleichlautende Relation $R(\mathfrak{N}X, \mathfrak{N}Y) = \mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ führen würde.

3. Es sei $\mathfrak{N}$ ein verschränkter Normalteiler der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit verschränkter Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Es sei $\mathfrak{F}=\{X, Y\}$ eine freie Untergruppe in $\mathfrak{G}$ vom Range 2.

Der Durchschnitt $\mathfrak{D}=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$ ist eine freie Gruppe in $\mathfrak{N}$, also höchstens vom Range 1. Enthielte die Gruppe $\mathfrak{D}$ ein von E verschiedenes Element $Z=Z(X, Y)$, so enthielte sie auch sämtliche Transformierte $F^{-1}ZF$ mit $F\in\mathfrak{F}$. Im Falle

$$Z=X^a \quad \text{bzw.} \quad Z=Y^b$$

enthielte $\mathfrak{D}$ die freie Gruppe

$$\{X^a, Y^{-1}X^aY\} \quad \text{bzw.} \quad \{Y^b, X^{-1}Y^bX\}$$

vom Range 2. In jedem andern Fall darf für Z die Gestalt

$$Z=X^{a_1}Y^{b_1}X^{a_2}Y^{b_2}\dots X^{a_n}Y^{b_n}X^{a_{n+1}}$$

mit $a_1+a_{n+1}\neq 0$ und von Null verschiedenen Exponenten

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, a_{n+1}$$

vorausgesetzt werden. Dann enthielte $\mathfrak{D}$ aber die freie Gruppe $\{Z, Y^{-1}ZY\}$ vom Range 2.

Mithin gilt $\mathfrak{D}=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}=E$. Dann erhalten wir durch die Isomorphie

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{F}/\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}\cong\mathfrak{F}\mathfrak{N}/\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$$

eine freie Untergruppe vom Range 2 in der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, entgegen der Voraussetzung, daß auch $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ verschränkt ist.

4. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ besitze ein Raster $\mathsf{P}=(\mathfrak{V})$ aus verschränkten Untergruppen $\mathfrak{V}<\mathfrak{G}$. Jedes Paar voneinander und von E verschiedener Elemente $G, H\in\mathfrak{G}$ gehört einem Glied $\mathfrak{V}$ des Rasters P an; mithin besteht eine nichttriviale Relation $R(G, H)=E$. Daher ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ selbst verschränkt.

Mathematisches Institut der Universität Erlangen

(Eingegangen am 27. November 1959)

LINGENBERG, R.
Math. Zeitschr. 74, 367–386 (1960)

Einbettung projektiv-metrischer Teilstrukturen in projektiv-metrische Ebenen

Von
ROLF LINGENBERG

Das Problem der Begründung der ebenen metrischen Geometrie besteht aus zwei Teilproblemen: 1. aus der Frage nach der Einbettung der betrachteten metrischen Ebene in eine projektive Ebene (die Idealebene der metrischen Ebene) und 2. aus der Frage nach der Einbettung der durch das Senkrechtstehen in der metrischen Ebene gegebenen metrischen Struktur in eine projektiv-metrische Struktur der Idealebene.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich allgemein mit dem 2. Problem und untersucht die Frage, unter welchen Voraussetzungen sich eine projektiv-metrische Struktur in einem Teilbereich einer projektiven Ebene zu einer projektiv-metrischen Struktur der ganzen Ebene fortsetzen läßt. Der Begriff einer projektiv-metrischen Teilstruktur wird dabei in naheliegender Verallgemeinerung des Begriffes einer projektiv-metrischen Ebene (im Sinne von BACHMANN [1]) gefaßt. Der Einteilung der projektiv-metrischen Ebenen in ordinäre und singuläre projektiv-metrische Ebenen entspricht hier eine Einteilung in ordinäre und singuläre projektiv-metrische Teilstrukturen.

Das Ergebnis der Arbeit ist dann, daß sich eine projektiv-metrische Teilstruktur $\mathfrak{T}$ in einer projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ in eine projektiv-metrische Struktur von $\mathfrak{P}$ einbetten läßt, wenn 1. an jeder Geraden aus $\mathfrak{T}$ eine Spiegelung existiert und 2. der Satz von den drei Spiegelungen und dessen Umkehrung in $\mathfrak{T}$ gilt und wenn 3. eigentliche, also nur Geraden aus $\mathfrak{T}$ tragende Punkte in $\mathfrak{P}$ vorhanden sind und jede Gerade wenigstens mit drei eigentlichen Punkten inzidiert, wenn sie überhaupt mit einem eigentlichen Punkt inzidiert. In den Beweisen können wir zum Teil Schlüsse verwenden, wie sie schon in [4] für den zweiten Schritt der Begründung aller der metrischen Ebenen benutzt wurden, die durch das Axiomensystem von BACHMANN in [1] gegeben werden. Das hier gewonnene Ergebnis ist jedoch allgemeiner als in [4]; es leistet — wie im letzten Teil der Arbeit ausgeführt wird — den zweiten Schritt der Begründung für alle in eine Idealebene einbettbaren metrischen Ebenen von Charakteristik $\neq 2$, welche durch das allgemeinere Axiomensystem in [5] gegeben werden, und insbesondere damit auch aller der metrischen Ebenen von Charakteristik $\neq 2$, welche dem Axiomensystem von SPERNER in [7] genügen.

Zu Beginn der Arbeit wollen wir die im Hauptteil benutzten Begriffe und Sätze aus der projektiven Geometrie zusammenstellen, um dem Leser lästiges Nachschlagen zu ersparen.

§ 0. Hilfsmittel aus der projektiven Geometrie

Eine Menge von Punkten und Geraden, für die die projektiven Inzidenzaxiome gelten, nennen wir eine *projektive Inzidenzebene* $\mathfrak{P}$ [1]. Die Punkte von $\mathfrak{P}$ bezeichnen wir mit großen lateinischen Buchstaben und die Geraden von $\mathfrak{P}$ mit kleinen lateinischen Buchstaben. Die Inzidenz von Punkt und Gerade werde durch das Symbol I bezeichnet. Die Verbindungsgerade zweier verschiedener Punkte P, Q sei mit (P,Q) und der Schnittpunkt zweier verschiedener Geraden g, h mit (g, h) bezeichnet. Drei Punkte heißen *kollinear*, wenn sie mit derselben Geraden inzidieren und drei Geraden heißen *kopunktal*, wenn sie mit demselben Punkt inzidieren. Die Gesamtheit der Punkte auf einer Geraden nennen wir eine *Punktreihe* und die Gesamtheit der Geraden durch einen Punkt ein *Geradenbüschel*. Punktreihen und Geradenbüschel nennt man *eindimensionale projektive Grundgebilde*.

Eine projektive Inzidenzebene, in der der Satz von PAPPUS-PASCAL gilt, heißt eine *Pappussche Ebene*, und eine Pappussche Ebene, in der zusätzlich das Fano-Axiom gilt, heißt eine *projektive Ebene* [1].

Eine eineindeutige Zuordnung zwischen einer Punktreihe und einem Geradenbüschel wird eine *Perspektivität* genannt, wenn zugeordnete Punkte und Geraden inzidieren. Jede eineindeutige Abbildung eines eindimensionalen projektiven Grundgebildes auf ein eindimensionales projektives Grundgebilde, welche durch eine (endliche) Kette von Perspektivitäten bewirkt werden kann, wird eine *projektive Abbildung* genannt. In einer projektiven Ebene gilt der *Fundamentalsatz der projektiven Geometrie*: Auf einer Geraden gibt es nur eine projektive Abbildung, welche drei gegebene verschiedene Punkte in drei gegebene verschiedene Punkte überführt.

Eine eineindeutige Abbildung der Menge der Punkte und der Menge der Geraden einer projektiven Inzidenzebene je auf sich, bei der die Inzidenz erhalten bleibt, heißt eine *Kollineation*. Eine Kollineation heißt *projektiv*, wenn sie jedes eindimensionale projektive Grundgebilde projektiv abbildet.

Spezielle Beispiele projektiver Kollineationen sind die *perspektiven Kollineationen*, welche einen Punkt Z, das *Zentrum*, geradenweise und eine Gerade a, die *Achse*, punktweise festlassen. Für eine perspektive Kollineation α mit Z als Zentrum und a als Achse gilt:

(1) *P, $P\alpha$, Z sind kollinear für alle Punkte P von $\mathfrak{P}$.*

(2) *g, $g\alpha$, a sind kopunktal für alle Geraden g von $\mathfrak{P}$.*

Ist $Z \mathrel{I} a$, so heißt α eine *Elation*, und ist $Z \mathrel{\not I} a$, so heißt α eine *Homologie*. Besondere Bedeutung haben für uns die involutorischen Homologien. Für sie gilt in einer projektiven Ebene:

I. *Es gibt genau eine involutorische Homologie σ mit einer gegebenen Geraden a als Achse und einem gegebenen Punkt Z als Zentrum.*

II. *Ist R ein Punkt $\neq Z$ mit $P \mathrel{\not I} a$, so liegen die Punkte P, $P\sigma$ auf der Geraden $g = (P, Z)$ harmonisch in bezug auf die Punkte Z und (g, a)* (vgl. Fig. 2).

[1] In vielen Arbeiten wird eine projektive Inzidenzebene schon als projektive Ebene bezeichnet. Wir folgen hier jedoch der Bezeichnungsweise von BACHMANN [1].

III. *Das Produkt zweier involutorischer Homologien ist dann und nur dann involutorisch, wenn jeweils das Zentrum der einen auf der Achse der anderen liegt. Ist das Produkt zweier involutorischer Homologien σ, σ' mit Z, Z' als Zentren und a, a' als Achsen involutorisch, so ist $\sigma\sigma'$ eine involutorische Homologie mit (Z, Z') als Achse und (a, a') als Zentrum.*

Wir bemerken, daß III bereits in einer projektiven Inzidenzebene richtig ist (vgl. [4]).

Eine eineindeutige Abbildung der Menge der Punkte auf die Menge der Geraden und der Menge der Geraden auf die Menge der Punkte in einer projektiven Inzidenzebene, bei der die Inzidenz erhalten bleibt, heißt eine *Korrelation*. Eine Korrelation heißt *projektiv*, wenn sie jedes eindimensionale projektive Grundgebilde projektiv abbildet. Es gilt:

IV. *Eine Korrelation, welche wenigstens eine Punktreihe projektiv abbildet, ist projektiv.*

Eine involutorische Korrelation wird eine *Polarität* genannt. Ist eine Polarität π gegeben, so wird die Bildgerade $A\pi = a$ eines Punktes A die *Polare* von A, und der Bildpunkt $a\pi = A$ einer Geraden a der *Pol* von a genannt.

Eine projektive Ebene, in der eine feste Polarität gegeben ist, nennen wir eine *ordinäre projektiv-metrische Ebene*. Die gegebene Polarität wird auch die *absolute Polarität* der projektiv-metrischen Ebene genannt. Zwei Geraden heißen zueinander *senkrecht*, wenn die eine Gerade durch den Pol der anderen geht. Die involutorischen Homologien mit nicht inzidierenden Paaren Pol-Polare als Zentrum und Achse nennen wir die *erzeugenden Spiegelungen*, und die projektiven Kollineationen, welche durch Hintereinanderausführen solcher Spiegelungen entstehen, die *Bewegungen* der ordinären projektiv-metrischen Ebene. Diese bilden eine Gruppe, die *Bewegungsgruppe* der ordinären projektiv-metrischen Ebene.

Unter einer *singulären projektiv-metrischen Ebene* verstehen wir eine projektive Ebene, in welcher eine Gerade als sogenannte *unendlichferne Gerade* g_∞ und auf ihr eine projektive fixpunktfreie Involution ausgezeichnet ist. Diese wird als *absolute Polarinvolution* bezeichnet. Je zwei einander in der absoluten Polarinvolution entsprechende Punkte der Geraden g_∞ werden zueinander *polar* genannt. Zwei von g_∞ verschiedene Geraden werden zueinander *senkrecht* genannt, wenn sie die Gerade g_∞ in zueinander polaren Punkten schneiden; die Gerade g_∞ soll zu allen Geraden, auch zu sich selbst, senkrecht genannt werden. Jeder Punkt der Geraden g_∞ wird als *Pol* aller Geraden bezeichnet, die durch den zu ihm polaren Punkt hindurchgehen. Jede von g_∞ verschiedene Gerade hat damit eindeutig einen *Pol*.

Die involutorischen Homologien mit den von g_∞ verschiedenen Geraden als Achsen und ihren Polen als Zentren nennen wir die *erzeugenden Spiegelungen*, und die projektiven Kollineationen, welche durch Hintereinanderausführen solcher Spiegelungen entstehen, die *Bewegungen* der singulären projektiv-metrischen Ebene. Diese bilden eine Gruppe, die *Bewegungsgruppe* der singulären projektiv-metrischen Ebene.

A. Ordinäre projektiv-metrische Teilstrukturen

§ 1. Die grundlegenden Definitionen

Sei $\mathfrak{m}$ eine Menge von Geraden und $\mathfrak{M}$ eine Menge von Punkten einer projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ und φ eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft

(*) *Aus* $P\,\mathrm{I}\,g$ *folgt* $P\varphi^{-1}\,\mathrm{I}\,g\varphi$ *für* $P\in\mathfrak{M}$, $g\in\mathfrak{m}$.

Wir nennen dann das Paar (φ, φ^{-1}) von eineindeutigen Abbildungen von $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{M}$ und von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{m}$ eine *ordinäre Pol-Polarenbeziehung* π zwischen den Elementen von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{M}$. Es ist dann $g\pi = g\varphi$ für g aus $\mathfrak{m}$ und $P\pi = P\varphi^{-1}$ für P aus $\mathfrak{M}$. Offenbar gilt für π:

1. *Aus* $P\,\mathrm{I}\,g$ *folgt* $P\pi\,\mathrm{I}\,g\pi$ *für* $P\in\mathfrak{M}$, $g\in\mathfrak{m}$.
2. *Es ist* $\pi^2=1$.

Hierbei bezeichnet 1 die Abbildung, welche alle Elemente von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{M}$ auf sich abbildet. Wir nennen $g\pi$ den *Pol* der Geraden g und $P\pi$ die *Polare* des Punktes P.

Ist $\mathfrak{m}$ die Menge aller Geraden und $\mathfrak{M}$ die Menge aller Punkte von P, so ist π eine Polarität.

Ein Paar $\mathfrak{T}=(\mathfrak{m}, \mathfrak{M})$ aus einer Menge $\mathfrak{m}$ von Geraden und einer Menge $\mathfrak{M}$ von Punkten der Ebene $\mathfrak{P}$ nennen wir eine *ordinäre projektiv-metrische Teilstruktur*, wenn zwischen den Elementen von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{M}$ eine ordinäre Pol-Polarenbeziehung definiert ist.

Zwei Geraden g, h aus $\mathfrak{m}$ heißen zueinander *senkrecht*, in Symbolen $g\perp h$, wenn g mit dem Pol von h [und damit nach (*) auch h mit dem Pol von g] inzidiert. Das Senkrechtstehen ist symmetrisch. Entsprechend nennen wir zwei Punkte P, Q aus $\mathfrak{M}$ zueinander *polar*, wenn P mit der Polaren von Q [und damit nach (*) auch Q mit der Polaren von P] inzidiert.

Eine eineindeutige, involutorische Abbildung σ der Menge der Geraden einer ordinären projektiv-metrischen Teilstruktur $\mathfrak{T}$ auf sich, bei welcher kopunktale Geraden in kopunktale Geraden und zueinander senkrechte Geraden in zueinander senkrechte Geraden übergeführt werden, heißt eine *Spiegelung* an der Geraden g aus $\mathfrak{T}$, wenn gilt

(**) $a, a\sigma, g$ *sind kopunktal für alle Geraden* a *aus* $\mathfrak{T}$.

Eine Spiegelung an der Geraden g bezeichnen wir mit σ_g.

Jede Abbildung, welche durch Hintereinanderausführen von Spiegelungen entsteht, nennen wir eine *Bewegung* von $\mathfrak{T}$. Die Bewegungen von $\mathfrak{T}$ bilden eine Gruppe $\mathfrak{B}$, die *Bewegungsgruppe* von $\mathfrak{T}$.

Wir betrachten nun im folgenden ordinäre projektiv-metrische Teilstrukturen $\mathfrak{T}$, für welche folgende Bedingungen erfüllt sind:

T 1. *Zu jeder Geraden* g *aus* $\mathfrak{T}$ *gibt es wenigstens eine Spiegelung an* g.

T 2. *Die Aufeinanderfolge von Spiegelungen an drei Geraden* a, b, c *aus* $\mathfrak{T}$ *ist genau dann eine Spiegelung an einer Geraden aus* $\mathfrak{T}$, *wenn* a, b, c *kopunktal sind.*

T 3. *Es gibt mindestens einen eigentlichen Punkt für* $\mathfrak{T}$, *und jede Gerade aus* $\mathfrak{T}$, *die wenigstens mit einem eigentlichen Punkt inzidiert, inzidiert mindestens mit drei verschiedenen eigentlichen Punkten.*

Dabei nennen wir einen Punkt von $\mathfrak{P}$ *eigentlich*, wenn alle mit ihm inzidierenden Geraden der Teilstruktur $\mathfrak{T}$ angehören. Für die weitere Entwicklung merken wir hier gleich ein sich unmittelbar aus T 3 ergebendes Lemma an:

LEMMA 1. *Jeder Punkt der Ebene* $\mathfrak{P}$ *inzidiert mindestens mit drei verschiedenen Geraden einer ordinären projektiv-metrischen Teilstruktur* $\mathfrak{T}$, *wenn für* $\mathfrak{T}$ *die Forderung* T 3 *erfüllt ist.*

Wir wollen nun zeigen, daß sich eine ordinäre projektiv-metrische Teilstruktur $\mathfrak{T}$, für welche die Forderungen T 1–T 3 erfüllt sind, in eine ordinäre projektiv-metrische Struktur der Ebene $\mathfrak{P}$ einbetten läßt. Wir beginnen damit, die Bewegungen von $\mathfrak{T}$ zu Kollineationen von $\mathfrak{P}$ fortzusetzen.

§ 2. *Fortsetzung von Bewegungen zu Kollineationen*

Im folgenden sei $\mathfrak{T}$ eine ordinäre projektiv-metrische Teilstruktur, die den Bedingungen T 1–T 3 genügt.

Sei α eine Bewegung von $\mathfrak{T}$. Die Abbildung $\bar{\alpha}$ mit

$$(a, b)\,\bar{\alpha} = (a\alpha, b\alpha) \qquad \text{für } a, b \text{ aus } \mathfrak{T} \text{ und } a \neq b$$

ist eine eineindeutige Abbildung der Menge der Punkte von $\mathfrak{P}$ auf sich, da nach Lemma 1 sich jeder Punkt von $\mathfrak{P}$ in der Form (a, b) mit a, b aus $\mathfrak{T}$ darstellen läßt und α nach Definition kopunktale Geraden aus $\mathfrak{T}$ in kopunktale Geraden bzw. auch nicht kopunktale Geraden in nicht kopunktale Geraden überführt. Wir nennen $\bar{\alpha}$ die durch α in $\mathfrak{P}$ induzierte Punktabbildung. Da α zueinander senkrechte Geraden in zueinander senkrechte Geraden überführt, gilt $(a\pi)\,\bar{\alpha} = (a\,\alpha)\,\pi$ für a aus $\mathfrak{T}$, also $P\bar{\alpha} \in \mathfrak{T}$ für alle Punkte P aus $\mathfrak{T}$.

Haben drei verschiedene Punkte aus $\mathfrak{P}$ eine Gerade g aus $\mathfrak{T}$ gemeinsam, so auch ihre Bildpunkte hinsichtlich α. Bezeichnen wir die den Bildpunkten gemeinsame Gerade mit $g\bar{\alpha}$, so gilt

(1) *Es ist* $g\bar{\alpha} = g\alpha$ *für alle Geraden* g *aus* $\mathfrak{T}$.

(2) *Aus* $P\,\mathrm{I}\,g$ *folgt* $P\bar{\alpha}\,\mathrm{I}\,g\bar{\alpha}$ *für alle* P *aus* $\mathfrak{P}$ *und alle* g *aus* $\mathfrak{T}$.

(3) *Es ist* $P\bar{\alpha}\pi = P\pi\bar{\alpha}$ *und* $g\bar{\alpha}\pi = g\pi\bar{\alpha}$ *für alle* P, g *aus* $\mathfrak{T}$.

Haben dagegen drei verschiedene Punkte aus $\mathfrak{P}$ eine Gerade aus $\mathfrak{P}$ gemeinsam, welche $\mathfrak{T}$ nicht angehört, so entsteht die Frage, ob dann ihre Bildpunkte ebenfalls kollinear sind, d.h. ob $\bar{\alpha}$ eine Kollineation in $\mathfrak{P}$ ist. Diese Frage ist positiv zu beantworten, da wir zeigen können, daß die durch eine Spiegelung an einer Geraden aus $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{P}$ induzierte Punktabbildung mit einer involutorischen Homologie in $\mathfrak{P}$ übereinstimmt. Zunächst gilt:

LEMMA 2. *Für die durch eine Spiegelung an einer Geraden* g *aus* $\mathfrak{T}$ *in* $\mathfrak{P}$ *induzierte Punktabbildung* $\bar{\sigma}_g$ *gilt:*

a) *Es ist* $A\bar{\sigma}_g = A$ *für alle Punkte* A *auf* g.

b) *Es ist* $a\bar{\sigma}_g = a$ *für alle Geraden* a *aus* $\mathfrak{T}$ *mit* $a\,\mathrm{I}\,g\pi$.

BEWEIS: a) Nach Lemma 1 gibt es zwei voneinander und von g verschiedene Geraden a, b aus $\mathfrak{T}$ durch A. Nach (**) sind dann $a, g, a\sigma_g$ kopunktal, also auch $a, b, a\sigma_g$, da $a \neq g$ ist und a, g, b kopunktal sind. Entsprechend sieht man ein, daß $a, b, b\sigma_g$ kopunktal sind. Damit gilt $a\sigma_g, b\sigma_g \mathrel{I} A = (a, b)$ und mithin $A\bar{\sigma}_g = (a\sigma_g, b\sigma_g) = A$, wie behauptet.

Aus a) folgt insbesondere $g\bar{\sigma}_g = g$ und damit wegen (3): $(g\pi)\,\bar{\sigma}_g = (g\bar{\sigma}_g)\,\pi = (g\pi)$.

b) Aus $a \mathrel{I} g\pi$ ergibt sich $a\pi \mathrel{I} g$, also nach a) $(a\pi)\,\bar{\sigma}_g = a\pi$. Hieraus folgt unter Benutzung von (3) $a\bar{\sigma}_g = a\pi\bar{\sigma}_g\pi = a\pi\pi = a$.

Weiter zeigen wir zur Vorbereitung unseres angekündigten Satzes den folgenden

HILFSSATZ: *Eine durch eine Spiegelung σ_g induzierte Punktabbildung $\bar{\sigma}_g$ in $\mathfrak{P}$ besitzt keinen eigentlichen Fixpunkt A, der von $g\pi$ verschieden ist und nicht auf g liegt.*

BEWEIS: Wir führen die Annahme, es gäbe einen eigentlichen Punkt A mit $A\bar{\sigma}_g = A$ und $A \neq g\pi$ und $A \nmid g$, auf einen Widerspruch. Zunächst gilt:

(i) *Ist A ein Punkt mit $A\bar{\sigma}_g = A$ und $A \neq g\pi$ und $A \nmid g$, so gilt $x\bar{\sigma}_g = x$ für alle x aus $\mathfrak{T}$ mit $x \mathrel{I} A$.*

Denn nach Lemma 2 ist der Punkt (x, g) ein Fixpunkt von $\bar{\sigma}_g$. Mithin enthält x die beiden verschiedenen Fixpunkte A und (x, g) und muß daher selbst fix sein.

(ii) *Ist A ein eigentlicher Punkt mit $A\bar{\sigma}_g = A$ und $A \neq g\pi$, $A \nmid g$, so gilt $x\bar{\sigma}_g = x$ für alle x aus $\mathfrak{T}$.*

Nach Definition gilt die Behauptung für $x = g$ und nach Lemma 2 und (i) für alle x mit $x \mathrel{I} g\pi$ oder $x \mathrel{I} A$. Sei endlich x eine Gerade mit $x \neq g$ und $x \nmid A, g\pi$ und sei $(x, g) = B$. Dann gibt es nach Lemma 1 eine Gerade a aus $\mathfrak{T}$ mit $a \mathrel{I} g\pi$ und $a \nmid A, B$, ferner auch ein b aus $\mathfrak{T}$ mit $b \mathrel{I} A$, $(x, a) = C$, denn A ist eigentlich. Nach Lemma 2 und (i) ist $a\bar{\sigma}_g = a$ und $b\bar{\sigma}_g = b$, also $C\bar{\sigma}_g = (a, b)\,\bar{\sigma}_g = (a\bar{\sigma}_g, b\bar{\sigma}_g) = (a, b) = C$, woraus wegen $x\bar{\sigma}_g = (B, C)\,\bar{\sigma}_g = (B\bar{\sigma}_g, C\bar{\sigma}_g) = (B, C) = x$ die Behauptung folgt.

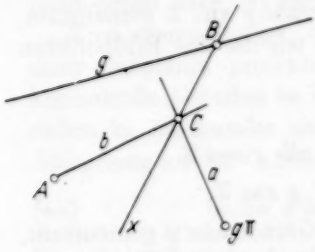


Fig. 1

Nach (ii) führt also unsere Annahme auf den Widerspruch $\sigma_g = 1$.

LEMMA 3. *Keine Gerade aus $\mathfrak{T}$ inzidiert mit ihrem Pol.*

BEWEIS: Sei g eine Gerade aus $\mathfrak{T}$. Dann gibt es nach T 1 eine Spiegelung σ_g an g und nach T 3 einen eigentlichen Punkt P, der nicht mit g inzidiert und von $g\pi$ verschieden ist. Setzen wir $a = (P, g\pi)$, so ist $a \in \mathfrak{T}$ und nach Lemma 2 $a\sigma_g = a$, also $P, P\bar{\sigma}_g \mathrel{I} a$. Nach Lemma 1 gibt es ein b aus $\mathfrak{T}$ mit $g, a \neq b$ und $b \mathrel{I} g\pi$, und ebenso gibt es ein c aus $\mathfrak{T}$ mit $c \neq a$ und $c \mathrel{I} P$ und $c \nmid (g, b)$. Es ist $c \neq b$. Sei $(b, c) = Q$ und d die Gerade aus $\mathfrak{T}$ mit $d \mathrel{I} P, Q\bar{\sigma}_g$.

Nach dem Hilfssatz ist $P \neq P\bar{\sigma}_g$ und daher auch $Q \neq Q\bar{\sigma}_g$. Die Punkte P, $P\bar{\sigma}_g$, Q, $Q\bar{\sigma}_g$ samt ihren sämtlichen Verbindungsgeraden bilden ein vollständiges Viereck, dessen Diagonalpunkte $C = (c, c\bar{\sigma}_g)$, $D = (d, d\bar{\sigma}_g)$ und $g\pi$ sind. Nach dem Fano-Axiom ist daher $g\pi \not\mathrel{I} (D, C) = g$, wie behauptet.

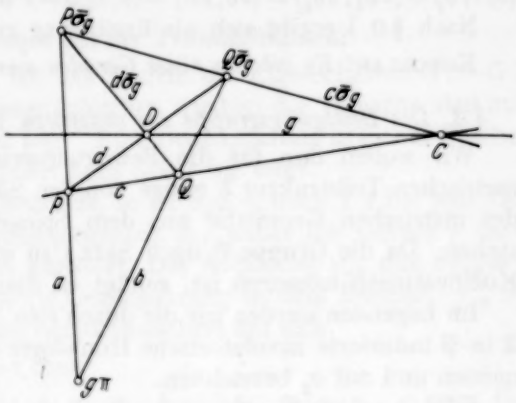


Fig. 2

Bemerkung: Setzt man für $\mathfrak{P}$ die Gültigkeit des Fano-Axioms nicht voraus, fordert man jedoch für die Pol-Polaren beziehung π von $\mathfrak{T}$, daß es eine Gerade g aus $\mathfrak{T}$ mit $g\pi \not\mathrel{I} g$ gibt, so lehrt die Konfiguration im Beweis von Lemma 3 für dieses Paar $g, g\pi$, daß es ein vollständiges Viereck mit nicht kollinearen Diagonalpunkten gibt. Da $\mathfrak{P}$ eine Pappussche Ebene ist, folgt hieraus die Gültigkeit des Fano-Axioms. Der Schluß im Beweis von Lemma 3 lehrt dann, daß $g \not\mathrel{I} g\pi$ für alle Geraden aus $\mathfrak{T}$ gilt.

Satz 1. *Die durch eine Spiegelung an einer Geraden g aus $\mathfrak{T}$ induzierte Punktabbildung in $\mathfrak{P}$ stimmt mit der involutorischen Homologie mit $g\pi$ als Zentrum und g als Achse überein.*

Beweis: Nach Lemma 3 ist $g\pi \not\mathrel{I} g$. Nach § 0, I gibt es eine involutorische Homologie σ mit $g\pi$ als Zentrum und g als Achse. Unsere Behauptung ist, daß $P\sigma = P\bar{\sigma}_g$ für alle Punkte P der Ebene $\mathfrak{P}$ gilt.

Ist $P = g\pi$ oder gilt $P \mathrel{I} g$, so folgt dies nach Definition oder nach Lemma 2. Ist ferner P ein eigentlicher Punkt mit $P \neq g\pi$ und $P \not\mathrel{I} g$, so ergibt sich die Behauptung für P nach § 0, II und nach der Konstruktion zum Beweis von Lemma 3, denn nach dieser liegen P, $P\bar{\sigma}_g$ harmonisch zu $g\pi$ und (a, g). Hieraus folgt:

(i) *Ist P ein eigentlicher Punkt mit $P \not\mathrel{I} g$, so gilt $a\sigma = a\bar{\sigma}_g$ für alle Geraden a durch P.*

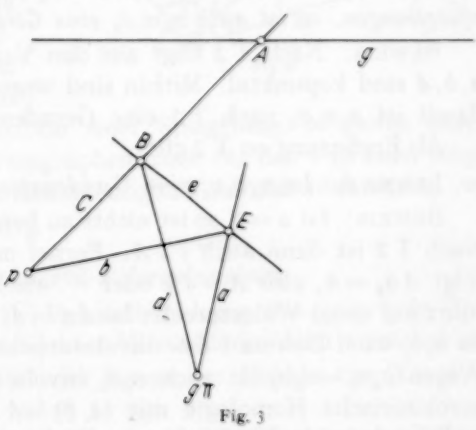


Fig. 3

Sei nun P ein beliebiger, nicht eigentlicher Punkt mit $P \not\mathrel{I} g$ und $P \neq g\pi$. Nach T 3 gibt es einen eigentlichen Punkt E mit $E \neq g\pi$ und $E \not\mathrel{I} g$. Wir führen dann die Verbindungsgeraden $a = (E, g\pi)$ und $b = (E, P)$ ein. Nach Lemma 1 gibt es Geraden c, d aus $\mathfrak{T}$ mit $c \mathrel{I} P$; $c \not\mathrel{I} E, g\pi$; $d \mathrel{I} g\pi$; $d \not\mathrel{I} E$, $(c, g) = A$. Da E eigentlich ist, gibt es weiter ein e aus $\mathfrak{T}$

mit $e \mathrm{I} E, (c,d) = B$. Es ist $e \neq d$ und nach Lemma 2 oder (i) $b\bar{\sigma}_g = b\sigma$; $d\bar{\sigma}_g = d\sigma$; $e\bar{\sigma}_g = e\sigma$. Mithin ergibt sich $B\bar{\sigma}_g = (e,d)\bar{\sigma}_g = (e\bar{\sigma}_g, d\bar{\sigma}_g) = (e\sigma, d\sigma) = (e,d)\sigma = B\sigma$ und $c\bar{\sigma}_g = (A,B)\bar{\sigma}_g = (A\bar{\sigma}_g, B\bar{\sigma}_g) = (A\sigma, B\sigma) = (A,B)\sigma = c\sigma$ und endlich $P\bar{\sigma}_g = (b,c)\bar{\sigma}_g = (b\bar{\sigma}_g, c\bar{\sigma}_g) = (b\sigma, c\sigma) = (b,c)\sigma = P\sigma$. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Nach § 0, I ergibt sich als Ergänzung zu T 1 sofort das

KOROLLAR: *Es gibt an einer Geraden aus $\mathfrak{T}$ höchstens eine Spiegelung.*

§ 3. Die Bewegungsgruppe der ordinären projektiv-metrischen Teilstruktur

Wir wollen nun für die Bewegungsgruppe $\mathfrak{B}$ der ordinären projektiv-metrischen Teilstruktur $\mathfrak{T}$ einige von den Sätzen herleiten, die beim Aufbau der metrischen Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff an zentraler Stelle stehen. Da die Gruppe $\mathfrak{B}$ nach Satz 1 zu einer Gruppe $\mathfrak{B}^*$ von projektiven Kollineationen isomorph ist, genügt es, diese Gruppe zu untersuchen.

Im folgenden werden wir die durch eine Spiegelung an einer Geraden aus $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{P}$ induzierte involutorische Homologie ebenfalls eine Geradenspiegelung nennen und mit σ_g bezeichnen.

LEMMA 4. *Sind σ_a, σ_b Geradenspiegelungen, so ist $\sigma_a\sigma_b\sigma_a$ die Spiegelung an der Geraden $b\sigma_a$.*

BEWEIS: Da a, b, a kopunktal sind, ist $\sigma_a\sigma_b\sigma_a$ nach T 2 eine Geradenspiegelung. Da $b\sigma_a$ punktweise bei $\sigma_a\sigma_b\sigma_a$ festbleibt, ist $\sigma_a\sigma_b\sigma_a$ die Spiegelung an der Geraden $b\sigma_a$.

LEMMA 5. *Sind a, b Geraden aus $\mathfrak{T}$, so ist genau dann $a \perp b$, wenn $\sigma_a\sigma_b$ involutorisch ist. Ist $\sigma_a\sigma_b$ involutorisch, so ist $\sigma_a\sigma_b$ eine involutorische Homologie mit (a,b) als Zentrum und $(a\pi, b\pi)$ als Achse.*

BEWEIS: Aus $a \perp b$ folgt $a \mathrm{I} b\pi$ und $a\pi \mathrm{I} b$, also ist nach III aus § 0 $\sigma_a\sigma_b$ involutorisch. Der Schluß ist nach III aus § 0 umkehrbar. Die letzte Behauptung von Lemma 5 folgt ebenfalls aus § 0, III.

SATZ 2 (Transitivitätssatz). *Ist $\sigma_a \neq \sigma_b$ und sind $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$, $\sigma_a\sigma_b\sigma_d$ Geradenspiegelungen, so ist auch $\sigma_a\sigma_c\sigma_d$ eine Geradenspiegelung.*

BEWEIS: Nach T 2 folgt aus den Voraussetzungen in Satz 2: a, b, c und a, b, d sind kopunktal. Mithin sind wegen $a \neq b$ auch a, c, d kopunktal, und damit ist $\sigma_a\sigma_c\sigma_d$ nach T 2 eine Geradenspiegelung.

Als Ergänzung zu T 2 gilt:

LEMMA 6. *Ist $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ eine Geradenspiegelung σ_d, so sind a, b, d kopunktal.*

BEWEIS: Ist $a = b$, so ist nichts zu beweisen. Sei also $a \neq b$ und $A = (a,b)$. Nach T 2 ist dann auch $c \mathrm{I} A$. Ferner muß $c \neq d$ gelten. Aus $A\sigma_a\sigma_b\sigma_c = A$ folgt $A\sigma_d = A$, also $A = d\pi$ oder — wie behauptet — $d \mathrm{I} A$. Der erste Fall führt auf einen Widerspruch: Ist $d\pi = A$, also $c \mathrm{I} d\pi$, so gilt $d \perp c$ und damit ist $\sigma_d\sigma_c$ nach Lemma 5 eine involutorische Homologie mit (c,d) als Zentrum. Wegen $\sigma_a\sigma_b = \sigma_d\sigma_c$ ist auch $\sigma_a\sigma_b$ involutorisch, mithin nach Lemma 5 eine involutorische Homologie mit $(a,b) = A$ als Zentrum. Hieraus folgt $A = (c,d)$ und damit $d \mathrm{I} A = d\pi$, im Widerspruch zu Lemma 3.

Die Menge der Geradenspiegelungen in der Gruppe $\mathfrak{B}^*$ hat nach Definition und nach Lemma 4 und Satz 2 folgende Eigenschaften:

G 0. *Die Geradenspiegelungen sind involutorische Elemente einer Gruppe; es gibt mindestens zwei Geradenspiegelungen.*

G 1. *Eine Geradenspiegelung, mit einer Geradenspiegelung transformiert, ist eine Geradenspiegelung.*

G 2. *Für die Geradenspiegelungen gilt der Transitivitätssatz.*

Wie in [*1*], § 4,5 ausgeführt, hat das System der Eigenschaften G 0—G 2 wichtige Konsequenzen. Von diesen brauchen wir hier die Tatsache, daß aus G 0—G 2 der Gegenpaarungssatz folgt. Eine Gegenpaarung in einem Büschel kopunktaler Geraden aus $\mathfrak{T}$ definiert man dabei wie folgt:

Sind a, b zwei Geraden des Büschels, so ist $\sigma_a\sigma_x\sigma_b$ nach T 2 für jede Gerade x des Büschels eine Geradenspiegelung σ_y, wobei die Gerade y nach Lemma 6 ebenfalls dem Büschel angehört. Die Abbildung γ_{ab} mit $x\gamma_{ab} = y$ heißt dann die durch a, b definierte Gegenpaarung in dem Büschel. γ_{ab} ist eine eineindeutige Abbildung des Geradenbüschels auf sich.

Der Gegenpaarungssatz lautet dann:

SATZ 3 (Gegenpaarungssatz). *$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, g$ seien Geraden aus $\mathfrak{T}$, welche folgenden Voraussetzungen genügen: a_1, a_2, a_3 sind kopunktal; $b_2 = a_2\gamma_{a_1b_1}$; $b_3 = a_3\gamma_{a_1b_1}$; c_i, a_k, c_l sind kopunktal für jede Permutation i, k, l von 1, 2, 3; $\sigma_{c_1}\sigma_{b_1} \neq \sigma_{c_2}\sigma_{b_2}$* (Nebenvoraussetzung); *c_1, b_1, g und c_2, b_2, g sind kopunktal. Dann sind c_3, b_3, g kopunktal.*

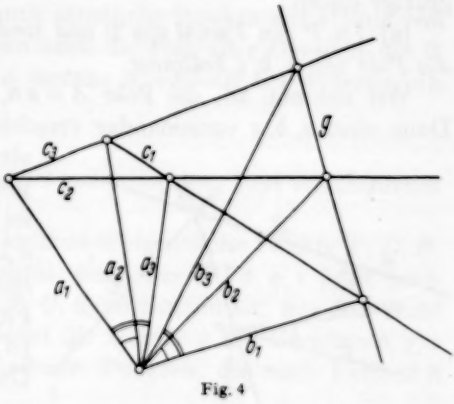


Fig. 4

Man beachte, daß in den bisher geführten Beweisen die Eineindeutigkeit der Abbildung π, also die Eineindeutigkeit der Abbildung φ nicht wesentlich benutzt wird. Sie wird nur an einer Stelle verwandt, nämlich beim Beweis von Lemma 2 b). Nimmt man jedoch die Eigenschaft b) mit in die Definition einer Spiegelung, so gelten unsere Überlegungen in diesen beiden Paragraphen auch für den Fall einer singulären, d.h. eindeutigen, aber nicht eineindeutigen Pol-Polarenbeziehung, wie sie in Teil B behandelt werden wird.

§ 4. Fortsetzung der Pol-Polarenbeziehung

Wir wollen nun die ordinäre Pol-Polarenbeziehung $\pi = (\varphi, \varphi^{-1})$ in $\mathfrak{T}$ zu einer projektiven Polarität in $\mathfrak{P}$ fortsetzen. Wir erklären dazu zunächst eine Fortsetzung $\bar{\psi}$ der Abbildung $\psi = \varphi^{-1}$ der Menge der Punkte von $\mathfrak{T}$ auf die Menge ihrer Polaren in $\mathfrak{T}$:

Seien P ein Punkt von $\mathfrak{P}$ und a, b zwei verschiedene Geraden aus $\mathfrak{T}$ durch P und $a\pi, b\pi$ deren Pole. Dann heißt die Gerade $(a\pi, b\pi)$ eine *Polare* $P\bar{\psi}$ des Punktes P.

Für die Abbildung $\bar{\psi}$ zeigen wir schrittweise:

(i) *$\bar{\psi}$ ist eine eindeutige Abbildung der Menge der Punkte von $\mathfrak{P}$ in die Menge der Geraden von $\mathfrak{P}$.*
(ii) *Es gilt $P\bar{\psi} = P\psi$ für alle Punkte P aus $\mathfrak{T}$.*
(iii) *$\bar{\psi}$ ist eine eineindeutige Abbildung.*
(iv) *$\bar{\psi}$ bildet die Menge der Punkte von $\mathfrak{P}$ auf die Menge der Geraden von $\mathfrak{P}$ ab.*
(v) *Aus $P\,\mathrm{I}\,g$ folgt $P\bar{\psi}\,\mathrm{I}\,g\bar{\psi}^{-1}$ für alle P, g aus $\mathfrak{P}$, d.h. $\bar{\varphi} = \bar{\psi}^{-1}$ hat die Eigenschaft (*).*
(vi) *$\bar{\psi}$ ist eine projektive Abbildung.*

Nach § 1 bedeuten die Eigenschaften (i)—(vi), daß das Paar $\bar{\pi} = (\bar{\varphi}, \bar{\varphi}^{-1})$ eine projektive Polarität in $\mathfrak{P}$ ist, die für die Punkte und Geraden aus $\mathfrak{T}$ mit π übereinstimmt.

Die Eigenschaft (ii) folgt sofort wegen $P\psi = P\pi = (a\pi, b\pi)$ für alle P aus $\mathfrak{T}$. (i) ergibt sich aus

LEMMA 7: *Zu jedem Punkt P aus $\mathfrak{P}$ gibt es genau eine Polare.*

BEWEIS: Die Existenz wenigstens einer Polaren zu P folgt sofort aus Lemma 1. Die Eindeutigkeit der Polare eines Punktes ergibt sich, wenn wir gezeigt haben:

(a) *Ist P ein Punkt von $\mathfrak{P}$ und sind a, b, c Geraden aus $\mathfrak{T}$ durch P, so sind die Pole von a, b, c kollinear.*

Wir nehmen an, die Pole $A = a\pi$, $B = b\pi$, $C = c\pi$ seien nicht kollinear. Dann sind a, b, c voneinander verschieden. Durch Umbenennen können wir stets erreichen, daß A, B, P nicht kollinear sind. Nach T 2 und Lemma 6 ist $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ eine Geradenspiegelung σ_d mit $d\,\mathrm{I}\,P$. Sei F der Schnittpunkt von (A, B) mit d, dann ist $F \neq C$ und $F\sigma_a\sigma_b\sigma_c = F\sigma_d = F$, also $F\sigma_a\sigma_b = F\sigma_c$. Offenbar gilt $(A, B)\,\sigma_a\sigma_b = (A, B)$ und somit $F\sigma_c\,\mathrm{I}\,(A, B)$. Da auch $F\sigma_c\,\mathrm{I}\,(F, C)$ und $(A, B) \neq (F, C)$ und $F\,\mathrm{I}\,(A, B), (F, C)$ gilt, muß $F = F\sigma_c$, mithin wegen $F \neq C$ dann $F\,\mathrm{I}\,c$ gelten. Aus $F, P\,\mathrm{I}\,c, d$ und $F \neq P$ ergibt sich $c = d$, also $\sigma_c = \sigma_d$ und damit $\sigma_a = \sigma_b$, im Widerspruch zu $a \neq b$.

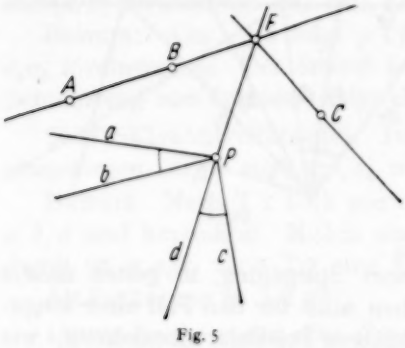


Fig. 5

Man beachte, daß der Beweis von (a) keinen Gebrauch von der Eineindeutigkeit der Abbildung φ macht. Wir werden also die Aussage (a) auch in Teil B verwenden können.

Vor dem Beweis von (iii) leiten wir her:

LEMMA 8. *Die Polare eines eigentlichen Punktes P inzidiert nur mit Polen von Geraden durch P, d.h. nur mit Punkten aus $\mathfrak{T}$. Insbesondere inzidiert P nicht mit seiner Polaren.*

BEWEIS: Sei $p = P\bar{\psi}$ die Polare des Punktes P. Wir beweisen zuerst die letzte Aussage von Lemma 8. Wäre $P\,\mathrm{I}\,p$, so wäre p eine Gerade aus $\mathfrak{T}$, da

P eigentlich ist. Seien dann a, b zwei verschiedene Geraden durch P, so gilt $a\pi, b\pi \mathrel{I} p$, also $a, b \mathrel{I} p\pi$ und damit $p\pi = P$, im Widerspruch zu Lemma 3. Also gilt $p \nmid P$.

Sei nun A ein beliebiger Punkt auf p und $b = (A, P)$. Dann ist nach Lemma 7 $b\pi \mathrel{I} p$. Für die Gerade $a = (P, b\pi)$ gilt $a\pi \mathrel{I} p$ und $a\pi \mathrel{I} b$, also $A = a\pi$, und A ist Pol der Geraden a durch P.

Auch in diesem Beweis wird lediglich die Eindeutigkeit, aber nicht die Eineindeutigkeit der Abbildung φ benutzt, so daß wir auch ihn in den Teil B übernehmen können.

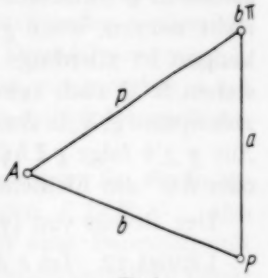


Fig. 6

Lemma 9. *Die Polaren zweier verschiedener Punkte von* $\mathfrak{P}$ *sind verschieden.*

Beweis: Seien A, B zwei Punkte, deren Polaren $a = A\bar{\psi}$, $b = B\bar{\psi}$ identisch sind. Wir nehmen an, es wäre $A \neq B$. Nach T 3 gibt es einen eigentlichen Punkt E mit $E \nmid (A, B)$. Die Verbindungsgeraden $c = (E, A)$ und $d = (E, B)$ sind voneinander verschiedene Geraden von $\mathfrak{T}$, deren Pole nach Lemma 7 mit $a = b$ inzidieren. Nach Definition muß dann a auch die Polare des Punktes E sein. Nach Lemma 8 sind damit sämtliche Punkte auf a Pole von Geraden durch E, andererseits aber liegen auch die Pole aller Geraden aus $\mathfrak{T}$ durch A oder durch B auf der Geraden a, woraus $A = E = B$, im Widerspruch zur Annahme folgt.

Mit Lemma 9 ist (iii) bewiesen.

Lemma 10. *Jede Gerade* g *aus* $\mathfrak{P}$ *inzidiert mit wenigstens zwei verschiedenen Punkten aus* $\mathfrak{T}$.

Beweis: Nach T 3 gibt es drei nicht kollineare eigentliche Punkte P, Q, R. Deren Polaren p, q, r sind nicht kopunktal, denn aus $S \mathrel{I} p, q, r$ folgt nach Lemma 8, daß ein s mit $S = s\pi$ und $s \mathrel{I} P, Q, R$ vorhanden ist, was der Wahl von P, Q, R widerspricht. Damit schneidet die Gerade g die Geraden p, q, r in mindestens zwei voneinander verschiedenen Punkten, die nach Lemma 8 der Teilstruktur $\mathfrak{T}$ angehören.

Lemma 11. *Jede Gerade* g *aus* $\mathfrak{P}$ *ist Polare eines Punktes* P *von* $\mathfrak{P}$.

Beweis: Sind A, B zwei nach Lemma 10 mit g inzidierenden verschiedenen Punkte aus $\mathfrak{T}$ und a, b deren Polaren, so ist $a \neq b$ und g ist Polare des Punktes $P = (a, b)$.

Mit Lemma 11 ist (iv) bewiesen. Wir nennen $g\bar{\psi}^{-1}$ den Pol der Geraden g aus P. Wegen (ii) stimmt diese Bezeichnung für alle Geraden aus $\mathfrak{T}$ mit der in § 1 gegebenen überein.

Der Beweis von (v) ist mühevoller als die bisher geführten Nachweise. Zunächst gilt folgende Teilaussage von (v):

(v′) *Aus* $P \mathrel{I} g$ *folgt* $P\bar{\psi} \mathrel{I} g\bar{\psi}^{-1}$, *wenn wenigstens eines der Elemente* P, g *in* $\mathfrak{T}$ *liegt.*

Denn ist $g \in \mathfrak{T}$, so ist $g\bar{\psi}^{-1} = g\pi$ nach Lemma 7 ein Punkt der Polaren $P\bar{\psi}$ von P. Und ist $P \in \mathfrak{T}$, also $P = p\pi$ mit $p \in \mathfrak{T}$, so ist nach dem Beweis von

Lemma 11 der Pol $g\psi^{-1}$ von g darstellbar als Schnittpunkt zweier verschiedener Geraden a, b aus $\mathfrak{T}$ mit $a\pi, b\pi \mathrel{I} g$. Wäre $p = P\psi \mathrel{I} g\bar{\psi}^{-1}$, wären also a, b, p nicht kopunktal, so hätten die drei verschiedenen Punkte (a, b), (a, p), (b, p) dieselbe Polare, nämlich g, da $a\pi, b\pi, p\pi \mathrel{I} g$ gilt. Dies widerspricht Lemma 9.

Wir merken hier an, daß wir das Senkrechtstehen in $\mathfrak{T}$ zu einem Senkrechtstehen in $\mathfrak{P}$ fortsetzen können, indem wir zwei Geraden g, h zueinander senkrecht nennen, wenn g mit dem Pol der Geraden h inzidiert. Nach dem bisherigen ist allerdings noch nicht klar, ob das hiermit definierte Senkrechtstehen in $\mathfrak{P}$ auch symmetrisch ist. Nach (v') gilt dies zunächst nur für Geradenpaare g, h, in denen wenigstens eine Gerade der Teilstruktur $\mathfrak{T}$ angehört: Aus $g \perp h$ folgt $g \mathrel{I} h\bar{\psi}^{-1}$ und weiter, da entweder g oder h, also entweder g oder $h\bar{\psi}^{-1}$ ein Element von $\mathfrak{T}$ ist, nach (v') $h = (h\bar{\psi}^{-1})\,\bar{\psi} \mathrel{I} g\bar{\psi}^{-1}$, also $h \perp g$.

Der Beweis von (v) geht über den Beweis einer Teilaussage von (vi):

LEMMA 12. *Ist e die Polare eines eigentlichen Punktes E, so bildet ψ die Menge der Punkte auf e projektiv auf die Menge der Geraden durch E ab.*

BEWEIS: Wir zeigen zunächst mit fast wörtlich aus [1], § 4,8 übertragenem Beweis, daß jede Gegenpaarung γ_{ab} in dem Büschel der Geraden durch E projektiv ist.

Sei zunächst $a \neq b$ und a' eine Gerade $\neq a, b$ durch E (nach T 3 gibt es eine solche Gerade). Dann ist $b' = a'\gamma_{ab} \neq a, b$, weil sonst $a' = a$ oder $a' = b$ folgte. Nach T 3 gibt es dann auf a, b, b' nicht kollineare eigentliche Punkte A, B, $B' \neq E$. Es sei $v = (A, B')$ und $g = (B, B')$. Ferner führen wir die Geraden $p = (A, B)$ und die Gerade q ein, welche B mit (a', v) verbindet. Die Perspektivitätenkette

$$a, a' \underset{E}{\overset{v}{\wedge}} p, q \underset{B}{\overset{a'}{\wedge}} p, v \underset{A}{\overset{g}{\wedge}} b, b',$$

bei der niemals die Perspektivitätsachse mit den Büschelzentren inzidiert, führt a, a' in b, b' über.

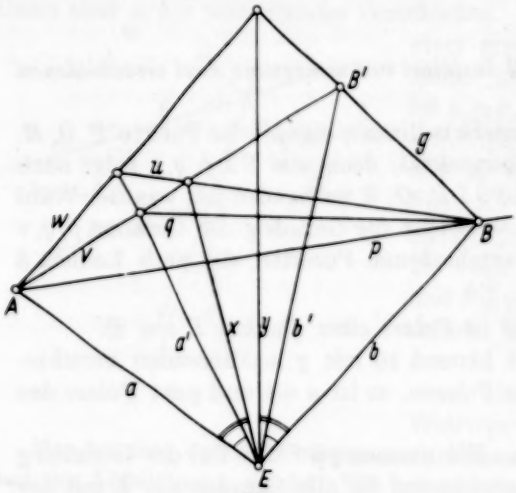


Fig. 7

Sei nun x eine beliebige Gerade durch E und $y = x\gamma_{ab}$. Wir führen die Gerade u ein, welche B mit (x, v) verbindet und die Gerade w, welche A mit (a', u) verbindet. Auf die Geraden a, a', x und $a\gamma_{ab} = b$, $a'\gamma_{ab} = b'$, $x\gamma_{ab} = y$ wenden wir den Gegenpaarungssatz an (die Nebenvoraussetzung $\sigma_u\sigma_b \neq \sigma_v\sigma_{b'}$ ist erfüllt) und schließen: Da u, b, g und v, b', g kopunktal sind, sind es auch w, y, g. Die angegebene Perspektivitätenkette führt dann x in u, weiter u in w und nach dem Bewiesenen w in y, also x in y über. Mithin ist γ_{ab} für $a \neq b$ projektiv.

Die Gegenpaarung γ_{aa} ist ebenfalls projektiv, da offenbar $x\gamma_{aa}=x\sigma_a$ für alle Geraden x durch E gilt und σ_a eine projektive Kollineation ist.

Wir überlegen nun, daß die eineindeutige Abbildung ϱ des Büschels der Geraden durch E auf sich, welche jeder Geraden durch E die zu ihr senkrechte Gerade durch E zuordnet, eine projektive Abbildung ist. Sie kann nämlich durch Hintereinanderausführen zweier Gegenpaarungen, also zweier projektiver Abbildungen erzeugt werden: Sind $a, \bar{a}$ zwei zueinander senkrechte Geraden durch E, so gilt $x\varrho=x\gamma_{aa}\gamma_{a\bar{a}}$ für alle x mit $x\,\mathrm{I}\,E$. Denn ist $y=x\gamma_{aa}\gamma_{a\bar{a}}$, so gilt $\sigma_y=\sigma_a(\sigma_a\sigma_x\sigma_a)\,\sigma_{\bar{a}}$ also $\sigma_y=\sigma_x\sigma_a\sigma_{\bar{a}}$ und damit $\sigma_x\sigma_y=\sigma_a\sigma_{\bar{a}}$. Aus $a\perp\bar{a}$ folgt aber nach Lemma 5, daß $\sigma_a\sigma_{\bar{a}}$ und damit auch $\sigma_x\sigma_y$ involutorisch ist, was — ebenfalls nach Lemma 5 — $x\perp y$ bedeutet.

Nun können wir die Behauptung von Lemma 12 herleiten: Sei P ein beliebiger Punkt auf e, dann ist $(P,E)\perp P\bar{\psi}=P\pi$ wegen $P\,\mathrm{I}\,(P,E)$. Also gilt $(P,E)\,\varrho=P\,\bar{\psi}$. Da nun die Abbildung $P\to(P,E)$ eine Perspektivität und die Abbildung ϱ projektiv ist, ist die durch Hintereinanderausführen dieser Abbildungen entstehende Abbildung $P\to P\,\bar{\psi}$ projektiv, was zu beweisen war.

Aus Lemma 12 werden wir sogleich die Gültigkeit des Satzes über den Schnittpunkt der Höhen in einem Dreieck erschließen, welches wenigstens einen eigentlichen Eckpunkt hat. Man beachte hierbei, daß in einem solchen Dreieck in den Paaren Seite-Höhe stets eine Gerade der Teilstruktur $\mathfrak{T}$ angehört, so daß für sie nach unseren oben gemachten Bemerkungen das Senkrechtstehen symmetrisch ist. Die Höhen in einem solchen Dreieck sind die Verbindungsgeraden der Ecken mit den Polen der gegenüberliegenden Seite, sofern die Ecken von diesen verschieden sind.

Satz 4 (Höhensatz): *Die Höhen in einem nicht ausgearteten Dreieck, dessen Ecken nicht die Pole der gegenüberliegenden Seite sind und das einen eigentlichen Eckpunkt hat, sind kopunktal.*

Beweis: Seien A, B, C die nicht kollinearen Eckpunkte des Dreiecks und A ein eigentlicher Punkt. Die Seiten (A,B), (A,C), (B,C) bezeichnen wir mit c, b, a und die Höhen von A, B, C auf a, b, c mit $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Wir dürfen voraussetzen, daß die Höhen voneinander verschieden sind, da anderenfalls die Behauptung des Satzes unmittelbar folgt. Ist $(\bar{b},\bar{c})=A$, so gilt wegen $\bar{a}\,\mathrm{I}\,A$ die Behauptung ebenfalls. Sei also $A\neq(\bar{b},\bar{c})=H$ und $a'=(H,A)$. Können wir zeigen, daß $a'\perp a$ ist, so muß wegen $\bar{a}, a'\,\mathrm{I}\,a\bar{\psi}^{-1}, A$ und $A\neq a\bar{\psi}^{-1}$ $\bar{a}=a'$, also unsere Behauptung gelten.

Wir führen die Polare $\tilde{a}$ von A und die Schnittpunkte $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ von a, b, c mit $\tilde{a}$ ein. Die Pole der Geraden a, b, c bezeichnen wir mit A', B', C' (Fig. 8).

Die eineindeutige, involutorische Abbildung σ der Geraden $\tilde{a}$ auf sich mit

$$X\sigma=(X\pi,\tilde{a}) \qquad \text{für alle } X \text{ mit } X\,\mathrm{I}\,\tilde{a}$$

ist nach Lemma 12 projektiv. Für sie gilt $B'\sigma=(B'\pi,\tilde{a})=(b,\tilde{a})=\overline{B}$ und $C'\sigma=(C'\pi,\tilde{a})=(c,\tilde{a})=\overline{C}$, und damit auch $\overline{B}\sigma=B'$ und $\overline{C}\sigma=C'$.

Wir betrachten nun die Perspektivitätenkette σ' mit

$$B', C', \overline{B}, \overline{C} \overset{C}{\underset{\wedge}{=}} \widetilde{B}', \widetilde{C}', A, \overline{C} \overset{B'}{\underset{\wedge}{=}} C, \widetilde{C}', \widetilde{A}, C' \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} \overline{B}, \overline{C}, B', C',$$

die die Punktreihe $\tilde{a}$ nacheinander auf die Punktreihen $c, \bar{c}, \tilde{a}$ abbildet. Die beiden projektiven Abbildungen σ, σ' stimmen in den drei verschiedenen

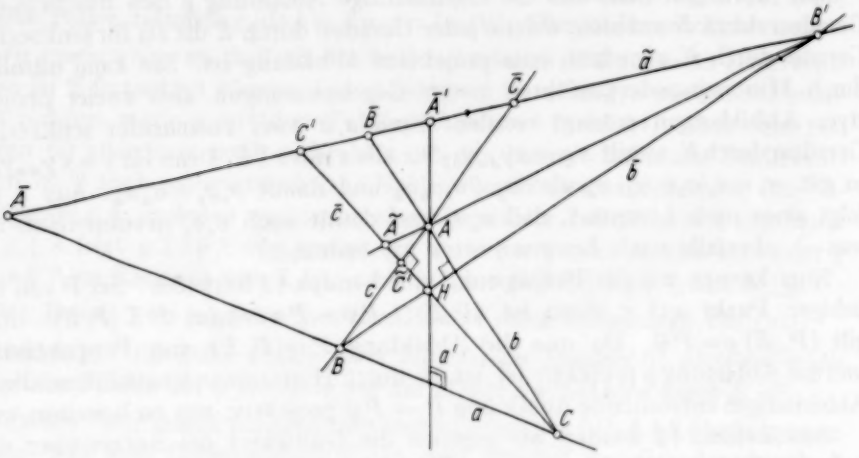


Fig. 8

Punkten $B', C', \bar{B}$ überein und müssen daher nach dem Fundamentalsatz identisch sein. Da nun die Perspektivitätenkette σ' nacheinander $\bar{A}$ in B,

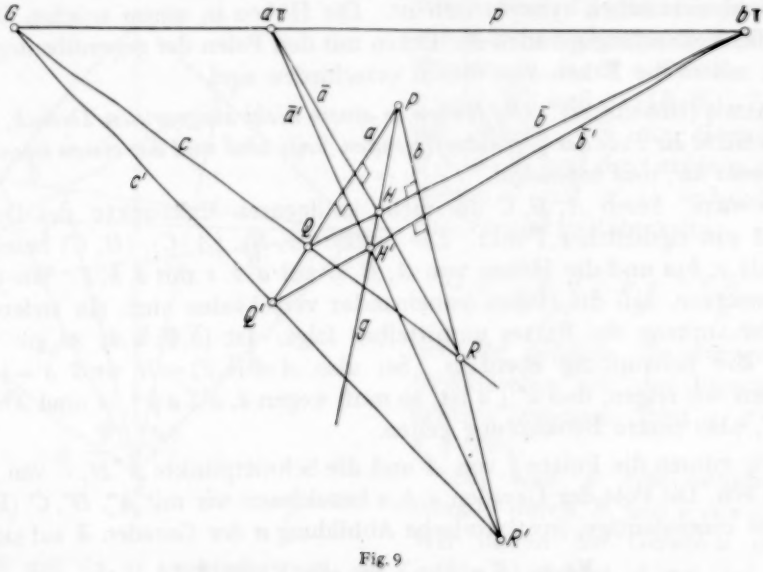


Fig. 9

B in H, H in $\bar{A}' = (a', \tilde{a})$ überführt, gilt $\bar{A}\sigma = (A\pi, \tilde{a}) = \bar{A}'$ und damit $\bar{A}\pi = (A, \bar{A}') = a'$. Aus $a'\pi = \bar{A}\,\mathfrak{I}\,a$ folgt dann $a \perp a'$ und damit $a' \perp a$, wie behauptet.

Nunmehr können wir an den Beweis von (v) gehen. Nach (v') dürfen wir voraussetzen, daß $P, g \notin \mathfrak{T}$ gilt. Wir setzen $P\bar{\psi} = p$ und $g\bar{\psi}^{-1} = G$ (Fig. 9). Es gibt offenbar eine Gerade a durch P, welche mit wenigstens einem eigentlichen

Punkt, also nach T 3 mit wenigstens drei verschiedenen eigentlichen Punkten inzidiert. Wir können damit auf a zwei eigentliche Punkte Q, Q' so wählen, daß $Q, Q' \neq P$ ist. Q, Q' inzidieren nicht mit p, da $P \notin \mathfrak{T}$, also $p \notin \mathfrak{T}$ gilt. Wir wählen dann eine Gerade $b \neq a$ aus $\mathfrak{T}$ mit $b \mathrel{I} P$ und $b \not\perp a$. Nach Lemma 7 gilt $a\pi, b\pi \mathrel{I} p$. Wegen $g \notin \mathfrak{T}$ ist $g \neq a, b$.

Wir konstruieren nun zwei Dreiecke, die P als Eckpunkt, a, b als Seiten, g als Höhe und Q bzw. Q' als Eckpunkt haben. Wir führen nämlich die Verbindungsgeraden $\bar{b}, \bar{b}'$ von Q, Q' mit $b\pi$ ein, verbinden die Schnittpunkte H, H' von g mit $\bar{b}, \bar{b}'$ mit $a\pi$ durch Geraden $\bar{a}, \bar{a}'$ und ziehen die Verbindungsgeraden c, c' von $R = (b, \bar{a})$ mit Q und von $R' = (b, \bar{a}')$ mit Q'. Nach Konstruktion ist $P \neq Q, Q', H, H', R, R'$ und kein Eckpunkt der Dreiecke PQR, $PQ'R'$ Pol der gegenüberliegenden Seite. Nach dem Höhensatz für diese beiden Dreiecke folgt dann $c, c' \perp g$, also $c\pi, c'\pi \mathrel{I} g$. Also ist — wegen $c \neq c'$ — $G = (c, c')$. Da die beiden Dreiecke QHR und $Q'H'R'$ perspektiv in bezug auf den Punkt P liegen und sich zwei Paare entsprechender Seiten auf p (nämlich in $a\pi$ und $b\pi$) schneiden, müssen sich nach dem Satz von DESARGUES auch c, c' auf p schneiden. Mithin gilt $G = (c, c') \mathrel{I} p$, wie behauptet.

Mit dem Beweis von (i)—(v) ist gezeigt, daß $\bar{\pi} = (\bar{\psi}^{-1}, \bar{\psi})$ eine Polarität ist. Da ψ nach Lemma 12 mindestens eine Punktreihe projektiv abbildet, ist sie nach § 0, III projektiv. Damit gilt auch (vi) und somit der erste Teil des nachstehenden Theorems:

THEOREM 1. *Eine in einer projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ erklärte ordinäre projektiv-metrische Teilstruktur $\mathfrak{T}$, für welche die Forderungen* T 1, T 2, T 3 *erfüllt sind, läßt sich in eine ordinäre projektiv-metrische Struktur der Ebene $\mathfrak{P}$ einbetten, deren absolute Polarität $\bar{\pi}$ mit der Pol-Polarenbeziehung π in $\mathfrak{T}$ übereinstimmt.*

Die Bewegungsgruppe von $\mathfrak{T}$ ist einer Untergruppe der Bewegungsgruppe der ordinären projektiv-metrischen Ebene mit $\bar{\pi}$ als absoluter Polarität isomorph.

Der zweite Teil von Theorem 1 ist unmittelbar klar: Nach Satz 1 induziert jede Spiegelung an einer Geraden aus $\mathfrak{T}$ eine involutorische Homologie in $\mathfrak{P}$, die ein Paar Pol-Polare hinsichtlich π, also auch hinsichtlich $\bar{\pi}$ als Zentrum und Achse hat. Derartige involutorische Homologien erzeugen aber die Bewegungsgruppe der ordinären projektiv-metrischen Ebene mit $\bar{\pi}$ als absoluter Polarität.

B. Singuläre projektiv-metrische Teilstrukturen

Wir wollen nun singuläre projektiv-metrische Teilstrukturen betrachten und für sie ein entsprechendes Theorem über ihre Einbettbarkeit in eine singuläre projektiv-metrische Ebene herleiten, wie wir es in Teil A für die ordinären projektiv-metrischen Teilstrukturen aufstellen konnten.

Wir legen wieder eine projektive Ebene $\mathfrak{P}$ zugrunde.

Sei $\mathfrak{m}$ eine Menge von Geraden und $\mathfrak{M}$ eine Menge von Punkten der Ebene $\mathfrak{P}$ und φ eine eindeutige, jedoch nicht eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft

($\ast\ast_{\ast}$) *Aus $P \mathrel{I} g$ für $g \in \mathfrak{m}$ und $P \in \mathfrak{M}$ folgt $p \mathrel{I} g\varphi$ für alle Geraden p aus $\mathfrak{m}$ mit $p\varphi = P$.*

Wir nennen $g\varphi$ den Pol der Geraden g und jede Gerade p mit $p\varphi = P$ eine Polare des Punktes P. Die Abbildung φ wollen wir eine *singuläre Pol-Polaren-beziehung* nennen.

Ein Paar $\mathfrak{T} = (\mathfrak{m}, \mathfrak{M})$ aus einer Menge $\mathfrak{m}$ von Geraden und einer Menge $\mathfrak{M}$ von Punkten der Ebene $\mathfrak{P}$ nennen wir eine *singuläre projektiv-metrische Teilstruktur*, wenn zwischen den Elementen von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{M}$ eine singuläre Pol-Polarenbeziehung definiert ist. Im folgenden sei $\mathfrak{T}$ stets eine singuläre projektiv-metrische Teilstruktur. Wir definieren zunächst für $\mathfrak{T}$ die gleichen Begriffe wie in Teil A für die ordinären projektiv-metrischen Teilstrukturen.

Zwei Geraden g, h aus $\mathfrak{T}$ heißen zueinander *senkrecht*, geschrieben $g \perp h$, wenn g mit dem Pol der Geraden h [und daher nach ($\overset{**}{*}$) h auch mit dem Pol der Geraden g] inzidiert. Das Senkrechtstehen ist symmetrisch. Zwei Punkte P, Q aus $\mathfrak{T}$ heißen zueinander *polar*, wenn P mit einer Polaren von Q [und damit nach ($\overset{**}{*}$) auch Q mit einer Polaren von P] inzidiert.

Eine eineindeutige, involutorische Abbildung σ der Menge $\mathfrak{m}$ auf sich, bei der kopunktale Geraden in kopunktale Geraden und zueinander senkrechte Geraden in zueinander senkrechte Geraden übergehen, heißt eine *Spiegelung an der Geraden* g aus $\mathfrak{T}$, wenn sie alle Geraden aus $\mathfrak{T}$ durch $g\varphi$ festläßt[2]) und wenn (**) aus Teil A für sie gilt. Eine Spiegelung an der Geraden g bezeichnen wir mit σ_g.

Jedes Produkt aus Spiegelungen an Geraden aus $\mathfrak{T}$ nennen wir eine *Bewegung* von $\mathfrak{T}$. Die Bewegungen von $\mathfrak{T}$ bilden eine Gruppe, die *Bewegungsgruppe* $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{T}$.

Wir betrachten nun singuläre projektiv-metrische Teilstrukturen $\mathfrak{T}$, für welche die Forderungen T 1—T 3 aus Teil A erfüllt sind, und wollen zeigen, daß für sie die singuläre Pol-Polarenbeziehung φ eine projektive fixpunktfreie Involution $\mathfrak{l}$ auf einer Geraden o von $\mathfrak{P}$ so bestimmt, daß die Teilstruktur $\mathfrak{T}$ in die singuläre projektiv-metrische Struktur der Ebene $\mathfrak{P}$ in bezug auf $\mathfrak{l}$ als absoluter Polarinvolution eingebettet ist. Es wird sich nämlich herausstellen, daß die Punkte von $\mathfrak{T}$, d.h. die Pole der Geraden aus $\mathfrak{T}$, genau die sämtlichen Punkte auf einer Geraden o der Ebene $\mathfrak{P}$ sind, daß jeder Punkt aus $\mathfrak{T}$ genau einen zu ihm polaren Punkt besitzt und daß $\mathfrak{l}$ die Abbildung auf o ist, die jedem Punkt auf o den zu ihm polaren Punkt zuordnet.

Für eine singuläre projektiv-metrische Teilstruktur $\mathfrak{T}$, für welche T 1—T 3 erfüllt sind, gelten Lemma 1—6 und Satz 1—3 aus Teil A, da die Beweise derselben wörtlich übernommen werden können, mit Ausnahme des Beweises von Teil b) in Lemma 2, da die erste Aussage in der Eigenschaft (3) auf S. 371 hier keinen Sinn hat. b) in Lemma 2 folgt aber nach Definition einer Spiegelung hier direkt.

Wir untersuchen nun die singuläre Pol-Polarenbeziehung. Sie ist nach Voraussetzung nicht eindeutig. Es gibt also mindestens einen Punkt aus $\mathfrak{M}$, der mehr als eine Polare hat. Die Menge aller Punkte aus $\mathfrak{M}$, die mehr als eine Polare haben, bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}'$. Es gilt dann:

[2]) Diese Eigenschaft ist aus (**) beweisbar, wenn für die singuläre projektiv-metrische Teilstruktur T die Forderungen T 1—T 3 aus Teil A erfüllt sind.

(i) *Zu jedem Punkt P aus $\mathfrak{M}'$ gibt es genau einen polaren Punkt Q. Dieser ist von P verschieden und Pol aller Geraden aus $\mathfrak{T}$ durch P, also ebenfalls ein Punkt von $\mathfrak{M}'$.*

Denn seien p, p' zwei verschiedene Polaren von P, so folgt aus $x \mathrel{I} P = p\varphi = p'\varphi$ nach (***) $x\varphi \mathrel{I} p, p'$, also $x\varphi = (p, p') = Q$ für alle Geraden x durch P. Der Punkt Q ist zu P polar und Pol aller Geraden aus $\mathfrak{T}$ durch P und damit nach Lemma 3 von P verschieden.

Sei nun Q' ein weiterer zu P polarer Punkt, dann ist auch P zu Q' polar und inzidiert mit einer Geraden q', für welche $q'\varphi = Q'$ gilt. Damit ist nach dem eben Überlegten $Q' = Q$, womit (i) bewiesen ist.

Da sich zu jedem Punkt P aus $\mathfrak{M}'$ und jedem eigentlichen Punkt E eine Gerade aus $\mathfrak{T}$ finden läßt, die mit E und dem zu P polaren Punkt Q inzidiert, gilt nach (i):

(ii) *Jeder Punkt aus $\mathfrak{M}'$ hat eine Polare durch jeden eigentlichen Punkt.*

Aus (ii) folgt sofort mit der Aussage (a) im Beweis von Lemma 7, deren Beweis auch hier wörtlich richtig bleibt:

(iii) *Alle Punkte von $\mathfrak{M}'$ liegen auf einer Geraden.*

Da $\mathfrak{M}'$ nach Voraussetzung und (i) mindestens zwei verschiedene Punkte enthält, ist die Gerade, welche die Punkte von $\mathfrak{M}'$ trägt, eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen sie mit o. Ist E ein beliebiger eigentlicher Punkt, so liegen nach (a) aus dem Beweis von Lemma 7 die Pole aller Geraden durch E auf o. Andererseits lehrt der gleiche Schluß wie für Lemma 8:

(iv) *Jeder Punkt auf o hat durch jeden eigentlichen Punkt eine Polare und ist damit ein Punkt von $\mathfrak{M}'$.*

Endlich gilt:

(v) *Jeder Punkt P von $\mathfrak{M}$ ist ein Punkt von $\mathfrak{M}'$, d.h. es gilt $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$.*

Denn sei E ein eigentlicher Punkt und a eine Gerade, die mit P und E inzidiert, so ist $a\varphi \mathrel{I} o$ und damit nach (iv) $a\varphi \in \mathfrak{M}'$, also nach (i) auch $P \in \mathfrak{M}'$, da P zu $a\varphi$ polar ist.

Aus (v), (iii), (iv), (i) ergibt sich der

Satz 5. *Die Punkte einer singulär projektiv-metrischen Teilstruktur $\mathfrak{T}$ sind die sämtlichen Punkte einer Geraden o von $\mathfrak{P}$. Zu jedem Punkt P aus $\mathfrak{T}$ gibt es genau einen polaren Punkt Q. Dieser ist von P verschieden.*

Nach Satz 5 ist die Abbildung I der Menge der Punkte auf o auf sich, welche jedem Punkt den zu ihm polaren Punkt zuordnet, eineindeutig und fixpunktfrei. Wegen der Symmetrie der Polarität von Punkten ist I involutorisch. Sie ist auch projektiv, wie man dem auch hier gültigen Beweis von Lemma 12 entnimmt.

Damit gilt der erste Teil des nachstehenden Theorems. Der zweite Teil desselben ergibt sich wie der zweite Teil in Teil A von Theorem 1.

THEOREM 2. *Eine in einer projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ erklärte singuläre projektiv-metrische Teilstruktur $\mathfrak{T}$, für welche die Forderungen* T 1, T 2, T 3 *erfüllt sind, läßt sich in eine singuläre projektiv-metrische Struktur der Ebene $\mathfrak{P}$ einbetten, deren absolute Polarinvolution $\mid$ durch die singuläre Pol-Polarenbeziehung in $\mathfrak{T}$ eindeutig bestimmt ist.*

Die Bewegungsgruppe von $\mathfrak{T}$ ist einer Untergruppe der Bewegungsgruppe der singulären projektiv-metrischen Ebene mit $\mid$ als absoluter Polarinvolution isomorph.

C. Schlußfolgerungen

Wir wollen nun Theorem 1 und 2 auf die Theorie der metrischen Ebenen anwenden, wie sie in [5] entwickelt wurde.

Wir betrachten also eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die in bezug auf ein nur aus involutorischen Elementen bestehendes Erzeugendensystem $\mathfrak{S}$ dem in [5], § 1 formulierten Axiomensystem genügt. Wie in [5] ausgeführt, lassen sich die Elemente aus $\mathfrak{S}$ zu Büscheln zusammenfassen, von denen je zwei verschiedene höchstens ein Element gemeinsam haben. Man kann dann der Gruppe $\mathfrak{G}$ eine Gruppenebene dadurch zuordnen, daß man die Elemente von $\mathfrak{S}$ Geraden, die Büschel Punkte und eine Gerade g mit einem Punkt P inzident nennt, wenn g dem P definierenden Büschel angehört. Ferner nennt man zwei Geraden g, h zueinander senkrecht, wenn ihr Produkt gh involutorisch ist. Eine Verbindungsgerade zweier verschiedener Punkte der Gruppenebene braucht nicht zu existieren; ist sie aber vorhanden, so ist sie eindeutig bestimmt. Ein Punkt der Gruppenebene, der mit allen anderen Punkten verbindbar ist, heißt ein eigentlicher Punkt. Aus dem Axiomensystem ergibt sich, daß mindestens drei nicht kollineare eigentliche Punkte vorhanden sind.

In [5] wird gezeigt, daß es zu jeder Geraden g der Gruppenebene, die nicht dem Zentrum der Gruppe $\mathfrak{G}$ angehört, ein Lotbüschel $G(g)$ gibt, welches die sämtlichen Senkrechten zu g und — gegebenenfalls außer g selbst — auch nur Senkrechte zu g enthält. $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ heißt regulär, wenn es eine Gerade g gibt, welche ihrem Lotbüschel nicht angehört. Ist $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ regulär, so besteht das Zentrum der Gruppe $\mathfrak{G}$ nur aus dem Einselement.

Wir nennen nun $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ einbettbar, wenn die Gruppenebene von $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ in eine Pappussche Ebene derart eingebettet werden kann, daß die Punkte der Gruppenebene die sämtlichen Punkte der Pappusschen Ebene sind, und die Geraden der Gruppenebene gewissen (nicht notwendig allen) Geraden der Pappusschen Ebene eineindeutig unter Erhaltung der Inzidenz zugeordnet werden können. Diese Pappussche Ebene nennen wir die *Idealebene* von $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$.

Sei $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ im folgenden regulär. Wir betrachten dann die Abbildung φ mit

$$g\varphi = G(g). \tag{1}$$

φ ist eine eindeutige Abbildung der Menge der Geraden der Gruppenebene auf die Menge aller der Punkte der Gruppenbene, welche Lotbüschel sind. φ hat die Eigenschaft (**) aus Teil B, denn wegen der Symmetrie des Senk-

rechtstehens in der Gruppenebene hat $g \in G(h)$ zur Folge $h \in G(g)$. Ist φ eineindeutig, so ist $(^{**}_{*})$ gleichbedeutend mit $(*)$ aus Teil A.

Ist demnach $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ regulär und einbettbar, so bilden in der Idealebene von $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ die Menge $\mathfrak{m}$ aller der Geraden, die Geraden der Gruppenebene eineindeutig zugeordnet sind, und die Menge $\mathfrak{M}$ aller der Punkte, welche Lotbüschel sind, eine projektiv-metrische Teilstruktur $\mathfrak{T}$, die entweder ordinär oder singulär ist, je nachdem, ob φ in (1) eineindeutig oder nicht eineindeutig ist.

Nach der Bemerkung zu Lemma 3 gilt in der Idealebene das Fano-Axiom, da es nach Definition eine Gerade g mit $g \notin G(g)$, also mit $g \,\mathfrak{I}\, g\varphi$ gibt, wenn $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ regulär ist.

Die Spiegelungen der Gruppenebene, wie sie in [5], § 2 definiert sind, haben, als Abbildungen in $\mathfrak{T}$ aufgefaßt, die Eigenschaften von Spiegelungen an Geraden in $\mathfrak{T}$. Nach [5], § 2 gelten damit für $\mathfrak{T}$ die Forderungen T 1 und T 2. Da es in der Gruppenebene eigentliche Punkte gibt, gilt auch die erste Forderung in T 3; die zweite gilt für alle $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, die dem Axiomensystem in [5], § 1 genügen, mit zwei Ausnahmen, den Gruppen $O_3^*(K, f)$ mit nichtnullteiliger symmetrischer Bilinearform f vom Rang 3 über den Primkörpern der Charakteristik 3 und 5, wenn $\mathfrak{S}$ jeweils die Menge aller Involutionen aus der entsprechenden Gruppe ist.

Wir wollen den Beweis hierfür kurz andeuten, wobei die im folgenden verwendeten Begriffe, Bezeichnungen, Theoreme und Sätze stets [5] entnommen sind.

Sei g eine Gerade, auf der ein eigentlicher Punkt E liegt, und $G = G(g)$ das Lotbüschel von $g \cdot G$ inzidiert dann mit wenigstens zwei Geraden a, b. Gilt Axiom $\sim PD$ für $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, so ist G nach Satz 33 nicht Zentrumsbüschel, mithin ab nicht involutorisch, und somit a^b eine von a und b verschiedene Gerade durch G. Der Beweis von Satz 43 a lehrt dann, daß g mit wenigstens drei verschiedenen eigentlichen Büscheln inzidiert.

Es möge also Axiom PD für $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ gelten. Dann inzidiert g nach Satz 43 b mit wenigstens drei verschiedenen eigentlichen Punkten, wenn durch G wenigstens sechs verschiedene Geraden gehen. Wir brauchen also nur den Fall zu betrachten, daß durch G höchstens fünf Geraden gehen. Ersichtlich kann es dann auf einer Geraden h, die mit G nicht inzidiert, höchstens fünf eigentliche Punkte geben, denn die Verbindungsgeraden verschiedener eigentlicher Punkte auf h mit G sind voneinander verschiedene Geraden durch G. Da es nun sicher eine Bewegung der Gruppenebene gibt, die eine Gerade durch G in eine nicht mit G inzidierende Gerade überführt, kann auch eine Gerade durch G höchstens fünf eigentliche Punkte tragen. Mithin kann es nur endlich viele eigentliche Punkte, nämlich höchstens $5 \cdot 5$ eigentliche Punkte in der Gruppenebene geben. Dies hat zur Folge, daß $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ endlich ist. Wäre nämlich $\mathfrak{G}$, also nach Satz 13 auch $\mathfrak{S}$ nicht endlich, so gäbe es mindestens einen Punkt $F \neq E$, welcher mit unendlich vielen Geraden inzidiert. Von den eigentlichen Punkten E^x für alle x mit $x \in F$ sind dann höchstens je zwei identisch: Sei a die Verbindungsgerade von E mit F und x eine Gerade durch

F. Für jede Gerade y durch F mit $E^x = E^y$ gilt dann, da nach Satz 5 $axy = z \in F$ ist, $E^z = E^{axy} = E^{xy} = E$, mithin nach Satz 8 entweder $z \in E$ und damit $z = a$, also $x = y$, oder $E = G(z)$. Da es höchstens ein z mit $G(z) = E$ geben kann, kann es zu jedem x mit $x \in F$ höchstens ein y mit $xy = az$, also mit $E^x = E^y$ und $x \neq y$ geben.

Die Menge der eigentlichen Punkte E^x für alle $x \in F$ ist also nicht endlich, im Widerspruch zum vorher Überlegten. Also ist $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ endlich und Theorem 2 in Verbindung mit Satz 47 und 43b lehren, daß nur für die beiden oben genannten Gruppen Geraden vorhanden sind, die zwar einen, aber nicht drei verschiedene eigentliche Punkte tragen.

Da für die Ausnahmegruppen das nachstehende Theorem trivialerweise gilt, können wir allgemein formulieren:

THEOREM 3. *Eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die in bezug auf ein nur aus involutorischen Elementen bestehendes Erzeugendensystem $\mathfrak{S}$ dem Axiomensystem in [5], § 1 genügt und für welche $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ regulär und einbettbar ist, kann als Untergruppe der Bewegungsgruppe einer projektiv-metrischen Ebene dargestellt werden.*

Nach [1], § 9, Theorem 4–6 gilt weiter das

THEOREM 4. *Genügt eine Gruppe $\mathfrak{G}$ den in Theorem 3 formulierten Voraussetzungen, so läßt sich $\mathfrak{G}$ als Untergruppe einer eigentlich-orthogonalen Gruppe $O_3^+(K, f)$ darstellen, wobei K ein Körper von Charakteristik $\neq 2$ und f eine symmetrische Bilinearform vom Rang 3 oder eine symmetrische, nullteilige Bilinearform vom Rang 2 ist.*

Wir merken abschließend an, daß nach Theorem 3 und 4 die Begründung aller metrischen Ebenen von Charakteristik $\neq 2$ vollendet ist, die durch das Axiomensystem in [7] gegeben sind, denn deren Bewegungsgruppe $\mathfrak{G}$ genügt in bezug auf das Erzeugendensystem $\mathfrak{S}$ der Geradenspiegelungen dem Axiomensystem in [5], und $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ ist einer mündlichen Mitteilung Herrn SPERNERS zufolge einbettbar.

Literatur

[1] BACHMANN, F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Grundlehren d. math. Wiss., Bd. 96. 1959.

[2] KARZEL, H.: Ein Axiomensystem der absoluten Geometrie. Arch. Math. **6**, 66–76 (1955).

[3] KARZEL, H.: Verallgemeinerte absolute Geometrien und Lotkerngeometrien. Arch. Math. **6**, 284–295 (1955).

[4] LINGENBERG, R.: Begründung der absoluten Geometrie der Ebene. Diss. Kiel 1955.

[5] LINGENBERG, R.: Über Gruppen mit einem invarianten System involutorischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt. I, II. Math. Ann. **137**, 26–41, 83–106 (1959).

[6] SCHMIDT, A.: Die Dualität von Inzidenz und Senkrechtstehen in der absoluten Geometrie. Math. Ann. **118**, 609–635 (1943).

[7] SPERNER, E.: Ein gruppentheoretischer Beweis des Satzes von DESARGUES in der absoluten Axiomatik. Arch. Math. 458–468 (1954).

Hannover, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 14. Dezember 1959)

ALBRECHT, R., u. G. KARRER
Math. Zeitschr. 74, 387–391 (1960)

Fixpunktsätze in uniformen Räumen

Herrn JOSEF LENSE zum 70. Geburtstag am 28. Oktober 1960 gewidmet

Von

RUDOLF ALBRECHT und GUIDO KARRER

Die vorliegende Arbeit schließt an Untersuchungen von L. KANTOROVITCH [1], J. WEISSINGER [2] und J. SCHRÖDER [3] an und gibt eine abstrakte Verallgemeinerung gewisser Fixpunktsätze über kontrahierende Abbildungen im Rahmen der Theorie der uniformen Räume. An Stelle der in [3] angegebenen Definition „verallgemeinerter Abstände" wird eine andere eingeführt, die Räume mit einem solchen Abstandsbegriff als Spezialfälle von uniformen Räumen ausweist.

1. Hilfssätze

Sei E ein topologischer Raum, f eine Abbildung von E in E. Ferner sei $\mathfrak{B}$ eine (eigentliche) Filterbasis auf E (bezüglich der Ordnung $\leqq$, die durch die mengentheoretische Inklusion $\subseteq$ gegeben ist) und es sei für eine beliebige Filterbasis $\mathfrak{C}$ auf E mit $\mathrm{Fi}\,\mathfrak{C}$ der durch $\mathfrak{C}$ erzeugte Filter, mit $L_{\mathfrak{C}}$ die Menge der Limites von $\mathfrak{C}$, mit $A_{\mathfrak{C}}$ die Menge der Berührungspunkte von $\mathfrak{C}$ bezeichnet. Schließlich soll für beliebiges $x\in E$ der Umgebungsfilter von x mit $\mathfrak{U}_x$ bezeichnet werden. Wir nehmen an, daß $L_{\mathfrak{B}}\neq\emptyset$ ist.

LEMMA 1. *Ist f stetig auf $L_{\mathfrak{B}}$ und* $\mathrm{Fi}\,\mathfrak{B}$ *feiner als* $\mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{B})$, *dann ist* $f(L_{\mathfrak{B}})\subseteq L_{\mathfrak{B}}$.

BEWEIS. f stetig auf $L_{\mathfrak{B}}$ heißt: Für beliebiges $x\in L_{\mathfrak{B}}$ ist $\mathfrak{U}_{f(x)}\supseteq\mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{U}_x)$. Da x Limes von $\mathfrak{B}$ ist, gilt $\mathfrak{U}_x\subseteq\mathrm{Fi}\,\mathfrak{B}$. Deshalb ist $\mathfrak{U}_{f(x)}\subseteq\mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{U}_x)\subseteq\mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{B})$. Damit hat man, weil $f(x)$ Limes von $\mathfrak{U}_{f(x)}$ ist, $f(x)\in L_{f(\mathfrak{B})}$ für jedes $x\in L_{\mathfrak{B}}$. Also gilt

$$f(L_{\mathfrak{B}})\subseteq L_{f(\mathfrak{B})}. \tag{1.1}$$

Nun ist $\mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{B})\subseteq\mathrm{Fi}\,\mathfrak{B}$, also auch $L_{f(\mathfrak{B})}\supseteq L_{\mathfrak{B}}$. Mit (1.1) folgt daher $f(L_{\mathfrak{B}})\subseteq L_{\mathfrak{B}}$.

LEMMA 2. *Ist f stetig auf $A_{\mathfrak{B}}$ und* $\mathrm{Fi}\,\mathfrak{B}$ *gröber als* $\mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{B})$, *dann ist* $f(A_{\mathfrak{B}})\subseteq A_{\mathfrak{B}}$.

BEWEIS. f stetig auf $A_{\mathfrak{B}}$ heißt: Für beliebiges $x\in A_{\mathfrak{B}}$ ist $\mathfrak{U}_{f(x)}\supseteq\mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{U}_x)$. Sei $x\in A_{\mathfrak{B}}$. Dann existiert ein Filter $\mathfrak{F}$, so daß $\mathrm{Fi}\,\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{U}_x\subseteq\mathfrak{F}$ [4, Chap. I, p. 49]. Deshalb ist $\mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{B})\subseteq\mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{F})$ und $\mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{U}_x)\subseteq\mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{F})$. Mit Obigem gilt $\mathfrak{U}_{f(x)}\supseteq\mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{F})$. Es folgt $L_{f(\mathfrak{F})}\supseteq A_{f(\mathfrak{F})}\supseteq A_{f(\mathfrak{B})}$ und $f(x)\in A_{f(\mathfrak{B})}$ für jedes $x\in A_{\mathfrak{B}}$. Also ist

$$f(A_{\mathfrak{B}})\subseteq A_{f(\mathfrak{B})}. \tag{1.2}$$

Nun gilt $\mathrm{Fi}\,\mathfrak{B}\subseteq\mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{B})$, also ist $A_{f(\mathfrak{B})}\subseteq A_{\mathfrak{B}}$. Mit (1.2) folgt deshalb $f(A_{\mathfrak{B}})\subseteq A_{\mathfrak{B}}$.

BEMERKUNGEN. 1. Ist E separiert, dann ist $L_{\mathfrak{B}}=A_{\mathfrak{B}}=\{x\}$ [4, Chap. I, p. 49]. Ist also $\mathfrak{B}$ mit $f(\mathfrak{B})$ vergleichbar, dann ist $x=f(x)$. 2. Ist E ein uniformer Raum, dann ist $L_{\mathfrak{B}}=A_{\mathfrak{B}}$ [4, Chap. II, p. 146, 148].

2. Fixpunktsätze für Abbildungen eines uniformen Raumes in sich

Sei E eine Menge, $\mathfrak{B}$ eine Filterbasis auf $E\times E$, die ein Fundamentalsystem von Umgebungen einer uniformen Struktur auf E ist. Wir betrachten den hierdurch gegebenen uniformen Raum und bezeichnen ihn wieder mit E.

SATZ 1. *Sei f eine Abbildung von E in E; $M\subseteq E$, $M\neq\emptyset$; $M_n=\bigcup_{\substack{l\in N\\ l\geqq n}} f^l(M)$, $N=\{1, 2, 3, \ldots\}$, $n\in N$; ferner sei X die Menge der Limites von $\{M_n\}_{n\in N}$ und f stetig auf X. Dann gilt* (a) *$f(X)\subseteq X$;* (b) *falls E separiert ist, $f(X)=X$ und X enthält höchstens ein Element.*

BEWEIS. $\{M_n\}_{n\in N}$ ist eine Basis des Elementarfilters von $\{f^n(M)\}_{n\in N}$. Ist $X=\emptyset$, dann ist $f(X)=X$. Sei $X\neq\emptyset$. Nach Voraussetzung ist f stetig auf X. Ferner ist $\mathrm{Fi}\{M_n\}_{n\in N}$ ebenso fein wie $\mathrm{Fi}\,f(\{M_n\}_{n\in N})$, denn $f(\{M_n\}_{n\in N})=\{M_{n+1}\}_{n\in N}$. Also ist nach Lemma 1 $f(X)\subseteq X$. (b) ist trivial.

BEMERKUNG. Statt Lemma 1 kann auch Lemma 2 zum Beweise benützt werden.

SATZ 2. *Sei E separiert und f eine Abbildung von E in E. Für jede Wahl von $B\in\mathfrak{B}$, $y\in E$, $z\in E$ existiere ein $n\in N$, so daß $\{f^n(y), f^n(z)\}\times\{f^n(y), f^n(z)\}\subseteq B$. Dann hat f auf E höchstens einen Fixpunkt.*

BEWEIS. Sei $y=f(y)$, $z=f(z)$, $y\neq z$. Dann existiert ein $B\in\mathfrak{B}$, so daß $(y, z)\notin B$, da E separiert. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, daß es ein n gibt, so daß $\{f^n(y), f^n(z)\}\times\{f^n(y), f^n(z)\}\subseteq B$ ist, weil dann $(y, z)\in B$ wäre.

SATZ 3. *Sei E separiert und vollständig, f eine Abbildung von E in E. Für jede Wahl von $B\in\mathfrak{B}$ und für ein $z\in E$ existiere ein $n\in N$, so daß $\{f^n(y), f^n(z)\}\times\{f^n(y), f^n(z)\}\subseteq B$ für beliebiges $y\in E$ gilt. Dann existiert $x=\lim_{n\to\infty} f^n(z)$. Ist f stetig im Punkte x, so ist $x=f(x)$.*

BEWEIS. $\left\{\bigcup_{\substack{l\in N\\ l\geqq n}} f^l(z)\right\}_{n\in N}$ ist Basis eines Cauchy-Filters. Denn sei B' ein beliebiges Element von $\mathfrak{B}$ und $B\circ B\subseteq B'$. Dann ist für beliebiges ganzzahliges $\varrho\geqq 0$ $\{f^{n+\varrho}(z), f^n(z)\}\times\{f^{n+\varrho}(z), f^n(z)\}\subseteq B$. Folglich ist für beliebige ganzzahlige $\varrho\geqq 0$ und $\sigma\geqq 0$ $\left(f^{n+\varrho}(z), f^n(z)\right)\in B$ und $\left(f^n(z), f^{n+\sigma}(z)\right)\in B$, also $\left(f^{n+\varrho}(z), f^{n+\sigma}(z)\right)\in B'$. Damit gilt $\bigcup_{\substack{l\in N\\ l\geqq n}} f^l(z)\times\bigcup_{\substack{l\in N\\ l\geqq n}} f^l(z)\subseteq B'$. Wegen der Vollständigkeit von E ist $\left\{\bigcup_{\substack{l\in N\\ l\geqq n}} f^l(z)\right\}_{n\in N}$ konvergent. Da E separiert ist, existiert nur ein Limes. Für diesen schreiben wir $x=\lim_{n\to\infty} f^n(z)$. Ist f stetig im Punkte x, so ist $x=f(x)$ nach Satz 1.

3. Erzeugung einer uniformen Struktur mittels verallgemeinerter Abstände

In Anwendungen werden uniforme Strukturen mittels des gewöhnlichen oder eines „verallgemeinerten" Abstandsbegriffes erzeugt. Sei H eine Menge $\{\varrho, \sigma, \tau, \ldots\}$ von Elementen $\varrho, \sigma, \tau, \ldots$. Auf H sei ein assoziatives, kommutatives inneres Kompositionsgesetz $(\varrho, \sigma)\to\varrho+\sigma$ erklärt für beliebiges $\varrho\in H$, $\sigma\in H$. In H existiere ein neutrales Element o. Ferner sei H geordnet durch

eine Relation $\leqq$[1]). Schließlich gelte

$H1$: o sei kleinstes Element von H, $H'=H-\{o\}$ sei links filternd;

$H2$: zu beliebigem $\varrho\in H'$ existiere $\varrho'\in H'$, so daß $2\varrho'\leqq\varrho$;

$H3$: für beliebige Elemente ϱ, σ, τ aus H folge aus $\varrho\leqq\sigma$ daß $\varrho+\tau\leqq\sigma+\tau$ ist.

Aus $H3$ folgt: Ist $\mu\leqq\sigma$, $\varrho\leqq\tau$ dann ist $\mu+\varrho\leqq\sigma+\tau$. Aus $H2$ und $H3$ folgt $\varrho'\leqq 2\varrho'\leqq\varrho$.

Sei E eine Menge $\{x, y, z, \ldots\}$ von Elementen $x, y, z, \ldots$ und d eine Abbildung von $E\times E$ in H, so daß für beliebige Elemente x, y, z aus E gilt

$D1$: $d(x, x)=o$;

$D2$: $d(x, y)=d(y, x)$;

$D3$: $d(x, y)\leqq d(x, z)+d(z, y)$.

Wir setzen für beliebiges $\varrho\in H'$ $B_\varrho=\overset{-1}{d}(\{\sigma\,|\,\sigma\in H,\ \sigma\leqq\varrho\})$. Dann ist $\{B_\varrho\}_{\varrho\in H'}$ ein Fundamentalsystem von Umgebungen einer uniformen Struktur auf E.

Beweis. Für beliebiges $\varrho\in H'$ ist $\Delta\subseteqq B_\varrho$ wegen $D1$. Aus $H1$ folgt, daß es zu beliebigem $\varrho\in H'$, $\varrho'\in H'$ ein $\varrho''\in H'$ gibt, so daß $\varrho''\leqq\varrho$ und $\varrho''\leqq\varrho'$. Ferner gilt: Ist $\sigma\leqq\tau$, $\sigma\in H'$, so ist $B_\sigma\subseteqq B_\tau$. Somit ist $\{B_\varrho\}_{\varrho\in H'}$ eine Filterbasis. Wegen $D2$ ist $B_\varrho=\overset{-1}{B}_\varrho$. Sei schließlich ϱ ein beliebiges Element aus H'. Nach $H2$ existiert $\varrho'\in H'$, so daß $2\varrho'\leqq\varrho$, und nach $H3$ ist $\varrho'\leqq\varrho$. Infolge $D3$ ist $\overset{2}{B}_{\varrho'}\subseteqq B_{2\varrho'}\subseteqq B_\varrho$.

Sei f eine Abbildung von E in E und $z\in E$. Wir betrachten die Filterbasis $\left\{\bigcup_{\substack{l\in N\\ l\geqq n}} f^l(z)\right\}_{n\in N}$ und setzen $z_l=f^l(z)$, $l\in N$. Diese Filterbasis ist nur dann konvergent, falls sie „beliebig kleine" Mengen enthält, das heißt, zu beliebig gewähltem $\varrho\in H'$ existiert $n\in N$, so daß

(3.1) $\qquad d(z_k, z_l)\leqq\varrho$ *ist für beliebiges* $k\geqq n$ *und* $l\geqq n$.

(3.1) ist erfüllt, falls

(3.2) $\qquad \sum_{i=k}^{m} d(z_{i+1}, z_i)\leqq\varrho$ *ist für beliebiges* m *und* k, $m\geqq k\geqq n$.

Denn sei in (3.1) $l=k+r$, $r>0$. Dann ist $d(z_k, z_{k+r})\leqq d(z_k, z_{k+1})+d(z_{k+1}, z_{k+r})$ infolge $D3$. Wegen $H3$ erhält man unter Berücksichtigung von (3.2)

$$d(z_k, z_{k+r})\leqq\sum_{i=k}^{k+r-1} d(z_i, z_{i+1})\leqq\varrho.$$

4. Majorantenmethode. Fehlerabschätzung

Wir nehmen nun an, daß jedes Element von H regulär sei. Dann besitzt H eine Symmetrisierung $\overline{H}=\{\varrho, \sigma, \tau, \ldots;\ -\varrho, -\sigma, -\tau, \ldots\}$. $\overline{H}$ ist eine Gruppe. Mittels der Ordnung auf H wird in natürlicher Weise eine Ordnung

[1]) H braucht nicht vollständig geordnet zu sein.

auf $\overline{H}$ erhalten, indem wir dann und nur dann $-\sigma \leqq -\varrho$ setzen, wenn $\varrho \leqq \sigma$, $\varrho \in H$, $\sigma \in H$ ist und Transitivität verlangen. Ferner gelte

$\overline{H}3$: Für beliebige Elemente ϱ, σ, τ aus $\overline{H}$ folge aus $\varrho \leqq \sigma$, daß $\varrho + \tau \leqq \sigma + \tau$ ist.

Daraus folgt: Ist $\sigma + \tau = \varrho$, $o \leqq \sigma$, dann ist $\tau \leqq \varrho$. Ist $\sigma = 2\sigma$, dann ist $\sigma = o$. Ist $\mu \leqq \sigma$, $\varrho \leqq \tau$, dann ist $\mu + \varrho \leqq \sigma + \tau$.

Auf $\overline{H}$ sei ein äußeres Kompositionsgesetz $(M, \varrho) \to M\varrho$, $M\varrho \in \overline{H}$, mit dem Operatorenbereich $\Omega = \{M, N, \ldots\}$ erklärt. Innere Kompositionsgesetze auf Ω seien durch $(M+N)\varrho = M\varrho + N\varrho$, $(MN)\varrho = M(N\varrho)$ gegeben für beliebiges $M \in \Omega$, $N \in \Omega$, und $\varrho \in \overline{H}$. Für die Operatoren aus Ω gelte ferner für beliebiges $M \in \Omega$, $\sigma \in \overline{H}$, $\varrho \in \overline{H}$

Ω_1: falls $o \leqq \varrho$, dann sei $o \leqq M\varrho$,

Ω_2: falls $\sigma \leqq \varrho$, dann sei $M\sigma \leqq M\varrho$.

Sind die Operatoren aus Ω additiv, so ist $Mo = o$ und $\Omega 1$ folgt aus $\Omega 2$. Ferner ist dann $M(-\varrho) = -M\varrho$.

Sei f eine Abbildung von E in E und $E' \subseteq E$. Für ein $n \in N$ existiere ein $M \in \Omega$, so daß für beliebiges $x \in E'$ und für beliebiges $y \in E'$ $d\left(f^n(x), f^n(y)\right) \leqq M\, d(x, y)$ ist. Dann sagen wir, „f^n ist auf E' M-beschränkt". Für $z \in E$ setzen wir ferner $z_i = f^i(z)$, $i \in N$. Es gelten dann folgende hinreichende Kriterien für die Gültigkeit von (3.1):

1. Für ein $z \in E$ und jedes $n \in N$ sei f^n auf $\{z, z_1, z_2, z_3, \ldots\}$ M_n-beschränkt. Existiert für beliebiges festes $\varrho' \in H'$ ein $n \in N$, so daß $M_n\, d(z, z_r) \leqq \varrho'$ ist für beliebiges $r > 0$, so gilt (3.1).

BEWEIS. Zu beliebigem $\varrho \in H'$ existiert $\varrho' \in H'$, so daß $2\varrho' \leqq \varrho$ ist. Ferner gilt $d(z_n, z_{n+r}) \leqq M_n d(z, z_r) \leqq \varrho'$. Für $k \geqq n$ und $l \geqq n$ ist dann $d(z_k, z_l) \leqq d(z_k, z_n) + d(z_n, z_l) \leqq 2\varrho' \leqq \varrho$.

2. Sei f auf den Mengen $\{z_{i+1}, z_i\}$, $i \in N$, M-beschränkt. Für beliebiges $\varrho \in H'$ existiere ein $n \in N$, so daß für jedes $r \geqq 0$ $\sum_{j=0}^{r} M^j d(z_{n+1}, z_n) \leqq \varrho$ ist, wobei M^0 den Identitätsoperator bedeute. Dann gilt (3.2) und damit (3.1).

BEWEIS. $\sum_{i=k}^{m} d(z_{i+1}, z_i) \leqq \sum_{i=n}^{m} d(z_{i+1}, z_i) \leqq \sum_{j=0}^{m-n} M^j d(z_{n+1}, z_n) \leqq \varrho$.

Ferner gelten folgende Fehlerabschätzungen:

1. Sei $x = f(x)$, $z \in E$ und f^n auf $\{x, z\}$ M_n-beschränkt für jedes $n \in N$. Dann ist $d(x, z_n) \leqq M_n d(x, z)$ eine Abschätzung des Abstandes der n-ten Iterierten $f^n(z)$ vom Punkte x. Abschätzungen dieser Art dienen in der Praxis zur Kennzeichnung des Konvergenzverhaltens (z. B. lineare Konvergenz, quadratische Konvergenz).

2. Sei $k \in N$ eine feste Zahl, $m > n > k$, f^l auf $\{z_{k+1}, z_k\}$ M_l-beschränkt für jedes $l \geqq n-k$ und x Limes der Filterbasis $\left\{ \bigcup_{\substack{i \in N \\ i \geqq n}} f^i(z) \right\}_{n \in N}$. Dann ist $d(x, z_n) \leqq d(x, z_m) + \sum_{l=n-k}^{m-k-1} M_l\, d(z_{k+1}, z_k)$.

BEWEIS.

$d(x, z_n) \leqq d(x, z_m) + d(z_m, z_n)$ und $d(z_m, z_n) \leqq \sum_{i=n}^{m-1} d(z_{i+1}, z_i) \leqq \sum_{l=n-k}^{m-k-1} M_l d(z_{k+1}, z_k)$.

Abschätzungen dieser Art werden in der Praxis häufig benützt, falls z.B. H das Intervall $[0, \infty)$, E ein metrischer Raum, Ω eine Menge von nichtnegativen reellen Zahlen ist, $\lim_{m \to \infty} d(x, z_m) = 0$ ist und die Reihe $\sum_{l=n-k}^{\infty} M_l$ konvergiert.

Auf der Majorantenmethode beruht

SATZ 4. *Sei f eine Abbildung von E in E und f^l auf E M_l-beschränkt für jedes $l \in N$. Es existiere ein Operator $M \in \Omega$ und zu beliebig gewählten $\varrho \in H'$, $y \in E$, $z \in E$ ein $s \in N$, so daß für jedes $m \geqq s$ $o \leqq M d(y, z) - \sum_{l=1}^{m} M_l d(y, z) \leqq \varrho$ ist. Dann ist $\left\{\bigcup_{l \geqq j} f^l(z)\right\}_{j \in N}$ Basis eines Cauchy-Filters und*

$$\{f^{s+1}(y), f^{s+1}(z)\} \times \{f^{s+1}(y), f^{s+1}(z)\} \subseteq B_{2\varrho}.$$

BEWEIS. $\left\{\bigcup_{l \geqq j} f^l(z)\right\}_{j \in N}$ ist genau dann Basis eines Cauchy-Filters, wenn (3.1) gilt. Sei ϱ^* ein beliebiges Element aus H', $2\varrho \leqq \varrho^*$, $2\varrho' \leqq \varrho$ nach $H2$, und $r \in N$. Wir nehmen das zu ϱ', z_{r+1}, z_r gehörige $s \in N$. Es ist $d(z_{j+1}, z_j) \leqq M_{j-r} d(z_{r+1}, z_r)$ für $j > r$. Aus $D3$ folgt $d(z_{s+r+k+1}, z_{s+r+1}) \leqq \sum_{j=s+r+1}^{s+r+k} d(z_{j+1}, z_j) \leqq \sum_{j=s+1}^{s+k} M_j d(z_{r+1}, z_r)$ für beliebiges $k > 0$. Ferner gilt $M d(z_{r+1}, z_r) - \sum_{j=1}^{s} M_j d(z_{r+1}, z_r) \leqq \varrho'$ und $-M d(z_{r+1}, z_r) + \sum_{j=1}^{s+k} M_j d(z_{r+1}, z_r) \leqq \varrho'$, also nach $H3$ $\sum_{j=s+1}^{s+k} M_j d(z_{r+1}, z_r) \leqq 2\varrho'$. Daraus folgt $d(z_{s+r+k+1}, z_{s+r+1}) \leqq 2\varrho' \leqq \varrho$. Ebenso gilt dann für beliebiges $l > 0$ $d(z_{s+r+1}, z_{s+r+l+1}) \leqq 2\varrho' \leqq \varrho$. Damit folgt aus $D3$ $d(z_{s+r+k+1}, z_{s+r+l+1}) \leqq 2\varrho \leqq \varrho^*$. Somit gilt (3.1) mit $n = s + r + 2$. — Schließlich ist $M_{s+1} d(y, z) \leqq 2\varrho$, also $d\left(f^{s+1}(y), f^{s+1}(z)\right) \leqq M_{s+1} d(y, z) \leqq 2\varrho$.

Ist H das Intervall $[0, \infty)$, E ein vollständiger, metrischer Raum, Ω eine Menge von nichtnegativen reellen Zahlen, so ergibt Satz 4 mit den Sätzen 1 und 2 einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Fixpunkte, der anscheinend erstmals von J. WEISSINGER [2] formuliert wurde. Die in Satz 1 geforderte Stetigkeit folgt dabei aus der Dehnungsbeschränktheit.

Literatur

[1] KANTOROVITCH, L.: The method of successive approximation for functional equations. Acta Mathematica Uppsala **71**, 63–97 (1939).

[2] WEISSINGER, J.: Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens. Math. Nachr. **8**, 193–212 (1952).

[3] SCHRÖDER, J.: Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstandsbegriff. Math. Z. **66**, 111–116 (1956).

[4] BOURBAKI, N.: Topologie générale. Deuxième edition. Paris 1951.

München, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

Ann Arbor, University of Michigan, Dept. of Mathematics

(Eingegangen am 5. März 1960)

Math. Zeitschr. 74, 392–413 (1960)
Noboru Itô

Faktorisierung endlicher auflösbarer Gruppen

Von

NOBORU ITÔ

Übersicht. Es sei $\mathfrak{G}$ eine auflösbare Gruppe endlicher Ordnung und $\mathfrak{M}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die keinen vom neutralen Element $\mathfrak{E}$ verschiedenen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ enthält. Dann enthält $\mathfrak{G}$ einen kleinsten Normalteiler $\mathfrak{N}$, der eine elementar abelsche p-Gruppe (p: Primzahl) ist, und $\mathfrak{G}$ erlaubt die Faktorisierung $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}=\mathfrak{E}$. Nun sei $\mathfrak{A}$ eine abelsche Untergruppe von $\mathfrak{G}$, welche (wie $\mathfrak{N}$) ein Komplement von $\mathfrak{M}$ ist: $\mathfrak{G}=\mathfrak{A}\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{M}=\mathfrak{E}$. Über die Struktur solcher $\mathfrak{A}$ hat Ritt [8] früher bewiesen: wenn $\mathfrak{A}$ zyklisch ist, so ist entweder $\mathfrak{A}=\mathfrak{N}$ (und die Ordnung von $\mathfrak{A}$ ist gleich p) oder die Ordnung von $\mathfrak{A}$ ist 4. Neuerdings haben Huppert [6] und der Verfasser [7] das Resultat von Ritt wesentlich verbessert. Nun ist das Ziel dieser Arbeit der für $p>3$ endgültige

Satz 1. *Für $p>3$ ist $\mathfrak{N}$ das einzige abelsche Komplement von $\mathfrak{M}$.*

Der Beweis von Satz 1 beruht auf dem folgenden

Satz 2. Voraussetzungen. *$\mathfrak{G}$ sei eine endliche Gruppe mit folgenden Eigenschaften: a) $\mathfrak{G}$ enthält einen elementar abelschen p-Normalteiler $\mathfrak{N}$, dessen Zentralisator in $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N}$ übereinstimmt. Dabei ist p eine Primzahl größer als 3. b) $\mathfrak{G}$ enthält eine nilpotente Untergruppe $\mathfrak{R}$ mit zu p primer Ordnung, deren Zentralisator in $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$ enthalten ist, und $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$ ist ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. c) $\mathfrak{G}$ enthält eine abelsche Untergruppe $\mathfrak{U}$, die im Normalisator von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{G}$ enthalten ist. d) $\mathfrak{G}$ erlaubt die Faktorisierung $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ derart, daß die Ordnung von $\mathfrak{G}$ dem Produkt von denjenigen von $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{U}$ gleich ist.*

Behauptung. *Ist $\mathfrak{A}$ eine abelsche p-Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft: $\mathfrak{G}=\mathfrak{A}\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{N}\mathfrak{A}=\mathfrak{A}\mathfrak{U}=\mathfrak{N}\mathfrak{U}$, so gilt $\mathfrak{U}=\mathfrak{E}$ und daher $\mathfrak{A}=\mathfrak{N}$.*

Bezeichnungen. $|\mathfrak{G}|$: die Ordnung von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}\rhd\mathfrak{H}$: $\mathfrak{H}$ ist ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{H}$ sei eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$. $\mathsf{N}\mathfrak{H}$: der Normalisator von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$; $\mathsf{Z}\mathfrak{H}$: der Zentralisator von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$; $\mathsf{C}\mathfrak{G}$: das Zentrum von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ seien Untermengen von $\mathfrak{G}$. $[\mathfrak{H},\mathfrak{K}]$: durch $H^{-1}K^{-1}HK$ ($H\in\mathfrak{H}$, $K\in\mathfrak{K}$) erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$; $<\mathfrak{H}>$: durch $\mathfrak{H}$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$; sei q eine Primzahl. $\mathfrak{G}(q)$: eine q-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$; $GL(m,p)$: die m-dimensionale allgemeine lineare Gruppe über $GF(p)$; $SL(m,p)$: die m-dimensionale spezielle lineare Gruppe über $GF(p)$.

§ 1. Beweis von Satz 2

Der Beweis wird durch Induktion nach $|\mathfrak{G}|$ geführt.

a) Angenommen, $\mathfrak{N}$ sei nicht minimal. Sei $(\mathfrak{E}<)\ \mathfrak{L}\ (<\mathfrak{N})$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{N}$. Setze $\mathfrak{Z}/\mathfrak{L}=\mathsf{Z}(\mathfrak{N}/\mathfrak{L})$. Wegen $\mathfrak{Z}\geqq\mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{Z}=\mathfrak{N}(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{U}$

$\cap \mathfrak{Z}$). Da $\mathfrak{R}$ das einzige p-Sylowkomplement von $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ ist, ist $\mathfrak{E} = (\mathfrak{R}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z}) \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{R}$ das einzige p-Sylowkomplement von $\mathfrak{R}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z}$. Wegen $\mathfrak{R}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z} \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{U}$ ist $\mathfrak{V} = (\mathfrak{R}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z}) \cap \mathfrak{U}$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{R}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z}$. Somit haben wir insgesamt $\mathfrak{Z} = \mathfrak{R}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{V} \leqq \mathsf{N}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{U}$. Nun folgt daraus $\mathfrak{E}\mathfrak{V} = \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{R}\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{U}$ und wegen $[\mathfrak{R}, \mathfrak{E}\mathfrak{V}] \leqq \mathfrak{L}$ dann $\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V} \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$. Daher haben wir $\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V} \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{R}\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$.

b) Wir zeigen, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$ alle Bedingungen von Satz 2 erfüllt. Dabei entsprechen sich gegenseitig: $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}(\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V})/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V} = \mathfrak{R}\mathfrak{E}\mathfrak{V}/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$, $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}(\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V})/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V} = \mathfrak{L}\mathfrak{R}\mathfrak{V}/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$, $\mathfrak{U} \to \mathfrak{U}(\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}) = \mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{U}/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$, $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}(\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V})/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$. Es genügt zu zeigen

$$\mathsf{Z}(\mathfrak{R}\mathfrak{E}\mathfrak{V}/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}) = \mathfrak{R}\mathfrak{E}\mathfrak{V}/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V} \tag{1}$$

und

$$\mathsf{Z}(\mathfrak{L}\mathfrak{R}\mathfrak{V}/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}) \leqq \mathfrak{R}\mathfrak{R}\mathfrak{V}/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}. \tag{2}$$

Denn dann sind a) und b) erfüllt; c) folgt so: Wegen $\mathfrak{L}\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{L}\mathfrak{R}\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V} \lhd \mathfrak{U}$ folgt $\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{U} \leqq \mathsf{N}(\mathfrak{L}\mathfrak{R}\mathfrak{V})$. d) überträgt sich trivial.

Beweis von (1): Setze $\mathfrak{Z}'/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V} = \mathsf{Z}(\mathfrak{R}\mathfrak{E}\mathfrak{V}/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V})$. Sei $X \in \mathfrak{Z}'$, also $[X, \mathfrak{R}] \leqq \mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$. Wegen $\mathfrak{R} \lhd \mathfrak{G}$ folgt $[X, \mathfrak{R}] \leqq \mathfrak{R} \cap \mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V} = \mathfrak{L}$. Somit ist $X \in \mathfrak{Z}$ und wir haben $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z} = \mathfrak{R}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$. Beweis von (2): Setze $\mathfrak{Z}^*/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V} = \mathsf{Z}(\mathfrak{L}\mathfrak{R}\mathfrak{V}/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V})$. Angenommen, daß $\mathfrak{Z}^* \not\leqq \mathfrak{R}\mathfrak{R}\mathfrak{V}$ ist. Dann existiert ein $NRU \in \mathfrak{Z}^*$ mit $N \in \mathfrak{R}$, $R \in \mathfrak{R}$ und $U \in \mathfrak{U} - \mathfrak{V}$. Dann gilt $[NRU, \mathfrak{L}\mathfrak{R}\mathfrak{V}] \leqq \mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$. Für jedes $X \in \mathfrak{L}\mathfrak{R}\mathfrak{V}$ gilt $[NRU, X] = (RU)^{-1}[N, X]\, RU[RU, X] \in \mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$. Wegen $[RU, X] \in \mathfrak{L}\mathfrak{R}\mathfrak{V}$ folgt $(RU)^{-1}[N, X]\, RU \in \mathfrak{L}\mathfrak{R}\mathfrak{V} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{L}$. Also haben wir $[RU, X] \in \mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$, $[RU, \mathfrak{L}\mathfrak{R}\mathfrak{V}] \leqq \mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$ und daher $RU \in \mathfrak{Z}^*$. Wegen $[RU, \mathfrak{R}\mathfrak{V}] \leqq \mathfrak{R}\mathfrak{U}$ folgt $[RU, \mathfrak{R}\mathfrak{V}] \leqq \mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V} \cap \mathfrak{R}\mathfrak{U} = \mathfrak{E}\mathfrak{V}$. Wegen $U \in \mathsf{N}\mathfrak{R}$ gilt $[RU, \mathfrak{R}] \leqq \mathfrak{R}$ und also $[RU, \mathfrak{R}] \leqq \mathfrak{E}\mathfrak{V} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{E}$. Insbesondere ist nun $[RU, R] = [U, R] \in \mathfrak{E} \leqq \mathfrak{Z}^*$ und daher $U \in <RU> \mathfrak{E} \leqq \mathfrak{Z}^*$. Denn für $m \equiv 1 \pmod{|\mathfrak{U}|}$, $m \equiv 0 \pmod{|\mathfrak{R}|}$ gilt $(RU)^m \equiv R^m U^m = U \bmod \mathfrak{E}$. Setze nun $\mathfrak{Z}^* \cap \mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{U} = \mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{W}$ mit $\mathfrak{W} \leqq \mathfrak{U}$. Dann ist wegen $U \in \mathfrak{W} - \mathfrak{V}$

$$\mathfrak{V} < \mathfrak{W} = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z}^*. \tag{*}$$

Setze $\mathfrak{Z}''/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V} = \mathsf{Z}(\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{W}/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V})$. Da $\mathfrak{U}$ abelsch ist, ist $\mathfrak{Z}'' \geqq \mathfrak{U}$. Wegen $\mathfrak{W} \leqq \mathfrak{Z}^*$ gilt $[\mathfrak{R}, \mathfrak{W}] \leqq \mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$, daher ist $\mathfrak{Z}'' \geqq \mathfrak{R}$. Also haben wir $\mathfrak{Z}'' = (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{Z}'')\, \mathfrak{R}\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{Z}'' \lhd \mathfrak{G}$ (da $\mathfrak{R}$ abelsch ist). Betrachte die p-Gruppe $\mathfrak{R}\mathfrak{W}$. Wegen $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ ist $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{W} = \mathfrak{E}$. Nun gilt $\mathfrak{L} < \mathfrak{R} \cap \mathfrak{Z}''$: Denn es ist $\mathfrak{E} < \mathfrak{R}/\mathfrak{L} \cap \mathsf{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{W}/\mathfrak{L})$: Also gibt es ein Element $X \in \mathfrak{R} - \mathfrak{L}$ mit $[X, \mathfrak{W}] \leqq \mathfrak{L}$. Dann ist $X \in \mathfrak{Z}''$. Wegen $\mathfrak{L} < \mathfrak{R} \cap \mathfrak{Z}'' \lhd \mathfrak{G}$ und der Maximalität von $\mathfrak{L}$ ist somit $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{Z}'' = \mathfrak{R}$. Nun folgt $\mathfrak{Z}'' = \mathfrak{R}\mathfrak{R}\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$, also $[\mathfrak{G}, \mathfrak{W}] \leqq \mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$. Insbesondere haben wir $[\mathfrak{R}, \mathfrak{W}] \leqq \mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{L}$. Somit ist $\mathfrak{W} \leqq \mathfrak{Z} = \mathfrak{R}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W} \leqq \mathfrak{V}$, entgegen (*). Also gilt in $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$ der Satz, somit ist $\mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{U} = \mathfrak{L}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$, daher $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}$.

c) Sei $\{\mathfrak{L}_i, i \in I\}$ die Menge aller maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{R}$. Da $\mathfrak{R}$ nicht minimal ist, ist $\mathfrak{L}_i \neq \mathfrak{E}$. Setze $\mathfrak{Z}_i/\mathfrak{L}_i = \mathsf{Z}(\mathfrak{R}/\mathfrak{L}_i)$. Nach a) haben wir $\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{R}\mathfrak{S}_i\mathfrak{V}_i$ mit $\mathfrak{S}_i \leqq \mathfrak{R}$, $\mathfrak{V}_i \leqq \mathsf{N}\mathfrak{S}_i \cap \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{V}_i \lhd \mathfrak{G}$.

Nun setze $\mathfrak{L}^* = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{L}_i$, $\mathfrak{S}^* = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{V}^* = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{V}_i$. Wir zeigen $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{V}^* = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{L}_i \mathfrak{S}_i \mathfrak{V}_i \lhd \mathfrak{G}$ gilt $\mathfrak{S}_i \mathfrak{V}_i = \mathfrak{L}_i \mathfrak{S}_i \mathfrak{V}_i \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Wegen $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ gilt $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}_i \mathfrak{V}_i \cap \mathfrak{N} \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Daraus folgt $\mathfrak{S}^* = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{S}_i \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Also haben wir $\mathsf{N}\mathfrak{S}^* \geqq \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ und also $\mathsf{N}\mathfrak{S}^* = (\mathfrak{N} \cap \mathsf{N}\mathfrak{S}^*)\,\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{N} \cap \mathsf{N}\mathfrak{S}^* \lhd \mathfrak{G}$ (da $\mathfrak{N}$ abelsch ist). Wegen $\mathfrak{L}_i \mathfrak{S}_i = \mathfrak{L}_i \mathfrak{S}_i \mathfrak{V}_i \cap \mathfrak{N}\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$ gilt $[\mathfrak{N}, \mathfrak{S}_i] \leqq \mathfrak{L}_i \mathfrak{S}_i \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{L}_i$. Also erhalten wir $[\mathfrak{N}, \mathfrak{S}^*] = [\mathfrak{N}, \bigcap_{i \in I} \mathfrak{S}_i] \leqq \mathfrak{L}_i$ (für jedes $i \in I$) und daher $[\mathfrak{N}, \mathfrak{S}^*] \leqq \bigcap_{i \in I} \mathfrak{L}_i = \mathfrak{L}^*$. Also haben wir $\mathfrak{L}^* \mathfrak{S}^* \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{S}^*$. Für jedes $N \in \mathfrak{N}$ gilt nun $N^{-1}\mathfrak{S}^* N \leqq \mathfrak{L}^* \mathfrak{S}^*$. Wegen $(|\mathfrak{L}^*|, |\mathfrak{S}^*|) = 1$ und der Nilpotenz von $\mathfrak{S}^*$ sind alle p-Sylowkomplement in $\mathfrak{L}^* \mathfrak{S}^*$ nach einem Satz von WIELANDT [*10*] miteinander konjugiert. Daher existiert ein $L^* \in \mathfrak{L}^*$ mit $N^{-1}\mathfrak{S}^* N = L^{*-1}\mathfrak{S}^* L^*$. Daraus folgt $NL^{*-1} \in \mathsf{N}\mathfrak{S}^*$, $N \in \mathfrak{L}^* \mathsf{N}\mathfrak{S}^*$ und $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{L}^* \mathsf{N}\mathfrak{S}^*$. Wegen $\mathfrak{N} \geqq \mathfrak{L}^*$ folgt $\mathfrak{N} = \mathfrak{L}^*(\mathsf{N}\mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{N})$. Ist $\mathfrak{N} > \mathsf{N}\mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{N}$, so gibt es einen Index $j \in I$ mit $\mathsf{N}\mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{N} \leqq \mathfrak{L}_j$. Wegen $(\mathsf{N}\mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{N})\,\mathfrak{L}^* = \mathfrak{N}$ folgt dann $\mathfrak{L}_j \mathfrak{L}^* = \mathfrak{N}$, und wegen $\mathfrak{L}_j \geqq \bigcap_{i \in I} \mathfrak{L}_i = \mathfrak{L}^*$ folgt weiter $\mathfrak{L}_j = \mathfrak{N}$. Das ist ein Widerspruch. Somit ist $\mathsf{N}\mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$. Dann folgt $\mathsf{N}\mathfrak{S}^* \geqq \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$ und daher $\mathfrak{S}^* \lhd \mathfrak{G}$. Insbesondere haben wir $[\mathfrak{N}, \mathfrak{S}^*] \leqq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{S}^* = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathsf{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ folgt $\mathfrak{S}^* \leqq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{S}_i \mathfrak{V}_i \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ folgt $[\mathfrak{N}, \mathfrak{V}_i] \leqq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{S}_i \mathfrak{V}_i = \mathfrak{S}_i$ (für jedes $i \in I$). Also ist $[\mathfrak{N}, \mathfrak{V}^*] = [\mathfrak{N}, \bigcap_{i \in I} \mathfrak{V}_i] \leqq \bigcap_{i \in I} \mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}^* = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathsf{Z}\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{N}\mathfrak{N}$ haben wir $\mathfrak{V}^* \leqq \mathsf{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} \leqq \mathfrak{N}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$.

Nach b) erfüllt $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}_i \mathfrak{S}_i \mathfrak{V}_i$ alle Bedingungen von Satz 2. Nun liefert die auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}_i \mathfrak{S}_i \mathfrak{V}_i$ angewandte Induktionsannahme $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}_i$ (für jedes $i \in I$), und also $\mathfrak{U} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{V}_i = \mathfrak{V}^* = \mathfrak{E}$.

d) Somit sei $\mathfrak{N}$ minimal.

Sei $\mathfrak{S} \leqq \mathsf{C}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{S} < \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{S} \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Wir zeigen $[\mathfrak{S}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$. Dazu führen wir eine Induktion nach $|\mathfrak{S}|$ durch. Der Fall $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ ist trivial. Also sei $\mathfrak{S} > \mathfrak{E}$. Setze $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{U}$. $\mathfrak{L}$ sei ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{N}$. Setze $\mathfrak{Z}/\mathfrak{L} = \mathsf{Z}(\mathfrak{N}/\mathfrak{L}) \cap \mathfrak{H}/\mathfrak{L}$. Wie in a) haben wir $\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{T} \leqq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{V} \leqq \mathsf{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V} \lhd \mathfrak{H}$.

e) Nun zeigen wir, daß $\mathfrak{H}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$ alle Bedingungen von Satz 2 erfüllt. Dabei entsprechen sich gegenseitig: $\mathfrak{G} \to \mathfrak{H}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$, $\mathfrak{N} \to \mathfrak{N}\mathfrak{T}\mathfrak{V}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$, $\mathfrak{N} \to \mathfrak{L}\mathfrak{S}\mathfrak{V}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$, $\mathfrak{U} \to \mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{U}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$, $\mathfrak{A} \to \mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}\mathfrak{A}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$. Es genügt wieder zu zeigen

$$\mathsf{Z}(\mathfrak{N}\mathfrak{T}\mathfrak{V}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}) \cap \mathfrak{H}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V} = \mathfrak{N}\mathfrak{T}\mathfrak{V}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V} \tag{1}$$

und

$$\mathsf{Z}(\mathfrak{L}\mathfrak{S}\mathfrak{V}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}) \cap \mathfrak{H}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V} \leqq \mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{V}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}. \tag{2}$$

Beweis von (1): geht genau so wie in b). Beweis von (2): Setze $\mathfrak{Z}'/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V} = \mathsf{Z}(\mathfrak{L}\mathfrak{S}\mathfrak{V}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}) \cap \mathfrak{H}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$. Ist $\mathfrak{Z}' \nleqq \mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{V}$, so existiert ein $NSU \in \mathfrak{Z}'$ mit $N \in \mathfrak{N}$, $S \in \mathfrak{S}$ und $U \in \mathfrak{U} - \mathfrak{V}$. Daraus folgt, wie in b), $SU \in \mathfrak{Z}'$. Da $\mathfrak{S}$ abelsch ist, so ist $\mathfrak{Z}' \geqq \mathfrak{S}$. Daher haben wir $U \in \mathfrak{Z}'$, also $[U, \mathfrak{L}\mathfrak{S}\mathfrak{V}] \leqq \mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$, insbesondere $[U, \mathfrak{S}] \leqq \mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$. Wegen $\mathfrak{U} \leqq \mathsf{N}\mathfrak{S}$ folgt $[U, \mathfrak{S}] \leqq \mathfrak{S} \cap \mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V} = \mathfrak{T}$. Ist $\mathfrak{T} < \mathfrak{S}$, so ist nach Induktionsannahme (nach $|\mathfrak{S}|$) $[U, \mathfrak{T}] = \mathfrak{E}$ und wegen $(|\langle U \rangle|, |\mathfrak{S}|) = 1$ folgt dann $[U, \mathfrak{S}] = \mathfrak{E}$. Nun folgt $\mathfrak{T} < \mathfrak{S}$ so: Wäre $\mathfrak{S} = \mathfrak{T}$, so wäre $\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{Z}$, also $[\mathfrak{N}, \mathfrak{S}] \leqq \mathfrak{L}$ und dann $\mathfrak{N}\mathfrak{S} \lhd \mathfrak{L}\mathfrak{S}$. Die Anwen-

dung des Satzes aus WIELANDT [*10*] gibt wie in c), $\mathfrak{R} = \mathfrak{L}(\mathfrak{N}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R})$ mit $\mathfrak{N}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} > \mathfrak{E}$ (wegen $\mathfrak{R} < \mathfrak{L}$). Wegen $\mathfrak{N}\mathfrak{S} \geqq \mathfrak{R}\mathfrak{U}$ folgt weiter $\mathfrak{N}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} \lhd \mathfrak{G}$ (da $\mathfrak{R}$ abelsch ist). Da $\mathfrak{R}$ minimal ist, folgt $\mathfrak{N}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$. Also haben wir $\mathfrak{N}\mathfrak{S} \geqq \mathfrak{R}\mathfrak{R}\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{S} \lhd \mathfrak{G}$. Daher gilt $[\mathfrak{R}, \mathfrak{S}] \leqq \mathfrak{R} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ folgt $\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{Z}\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{E}$, entgegen der Voraussetzung. Somit ist $\mathfrak{T} < \mathfrak{S}$.

Wegen $[U, \mathfrak{S}] = \mathfrak{E}$ ist U im größten p-Normalteiler $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{S}\mathfrak{U}$ enthalten. Wegen $\mathfrak{B} \lhd \mathfrak{S}\mathfrak{U}$ folgt $\mathfrak{R}\mathfrak{B} \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{S}\mathfrak{U} = \mathfrak{H}$. Es ist $\mathfrak{E} < \mathfrak{R}/\mathfrak{L} \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{R}\mathfrak{B}/\mathfrak{L}) \lhd \mathfrak{H}/\mathfrak{L}$. Da $\mathfrak{L}$ maximal ist, ist dann $\mathfrak{R}/\mathfrak{L} \leqq \mathfrak{Z}(\mathfrak{R}\mathfrak{B}/\mathfrak{L})$, $[\mathfrak{B}, \mathfrak{R}] \leqq \mathfrak{L}$ und daher $\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{Z} = \mathfrak{R}\mathfrak{T}\mathfrak{B}$. Somit folgt $\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{B}$, entgegen $U \in \mathfrak{B} - \mathfrak{B}$. Somit ist doch $\mathfrak{Z}' \leqq \mathfrak{L}\mathfrak{S}\mathfrak{B}$, also gilt (2). Nach Induktionsannahme folgt nun $\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{U} = \mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{B}$, das heißt, $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}$.

f) Es ist nun $\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{U} = \mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{B} \lhd \mathfrak{H} = \mathfrak{R}\mathfrak{S}\mathfrak{U}$, daher ist $\mathfrak{T}\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{S}\mathfrak{U}$. Wegen $[\mathfrak{U}, \mathfrak{T}] = \mathfrak{E}$ (nach Induktion) ist $\mathfrak{U}$ charakteristisch in $\mathfrak{T}\mathfrak{U}$, also folgt $\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{S}\mathfrak{U}$ und dann $[\mathfrak{S}, \mathfrak{U}] \leqq \mathfrak{S} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$.

g) Sei nun $\mathfrak{R}$ abelsch. Wir dürfen annehmen, daß $\mathfrak{R}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ ist. Denn angenommen, $\mathfrak{R}$ sei nicht minimal in $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$:

1. Ist $|\mathfrak{R}| = q^a r^b \ldots$, so ist $\mathfrak{R}(q) < \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}(q) \leqq \mathfrak{C}\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}(q) \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{U}$. Nach d) ist $[\mathfrak{R}(q), \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$ für alle q, somit haben wir $[\mathfrak{R}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{Z}\mathfrak{R} \leqq \mathfrak{R}\mathfrak{R}$ und daher $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$.

2. Also sei $|\mathfrak{R}| = q^a$. Dabei ist $q \neq p$. Setze $\mathfrak{B}_i = \{X \mid X \in \mathfrak{R}, X^{q^i} = E\}$. $(i = 1, 2, \ldots .)$ Ist $\mathfrak{B}_1 < \mathfrak{R}$, so ist nach d) $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$. Sei schon $[\mathfrak{B}_i, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$ gezeigt. Dann gilt für jedes $X \in \mathfrak{B}_{i+1}$: $X^q = U^{-1}X^qU \in \mathfrak{B}_i$ (für jedes $U \in \mathfrak{U}$), und daher $[U, X^{-1}]^q = \mathfrak{E}$, $[U, X^{-1}] \in \mathfrak{B}_1 \leqq \mathfrak{B}_i$. Also haben wir $[\mathfrak{U}, \mathfrak{B}_{i+1}] \leqq \mathfrak{B}_i$. Wegen $[\mathfrak{U}, \mathfrak{B}_i] = \mathfrak{E}$ und $(|\mathfrak{U}|, |\mathfrak{B}_{i+1}|) = 1$ folgt dann $[\mathfrak{B}_{i+1}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$. Somit gilt $[\mathfrak{R}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{Z}\mathfrak{R} \leqq \mathfrak{R}\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$[1]. Also sei $\mathfrak{R} = \mathfrak{B}_1$ elementar abelsch. Wir betrachten die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{R}$. Wegen $(|\mathfrak{U}|, |\mathfrak{R}|) = 1$ ist sie vollständig reduzibel, aber nicht irreduzibel, da $\mathfrak{R}$ nicht minimal ist. Also ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$, $\mathfrak{E} < \mathfrak{S} < \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{N}\mathfrak{S} \geqq \mathfrak{U}$, $\mathfrak{N}\mathfrak{T} \geqq \mathfrak{U}$. Nach d) ist nun $[\mathfrak{U}, \mathfrak{S}] = [\mathfrak{U}, \mathfrak{T}] = \mathfrak{E}$, also ist $[\mathfrak{U}, \mathfrak{R}] = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{Z}\mathfrak{R} \leqq \mathfrak{R}\mathfrak{R}$ und daher $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$.

h) Also sei $\mathfrak{R}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$. Angenommen, es gibt ein $E \neq U \in \mathfrak{U}$ und $E \neq R \in \mathfrak{R}$ mit $[U, R] = E$. Da $\mathfrak{U}$ abelsch ist, ist $\mathfrak{Z}U \geqq \mathfrak{U}$. Somit ist $\mathfrak{Z}U \cap \mathfrak{R}\mathfrak{U} = (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{Z}U)\mathfrak{U}$ und $E \neq R \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{Z}\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{U}$. Da $\mathfrak{R}$ minimal ist, folgt $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{Z}U = \mathfrak{R}$ und daher $U \in \mathfrak{Z}\mathfrak{R} \leqq \mathfrak{R}\mathfrak{R}$, also $U = E$, entgegen Voraussetzung. Also sind alle U ohne Fixpunkte. Da $\mathfrak{U}$ abelsch ist, ist somit $\mathfrak{U}$ nach einem Satz von BURNSIDE-ZASSENHAUS ([*11*], Satz 3) zyklisch [2].

[1]) Diese Schlußweise geht auf Herrn HUPPERT zurück. Meine ursprüngliche Schlußweise war umständlicher.

[2]) Hier möchten wir einen elementaren Beweis des zitierten Satzes angeben. Es genügt zu zeigen: Sei $\mathfrak{R}$ elementar abelsch vom Typ (q, q). Dann gibt es ein Element $R \neq E$ aus $\mathfrak{R}$, das mit einem Element $\neq E$ aus $\mathfrak{R}$ vertauschbar ist. Beweis. Angenommen, der Satz sei falsch. Sei $N \neq E$ ein Element von $\mathfrak{R}$. Setze $N^{\mathfrak{S}} = \prod_{S \in \mathfrak{S}} S^{-1}NS$ für jede Untergruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ der Ordnung q. Dann ist $N^{\mathfrak{S}}$ mit jedem S aus $\mathfrak{S}$ vertauschbar. Also ist $N^{\mathfrak{S}} = E$. Gleichfalls haben wir $N^{\mathfrak{R}} = \prod_{R \in \mathfrak{R}} R^{-1}NR = E$. Aber es ist $\prod_S N^{\mathfrak{S}} = N^{\mathfrak{R}}N^q$, wobei $\mathfrak{S}$ alle Untergruppen von $\mathfrak{R}$ durchläuft. Daraus folgt $N^q = E$ und daher $N = E$, entgegen der Voraussetzung.

i) Nun gilt der folgende HILFSSATZ (vgl. [7], Lemma 3):

Voraussetzungen. $\mathfrak{P}$ *sei eine endliche* p*-Gruppe mit folgenden Eigenschaften*: (i) $\mathfrak{P}$ *enthält einen elementar abelschen Normalteiler* $\mathfrak{N}$ *mit* $\mathsf{Z}\mathfrak{N}=\mathfrak{N}$. (ii) $\mathfrak{P}$ *enthält eine zyklische Untergruppe* $\mathfrak{U}$ *mit* $\mathfrak{P}=\mathfrak{N}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{U}=\mathfrak{E}$.

Behauptung. *Ist* $\mathfrak{A}$ *eine abelsche Untergruppe von* $\mathfrak{P}$ *mit der Eigenschaft*: $\mathfrak{P}=\mathfrak{A}\mathfrak{U}=\mathfrak{N}\mathfrak{A}$, *so gilt* $|\mathfrak{U}|\leqq p$ *für* $p>2$, *und* $|\mathfrak{U}|\leqq 4$ *für* $p=2$.

BEWEIS. Wir führen eine Induktion nach $|\mathfrak{P}|$ durch. Nun gilt zunächst $\mathsf{Z}\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$. Denn da $\mathfrak{A}$ abelsch ist, so ist $\mathsf{Z}\mathfrak{A}\geqq\mathfrak{A}$ und also $\mathsf{Z}\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(\mathsf{Z}\mathfrak{A}\cap\mathfrak{U})$. Ist $\mathsf{Z}\mathfrak{A}>\mathfrak{A}$, so ist $\mathsf{Z}\mathfrak{A}\cap\mathfrak{U}>\mathfrak{E}$. Da $\mathfrak{U}$ abelsch ist, so folgt $\mathsf{Z}(\mathsf{Z}\mathfrak{A}\cap\mathfrak{U})\geqq\mathfrak{U}$. Da $\mathfrak{A}$ abelsch ist, so ist auch $\mathsf{Z}(\mathsf{Z}\mathfrak{A}\cap\mathfrak{U})\geqq\mathfrak{A}$, und wegen $\mathfrak{P}=\mathfrak{A}\mathfrak{U}$ folgt $\mathsf{Z}(\mathsf{Z}\mathfrak{A}\cap\mathfrak{U})=\mathfrak{P}$. Daraus folgt nach (i) $\mathsf{Z}\mathfrak{A}\cap\mathfrak{U}\leqq\mathsf{C}\mathfrak{P}\leqq\mathsf{Z}\mathfrak{N}=\mathfrak{N}$ und daher nach (ii) $\mathsf{Z}\mathfrak{A}\cap\mathfrak{U}=\mathfrak{E}$, entgegen der Voraussetzung. Somit ist $\mathsf{Z}\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$.

Nun sei $\mathfrak{C}\lhd\mathfrak{P}$ mit $|\mathfrak{C}|=p$. Wegen $\mathsf{Z}\mathfrak{N}=\mathfrak{N}$ ist dann $\mathfrak{C}\leqq\mathfrak{N}$ und wegen $\mathsf{Z}\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$ ist dann auch $\mathfrak{C}\leqq\mathfrak{A}$. Setze $\mathfrak{Z}/\mathfrak{C}=\mathsf{C}(\mathfrak{P}/\mathfrak{C})$ und $\mathfrak{U}'=\mathfrak{U}\cap\mathfrak{Z}$. Wegen $[\mathfrak{P},\mathfrak{Z}]\leqq\mathfrak{C}$ ist dann $\mathfrak{C}\mathfrak{U}'\lhd\mathfrak{P}$.

Wir zeigen, daß $\mathfrak{P}/\mathfrak{C}\mathfrak{U}'$ alle Bedingungen des Hilfssatzes erfüllt. Dabei entsprechen sich gegenseitig: $\mathfrak{P}\to\mathfrak{P}/\mathfrak{C}\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{N}\to\mathfrak{N}\mathfrak{C}\mathfrak{U}'/\mathfrak{C}\mathfrak{U}'=\mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{C}\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{U}\to\mathfrak{U}\mathfrak{C}\mathfrak{U}'/\mathfrak{C}\mathfrak{U}'=\mathfrak{C}\mathfrak{U}/\mathfrak{C}\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{U}'/\mathfrak{C}\mathfrak{U}'=\mathfrak{A}\mathfrak{U}'/\mathfrak{C}\mathfrak{U}'$. Es genügt zu zeigen

$$\mathfrak{N}\mathfrak{U}'\cap\mathfrak{C}\mathfrak{U}=\mathfrak{C}\mathfrak{U}' \tag{1}$$

und

$$\mathsf{Z}(\mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{C}\mathfrak{U}')=\mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{C}\mathfrak{U}'. \tag{2}$$

Beweis von (1): Sei $X\in\mathfrak{N}\mathfrak{U}'\cap\mathfrak{C}\mathfrak{U}$. Dann existieren Elemente $N\in\mathfrak{N}$, $U'\in\mathfrak{U}'$, $C\in\mathfrak{C}$ und $U\in\mathfrak{U}$ mit $X=NU'=CU$. Daraus folgt $C^{-1}N=UU'^{-1}\in\mathfrak{N}\cap\mathfrak{U}=\mathfrak{E}$ (nach (ii)). Also ist $X=CU'\in\mathfrak{C}\mathfrak{U}'$. Beweis von (2): Da $\mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{C}\mathfrak{U}'$ abelsch ist, folgt $\mathsf{Z}(\mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{C}\mathfrak{U}')\geqq\mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{C}\mathfrak{U}'$. Ist $\mathsf{Z}(\mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{C}\mathfrak{U}')>\mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{C}\mathfrak{U}'$, so existiert ein $X\in\mathfrak{U}-\mathfrak{U}'$ mit $[\mathfrak{N}\mathfrak{U}',X]\leqq\mathfrak{C}\mathfrak{U}'$, insbesondere $[\mathfrak{N},X]\leqq\mathfrak{C}\mathfrak{U}'$. Wegen $\mathfrak{N}\lhd\mathfrak{P}$ (nach (i)) folgt $[\mathfrak{N},X]\leqq\mathfrak{N}\cap\mathfrak{C}\mathfrak{U}'=\mathfrak{C}$ (nach (ii)). Da $\mathfrak{U}$ abelsch ist, folgt $[\mathfrak{P},X]=[\mathfrak{U}\mathfrak{N},X]=[\mathfrak{N},X]\leqq\mathfrak{C}$, das heißt, $X\in\mathfrak{Z}$ und daher $X\in\mathfrak{Z}\cap\mathfrak{U}=\mathfrak{U}'$, entgegen der Voraussetzung. Somit ist doch $\mathsf{Z}(\mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{C}\mathfrak{U}')=\mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{C}\mathfrak{U}'$, also gilt (2). Nach Induktionsannahme folgt nun $|\mathfrak{U}\mathfrak{C}/\mathfrak{U}'\mathfrak{C}|=|\mathfrak{U}/\mathfrak{U}'|\leqq p$ für $p>2$ und $|\mathfrak{U}/\mathfrak{U}'|\leqq 4$ für $p=2$. Ist $\mathfrak{U}'=\mathfrak{E}$, dann sind wir fertig. Also sei $\mathfrak{U}'>\mathfrak{E}$.

Nun setze $\mathfrak{V}=\{X^p\,|\,X\in\mathfrak{U}'\mathfrak{C}\}$. Da $\mathfrak{U}'\mathfrak{C}$ direktes Produkt von $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{C}$ ist und wegen $|\mathfrak{C}|=p$ folgt $\mathfrak{V}\leqq\mathfrak{U}'$. Da $\mathfrak{V}$ charakteristisch in $\mathfrak{U}'\mathfrak{C}$ ist, ist $\mathfrak{V}\lhd\mathfrak{P}$. Wegen $\mathsf{Z}\mathfrak{N}=\mathfrak{N}$ folgt daraus $\mathfrak{V}=\mathfrak{E}$, also da $\mathfrak{U}$ zyklisch ist, $|\mathfrak{U}'|=p$. Somit gilt $|\mathfrak{U}|\leqq p^2$ für $p>2$ und $|\mathfrak{U}|\leqq 8$ für $p=2$. Ist $|\mathfrak{U}|<p^2$ für $p\neq 2$ und $|\mathfrak{U}|<8$ für $p=2$, so sind wir fertig. Alxo sei $|\mathfrak{U}|=p^2$ für $p>2$ und $|\mathfrak{U}|=8$ für $p=2$.

Ist $\mathsf{C}\mathfrak{P}$ nicht zyklisch, so existiert $\mathfrak{C}'\lhd\mathfrak{P}$ mit $|\mathfrak{C}'|=p$ und $\mathfrak{C}'\neq\mathfrak{C}$. Nun gilt dasselbe mit $\mathfrak{C}'$ anstatt $\mathfrak{C}$. Setze $\mathfrak{Z}'/\mathfrak{C}'=\mathsf{C}(\mathfrak{P}/\mathfrak{C}')$ und $\mathfrak{U}''=\mathfrak{U}\cap\mathfrak{Z}'$. Dann ist (wie oben) $\mathfrak{C}'\leqq\mathfrak{N}\cap\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}'\mathfrak{U}''\lhd\mathfrak{P}$ und es gilt der Hilfssatz für $\mathfrak{P}/\mathfrak{C}'\mathfrak{U}''$. Also folgt wieder $|\mathfrak{U}/\mathfrak{U}''|\leqq p$ für $p>2$ und $|\mathfrak{U}/\mathfrak{U}''|\leqq 4$ für $p=2$. Wegen $|\mathfrak{U}|=p^2$ für $p>2$ und $|\mathfrak{U}|=8$ für $p=2$ ist $\mathfrak{U}''>\mathfrak{E}$, also (wie oben) $|\mathfrak{U}''|=p$.

Da $\mathfrak{U}$ zyklisch ist, folgt $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}''$. Wegen $\mathfrak{C}' \leqq \mathfrak{N}$ gilt nun $\mathfrak{C}\mathfrak{U}' \cap \mathfrak{C}'\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}' \lhd \mathfrak{P}$. Wegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ ist dann $\mathfrak{U}' \leqq \mathfrak{C}\mathfrak{P} \leqq \mathfrak{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ und daher $\mathfrak{U}' \leqq \mathfrak{U} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$, entgegen Voraussetzung. Somit ist $\mathfrak{C}\mathfrak{P}$ zyklisch.

Wegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ und da $\mathfrak{N}$ elementar abelsch ist, ist $|\mathfrak{C}\mathfrak{P}| = p$. Wegen $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A} \leqq \mathfrak{C}\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{C} \leqq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}$ folgt $\mathfrak{C} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{C}\mathfrak{P}$. Nun ist nach dem Isomorphiesatz $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{P}/\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{A}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}$. Wegen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U} \leqq \mathfrak{C}\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ folgt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$. Also gilt $|\mathfrak{A}| = \mathfrak{P} : \mathfrak{U} = |\mathfrak{N}|$. Daraus ergibt sich $|\mathfrak{N}| = p^3$ für $p > 2$ und $|\mathfrak{N}| = 16$ für $p = 2$.

Wegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ wird $\mathfrak{U}$ treu dargestellt als eine Untergruppe von $GL(m, p)$ mit $m = 3$ für $p > 2$ und $m = 4$ für $p = 2$. Nun bildet die Menge aller Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

eine p-Sylowgruppe von $GL(m, p)$ (vgl. SCHREIER [9]). Nach dem Sylowschen Satz dürfen wir annehmen, daß jede Matrix von $\mathfrak{U}$ diese Gestalt hat. Setze

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E + \begin{pmatrix} 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt offenbar

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^r = 0$$

für jedes $r \geqq m$. Sei $p > 2$ und also $m = 3$. Dann folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^p = E + \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^p = E$$

(wegen $p \geqq 3$), entgegen Voraussetzung. Sei $p = 2$ und also $m = 4$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4 = E + \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 = E,$$

entgegen der Voraussetzung.

j) Nach den Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt die Untergruppe $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ unserer Gruppe $\mathfrak{G}$ die Bedingungen des Hilfssatzes. Wegen $p > 2$ gilt nach dem Hilfssatze also $|\mathfrak{U}| \leqq p$.

k) (ohne Minimalität von $\mathfrak{R}$). Man darf annehmen

(R). Es gibt keine echte Untergruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ mit $\mathbf{N}\mathfrak{S} \geqq \mathfrak{U}$ und $\mathbf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{H} \leqq \mathfrak{R}\mathfrak{S}$, wobei $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}\mathfrak{S}\mathfrak{U}$ gesetzt wird.

Denn $\mathfrak{H}$ erfüllt alle Bedingungen von Satz 2 und man kann die Induktionsannahme auf $\mathfrak{H}$ anwenden.

Insbesondere enthält $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ keinen echten Normalteiler $\mathfrak{X}$, der $\mathfrak{U}$ enthält. Denn sei $\mathfrak{X}$ ein solcher Normalteiler von $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$. Setze $\mathfrak{S} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{R}$. Dann erfüllt $\mathfrak{S}$ die Bedingungen in (R). Nämlich wegen $\mathfrak{R} \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{U}$ folgt $\mathfrak{S} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{X} \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{U}$, also $\mathbf{N}\mathfrak{S} \geqq \mathfrak{U}$. Wegen $\mathfrak{U} < \mathfrak{X} \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{U}$ folgt $R^{-1}\mathfrak{U}R \leqq \mathfrak{X}$ (für jedes $R \in \mathfrak{R}$). Daraus folgt nach dem Sylowschen Satz $\mathfrak{R}\mathfrak{U} = \mathfrak{X}(\mathbf{N}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{R}\mathfrak{U}) = \mathfrak{S}(\mathbf{N}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{R}\mathfrak{U})$ und $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}(\mathbf{N}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{R}) = \mathfrak{S}(\mathbf{Z}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{R})$. Nun sei $\mathbf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{H} \nleqq \mathfrak{R}\mathfrak{S}$ $(\mathfrak{H} = \mathfrak{R}\mathfrak{S}\mathfrak{U})$. Dann existiert ein $NSU \in \mathbf{Z}\mathfrak{S}$ mit $N \in \mathfrak{R}$, $S \in \mathfrak{S}$ und $E \neq U \in \mathfrak{U}$. Wegen $[NSU, \hat{S}] = (SU)^{-1}[N, \hat{S}]\, SU[SU, \hat{S}] = E$, $(SU)^{-1}[N, \hat{S}]\, SU \in \mathfrak{R}$ und $[SU, \hat{S}] \in \mathfrak{R}\mathfrak{U}$ (für jedes $\hat{S} \in \mathfrak{S}$) folgt $[SU, \hat{S}] \in \mathfrak{R}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{E}$ (für jedes $\hat{S} \in \mathfrak{S}$), also $SU \in \mathbf{Z}\mathfrak{S}$. Nun gilt $[SU, S] = [U, S] = E$. Wegen $(|\mathfrak{U}|, |\mathfrak{R}|) = 1$ folgt $U \in \langle SU \rangle$, also $U \in \mathbf{Z}\mathfrak{S}$. Wegen $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}(\mathbf{Z}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{R})$ folgt also $U \in \mathbf{Z}\mathfrak{R}$, entgegen $\mathbf{Z}\mathfrak{R} \leqq \mathfrak{R}\mathfrak{R}$.

l). Nun sei $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}] \neq \mathfrak{E}$.

Dann ist $\mathbf{C}\mathfrak{R} < \mathfrak{R}$, also gilt nach d) $[\mathbf{C}\mathfrak{R}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$. Angenommen, es gebe $E \neq R \in \mathbf{C}\mathfrak{R}$ und $E \neq N \in \mathfrak{R}$ mit $[R, N] = E$ gibt. Dann ist $\mathbf{Z}R \geqq \mathfrak{R}$ und $\mathbf{Z}R \geqq \mathfrak{U}$, also folgt $\mathbf{Z}R = (\mathfrak{R} \cap \mathbf{Z}R)\,\mathfrak{R}\mathfrak{U}$. Wegen $E \neq N \in \mathfrak{R} \cap \mathbf{Z}\mathfrak{R} \lhd \mathfrak{G}$ und der Minimalität von $\mathfrak{R}$ folgt $\mathbf{Z}\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$, also $R \in \mathbf{Z}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$. Daraus folgt $R = E$, entgegen Voraussetzung. Also wird $\mathbf{C}\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{R}$ ohne Fixpunkte dargestellt, ist daher nach einem Satz von BURNSIDE-ZASSENHAUS ([*11*], Satz 3) zyklisch.

m) Wir zeigen, daß unter der Bedingung (R) $\mathfrak{R}/\mathbf{C}\mathfrak{R}$ minimal in $\mathfrak{R}\mathfrak{U}/\mathbf{C}\mathfrak{R}$ ist. Angenommen, daß $\mathfrak{R}/\mathbf{C}\mathfrak{R}$ nicht minimal in $\mathfrak{R}\mathfrak{U}/\mathbf{C}\mathfrak{R}$ ist. Sei $\mathfrak{S}/\mathbf{C}\mathfrak{R}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{R}\mathfrak{U}/\mathbf{C}\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}/\mathbf{C}\mathfrak{R}$. Setze $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}\mathfrak{S}\mathfrak{U}$. Sei $\mathfrak{L}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{R}$. Setze $\mathfrak{Z}/\mathfrak{L} = \mathbf{Z}(\mathfrak{R}/\mathfrak{L}) \cap \mathfrak{H}/\mathfrak{L}$. Wie in a) folgt $\mathfrak{Z} = \mathfrak{R}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{T} \leqq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{V} \leqq \mathbf{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V} \lhd \mathfrak{H}$. Wie in b) können wir zeigen, daß $\mathfrak{H}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$ die Bedingungen von Satz 2 erfüllt. Dabei entsprechen sich gegenseitig: $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}\mathfrak{T}\mathfrak{V}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$, $\mathfrak{R} \to \mathfrak{L}\mathfrak{S}\mathfrak{V}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$, $\mathfrak{U} \to \mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{U}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$, $\mathfrak{A} \to \mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}\mathfrak{A}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$. Nun liefert die auf $\mathfrak{H}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$ angewandte Induktionsannahme $\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{U} = \mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$, also $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}$.

n) Nach unserer Annahme gilt $\mathbf{C}\mathfrak{R} < \mathfrak{S}$, also $\mathbf{Z}\mathfrak{S} \geqq \mathfrak{R}$.

Fall A: $\mathbf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} \nleqq \mathfrak{S}$. Da $\mathfrak{S}$ maximal und $\mathfrak{S}(\mathbf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}) \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{U}$ ist, folgt $\mathfrak{S}(\mathbf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}) = \mathfrak{R}$. Nun ist $\mathfrak{Z} = \mathfrak{R}\mathfrak{T}\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{S}\mathfrak{U} = \mathfrak{H}$ [nach m)], also $\mathfrak{T} \lhd \mathfrak{S}$. Daraus folgt weiter $\mathfrak{T} \lhd \mathfrak{S}(\mathbf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}) = \mathfrak{R}$. Angenommen $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{E}$. Da $[\mathfrak{R}, \mathfrak{T}] \leqq \mathfrak{L}$ ist, so ist $\mathfrak{L}\mathfrak{T} \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{T}$. Da alle $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{L}\mathfrak{T}$, nach einem Satz von WIELANDT

[*10*] miteinander konjugiert sind, folgt wie in c) $\mathfrak{N}\mathfrak{T} = \mathfrak{L}\mathfrak{T}(\mathfrak{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{T}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{T})$. Daraus folgt $\mathfrak{N} = \mathfrak{L}(\mathfrak{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N})$ mit $\mathfrak{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N} > \mathfrak{E}$ [wegen $\mathfrak{N} > \mathfrak{L}$]. Wegen $\mathfrak{T} \lhd \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{T} \lhd \mathfrak{S}\mathfrak{U}$ ist $\mathfrak{N}\mathfrak{T} \geqq \mathfrak{N}\mathfrak{U}$, also $\mathfrak{N}\mathfrak{T} = (\mathfrak{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N})\,\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{E} < \mathfrak{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$ (da $\mathfrak{N}$ abelsch ist). Da $\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt daraus $\mathfrak{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$. Somit ist $\mathfrak{N}\mathfrak{T} = \mathfrak{G}$, daher $[\mathfrak{N}, \mathfrak{T}] = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{T} \leqq \mathfrak{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}$, entgegen Voraussetzung. Somit ist $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}$. Dann folgt $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{S}\mathfrak{U}$, also $[\mathfrak{S}, \mathfrak{U}] \leqq \mathfrak{S} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$. Dann wird $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ zu einem echten Normalteiler von $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$, der $\mathfrak{U}$ enthält, entgegen (R).

Fall B: Sei $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N} \leqq \mathfrak{S}$. Wegen $\mathfrak{S} \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ ist dann $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{U}$, also ist $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{U}$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Es gilt $[\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{U}, \mathfrak{S}] = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N} \leqq \mathfrak{S}$ ist daher $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} = (\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}) \times (\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{U})$ (direktes Produkt). Da also $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{U}$ der größte p-Normalteiler von $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ ist, folgt $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{U} \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{U}$, also $[\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{U}, \mathfrak{N}] \leqq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{U} \leqq \mathfrak{Z}\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{N}\mathfrak{N}$. Somit haben wir $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$. Nun sei $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{H} \leqq \mathfrak{N}\mathfrak{S}$ $(\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{U})$. Dann folgt wie in k) $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{H} \cap \mathfrak{S}\mathfrak{U} = \mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{S}$, entgegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$. Daher ist $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{H} \leqq \mathfrak{N}\mathfrak{S}$. Also wird $\mathfrak{S}$ eine echte Untergruppe von $\mathfrak{N}$, die die Bedingung in (R) erfüllt, entgegen (R).

o) Also sei $\mathfrak{N}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$ minimal in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$. Dann ist $\mathfrak{N}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$ eine elementar abelsche q-Gruppe (q: Primzahl $\neq p$). Setze $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(q) \times \mathfrak{S}$ (direktes Produkt; $\mathfrak{S}$; q-Sylowkomplement). Wegen $\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{C}\mathfrak{N}$ gilt $[\mathfrak{S}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{N}(q) \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ ist dann $\mathfrak{Z}\big(\mathfrak{N}(q)\big) \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{U}$, also ist $\mathfrak{Z}\big(\mathfrak{N}(q)\big) \cap \mathfrak{U}$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{Z}\big(\mathfrak{N}(q)\big) \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Es gilt $[\mathfrak{N}(q), \mathfrak{Z}\big(\mathfrak{N}(q)\big) \cap \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$. Wegen $[\mathfrak{S}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$ folgt dann $[\mathfrak{N}, \mathfrak{Z}\big(\mathfrak{N}(q)\big) \cap \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$. Daraus folgt weiter $\mathfrak{Z}\big(\mathfrak{N}(q)\big) \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{Z}\big(\mathfrak{N}(q)\big) \cap \mathfrak{H} \leqq \mathfrak{N}\mathfrak{N}(q)$ [wie in n), Fall B]. Also wird $\mathfrak{N}(q)$ einer Untergruppe von $\mathfrak{N}$, die die Bedingung in (R) erfüllt. Nach (R) haben wir $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(q)$.

Wir betrachten die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{N}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$. Angenommen, es gebe $E \neq U \in \mathfrak{U}$ und $R \in \mathfrak{N} - \mathfrak{C}\mathfrak{N}$ mit $[U, R] \in \mathfrak{C}\mathfrak{N}$. Wegen $[\mathfrak{C}\mathfrak{N}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$ und $(|\mathfrak{U}|, |\mathfrak{N}|) = 1$ folgt $[U, R] = E$. Da $\mathfrak{U}$ abelsch ist, folgt $\mathfrak{Z}U \geqq \mathfrak{U}$, also $\mathfrak{Z}U \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} = (\mathfrak{Z}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N})\,U$ mit $\mathfrak{Z}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N} \ni R \notin \mathfrak{N} - \mathfrak{C}\mathfrak{N}$. Wegen $\mathfrak{Z}U \cap \mathfrak{N} \geqq \mathfrak{C}\mathfrak{N}$ folgt $\mathfrak{Z}U \cap \mathfrak{N} \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Da $\mathfrak{N}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt dann $\mathfrak{Z}U \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$, also $U \in \mathfrak{Z}\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{N}\mathfrak{N}$, daher $U = E$, entgegen Voraussetzung. Also sind alle U ohne Fixpunkte, da $\mathfrak{U}$ abelsch ist; somit ist $\mathfrak{U}$, nach einem Satz von Burnside-Zassenhaus ([*11*], Satz 3) zyklisch. Also haben wir nach dem Hilfssatz in i) $|\mathfrak{U}| \leqq p$ (wegen $p > 2$).

p) Sei $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} > \mathfrak{E}$ und $X \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Setze $X = A = RU$ mit $A \in \mathfrak{A}$, $R \in \mathfrak{N}$, $U \in \mathfrak{U}$. Dann folgt $A\,U^{-1} = R$. Wegen $\mathfrak{A}\mathfrak{U} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ (nach Voraussetzung) und $(|\mathfrak{N}|, p) = 1$ folgt daraus $A\,U^{-1} = R = E$, $X = A = U$ und daher $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U} > \mathfrak{E}$. Da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{U}$ abelsch sind, folgt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U} \lhd \mathfrak{A}\mathfrak{U} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Also ist $[\mathfrak{N}, \mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}] \leqq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{A} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ folgt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U} \leqq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$, entgegen Voraussetzung. Also gilt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$.

Damit gilt $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{N}|$ und $\mathfrak{A}/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A} \cong \mathfrak{N}\mathfrak{A}/\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{U}$. Wegen $|\mathfrak{U}| \leqq p$ [vgl. j) und o)] ist $|\mathfrak{A}/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}| = |\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}| \leqq p$.

Setze $|\mathfrak{N}| = p^n$.

Ist $n = 1$, so ist $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{C}(\mathfrak{N}\mathfrak{U})$, $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$, also $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$.

Ist $n > 2$, so setze $\mathfrak{U} = \langle U \rangle$. Angenommen $U \notin \mathbf{Z}\mathfrak{N}$ (sonst ist $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$). Es ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A} \leqq \mathbf{C}(\mathfrak{N}\mathfrak{U})$: Denn $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}$ wird zentralisiert von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{A}$, also von $\mathfrak{N}\mathfrak{A} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Wegen $\mathbf{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ nicht abelsch. Also gilt $\mathfrak{N} \nleqq \mathbf{Z}\mathfrak{U}$ und $\mathbf{C}(\mathfrak{N}\mathfrak{U}) = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}$.

Setze $\mathfrak{N} = (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}) \times \langle N^* \rangle$ und $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A} = \langle N_1 \rangle \times \langle N_2 \rangle \times \cdots$.

(**) Ist $E \neq R \in \mathfrak{N}$, so gilt für $E \neq N \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}$ niemals $[N, R] = E$.

Denn sei $[N, R] = E$. Wegen $N \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}$ folgt dann $\mathbf{Z}N \geqq \mathfrak{N}$ und $\mathbf{Z}N \geqq \mathfrak{U}$. Also ist $\mathbf{Z}N = \mathfrak{N}(\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N})\,\mathfrak{U}$ mit $\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N} \ni R$ nach Annahme.

Fall A: $\mathfrak{N}$ sei abelsch. Es ist dann $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{N}$ minimal [nach g)]. Wegen $N \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{A} \leqq \mathbf{Z}U$ gilt $U^{-1}\mathbf{Z}NU = \mathbf{Z}U^{-1}NU = \mathbf{Z}N$. Also gilt $E \neq R \in \mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N} \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{U} = \mathfrak{N}\langle U \rangle$. Somit folgt nun $\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ und $\langle N \rangle \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt dann $\mathfrak{N} = \langle N \rangle$ und $n = 1$, entgegen Voraussetzung.

Fall B: $\mathfrak{N}$ sei nicht abelsch. Wie im Fall A ist $E \neq R \in \mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N} = U^{-1}(\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N})\,U$. Da $\mathfrak{N}/\mathbf{C}\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathbf{C}\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt dann entweder $\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N} \leqq \mathbf{C}\mathfrak{N}$ oder $\mathfrak{N} = \mathbf{C}\mathfrak{N}(\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N})$. Sei $\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N} \leqq \mathbf{C}\mathfrak{N}$. Wegen $[\mathbf{C}\mathfrak{N}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$ folgt $\mathbf{Z}(\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N}) \geqq \mathfrak{N}$ und $\mathbf{Z}(\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N}) \geqq \mathfrak{U}$, also $\mathbf{Z}(\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N}) = (\mathfrak{N} \cap \mathbf{Z}(\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N}))\,\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ mit $E \neq N \in \mathfrak{N} \cap \mathbf{Z}(\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N}) \lhd \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt dann $\mathfrak{N} \cap \mathbf{Z}(\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$, $\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N} \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$. Daraus $\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N} \leqq \mathbf{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$, entgegen der Voraussetzung. Somit ist $\mathfrak{N} = \mathbf{C}\mathfrak{N}(\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N})$. Es gilt nun $\mathbf{Z}(\mathbf{Z}N \cap \mathbf{C}\mathfrak{N}) \geqq \mathfrak{N}$ und $\mathbf{Z}(\mathbf{Z}N \cap \mathbf{C}\mathfrak{N}) \geqq \mathfrak{U}$, also $\mathbf{Z}(\mathbf{Z}N \cap \mathbf{C}\mathfrak{N}) = (\mathfrak{N} \cap \mathbf{Z}(\mathbf{Z}N \cap \mathbf{C}\mathfrak{N}))\,\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ mit $E \neq N \in \mathfrak{N} \cap \mathbf{Z}(\mathbf{Z}N \cap \mathbf{C}\mathfrak{N}) \lhd \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt jetzt $\mathfrak{N} = \mathfrak{N} \cap \mathbf{Z}(\mathbf{Z}N \cap \mathbf{C}\mathfrak{N})$, $\mathbf{Z}N \cap \mathbf{C}\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$ und daraus $\mathbf{Z}N \cap \mathbf{C}\mathfrak{N} \leqq \mathbf{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} \leqq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$. Also haben wir $\mathfrak{N} = \mathbf{C}\mathfrak{N} \times (\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N})$. Wegen $\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N} > \mathfrak{E}$ und $\mathbf{Z}N \cap \mathfrak{N} \lhd \mathfrak{N}$ folgt andererseits $\mathbf{Z}N \cap \mathbf{C}\mathfrak{N} > \mathfrak{E}$. Das ist ein Widerspruch.

Wegen $\mathbf{Z}\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{N}\mathfrak{N}$ existiert $E \neq R \in \mathfrak{N}$ mit $[R, U] \neq E$. Setze $R^{-1}N_1R = N'N^{*u_1}$ und $R^{-1}N_2R = N''N^{*u_2}$ mit $N', N'' \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}$. Ist $N^{*u_1} = E$, so ist $R^{-1}N_1R = N'$ und $U^{-1}R^{-1}N_1RU = N'$. Mit $RU = UR_1$ gilt $R_1 \neq R$. Also ist $N' = U^{-1}R^{-1}N_1RU = (UR_1)^{-1}N_1(UR_1) = R_1^{-1}N_1R_1 = R^{-1}N_1R$, also $E \neq RR_1^{-1} \in \mathbf{Z}N_1$, entgegen (**). Also ist $N^{*u_1} \neq E$. Dann existiert eine Zahl v mit $u_1 v \equiv u_2 \pmod{p}$. Nun ist $R^{-1}N_1^vR = N'^vN^{*u_1}$ und $R^{-1}N_1^vN_2^{-1}R = N'^vN''^{-1}$ mit $N_1^vN_2^{-1}$, $N'^1N''^{-1} \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}$, entgegen (**). Somit doch ist $n = 2$.

q) Nun ist $n = 2$. Wegen $\mathbf{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ wird $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ treu auf $\mathfrak{N}$ dargestellt, $\mathfrak{N}\mathfrak{U} \leqq GL(2, p)$. Wegen $|\mathfrak{U}| = p$ folgt $[\mathfrak{N}\mathfrak{U}, \mathfrak{N}\mathfrak{U}] \leqq \mathfrak{N}$. Wegen $\mathbf{Z}\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{N}\mathfrak{N}$ ist ferner $[\mathfrak{N}\mathfrak{U}, \mathfrak{N}\mathfrak{U}] \neq \mathfrak{E}$.

Sei $\mathfrak{N}$ abelsch. Da dann $\mathfrak{N}$ minimal in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ ist, so folgt $\mathfrak{N} = [\mathfrak{N}\mathfrak{U}, \mathfrak{N}\mathfrak{U}] \leqq SL(2, p)$.

Sei $\mathfrak{N}$ nicht abelsch. Sei $[\mathfrak{N}\mathfrak{U}, \mathfrak{N}\mathfrak{U}] \leqq \mathbf{C}\mathfrak{N}$. Dann ist insbesondere $[\mathfrak{N}, \mathfrak{U}] \leqq \mathbf{C}\mathfrak{N}$. Wegen $[\mathbf{C}\mathfrak{N}, \mathfrak{U}] = E$ und $(|\mathfrak{N}|, |\mathfrak{U}|) = 1$ folgt dann $[\mathfrak{N}, \mathfrak{U}] = E$, $\mathfrak{U} \leqq \mathbf{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$, entgegen $|\mathfrak{U}| = p$. Somit ist $[\mathfrak{N}\mathfrak{U}, \mathfrak{N}\mathfrak{U}] \nleqq \mathbf{C}\mathfrak{N}$. Da $\mathfrak{N}/\mathbf{C}\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathbf{C}\mathfrak{N}$ minimal ist, so folgt $\mathfrak{N} = [\mathfrak{N}\mathfrak{U}, \mathfrak{N}\mathfrak{U}]\,\mathbf{C}\mathfrak{N}$. Daraus folgt, wie in o), daß $[\mathfrak{N}\mathfrak{U}, \mathfrak{N}\mathfrak{U}]$ einer Untergruppe von $\mathfrak{N}$ wird, die die Bedingung in (R) erfüllt. Nach (R) haben wir $\mathfrak{N} = [\mathfrak{N}\mathfrak{U}, \mathfrak{N}\mathfrak{U}] \leqq SL(2, p)$.

Sei $q>2$: Dann ist $\mathfrak{R}$ zyklisch. Da $\mathfrak{R}$ elementar abelsch ist ($\mathfrak{R}$ ist minimal in $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$), ist also $|\mathfrak{R}|=q$. Nun gilt $q\equiv 1 \pmod p$ (in $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ gibt es qp-Sylowgruppen), und $p^2\equiv 1 \pmod q$ (in $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$ gibt es p^2q-Sylowgruppen). (Denn sonst ist $\mathsf{N}\mathfrak{R}=(\mathfrak{N}\cap\mathsf{N}\mathfrak{R})\,\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{E}<\mathfrak{N}\cap\mathsf{N}\mathfrak{R}<\mathfrak{N}$, entgegen der Minimalität von $\mathfrak{N}$.) Also gilt $q-1=ap$, $p^2-1=bq$, $p^2-1=b(ap+1)$. Dann folgt $b\equiv -1 \pmod p$, $b=cp-1$, $p^2-1=(cp-1)(ap+1)$. Angenommen $c>1$. Dann folgt $cp-1\geqq 2p-1>p+1$ (wegen $p>2$) und $p^2-1>(p+1)\times(ap+1)$. Das ist ein Widerspruch. Somit ist $c=1$, $b=p-1$, $p+1=q$, $p=2$, entgegen $p>2$.

Sei $q=2$: Sei $\mathfrak{R}$ abelsch. $SL(2,p)$ hat nur eine Involution, daher ist $|\mathfrak{R}|=2$, $\mathfrak{R}\leqq\mathsf{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U})$, entgegen $\mathsf{Z}\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{N}\mathfrak{R}$. Somit ist $\mathfrak{R}$ nicht abelsch, also ist $\mathfrak{R}$ eine verallgemeinerte Quaternionengruppe $\mathfrak{Q}$. Für $|\mathfrak{Q}|>8$ hat $\mathfrak{Q}$ keinen Automorphismus der Ordnung $p\neq 2$ (vgl. [*12*], s. 111). Also ist $|\mathfrak{Q}|=8$ und dann $p=3$, entgegen $p>3$.

Damit ist der Beweis von Satz 2 beendet.

§ 2. Beweis von Satz 1

Wegen $\mathsf{Z}\mathfrak{N}\geqq\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N}$: abelsch) ist $\mathsf{Z}\mathfrak{N}=\mathfrak{N}(\mathfrak{M}\cap\mathsf{Z}\mathfrak{N})$. Wegen $\mathfrak{M}\cap\mathsf{Z}\mathfrak{N}\lhd\mathfrak{M}$ und $[\mathfrak{M}\cap\mathsf{Z}\mathfrak{N},\mathfrak{N}]=\mathfrak{E}$ wird $\mathfrak{M}\cap\mathsf{Z}\mathfrak{N}\lhd\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{M}$ keinen Normalteiler ($>\mathfrak{E}$) von $\mathfrak{G}$ enthält, folgt $\mathfrak{M}\cap\mathsf{Z}\mathfrak{N}=\mathfrak{E}$, also $\mathsf{Z}\mathfrak{N}=\mathfrak{N}$. Sei $\mathfrak{R}$ das Radikal (der größte nilpotente Normalteiler) von $\mathfrak{M}$. Dann ist $(|\mathfrak{R}|,p)=1$. Denn sonst wäre $\mathfrak{R}(p)>\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{N}\mathfrak{R}(p)\lhd\mathfrak{G}$. Dann ist auch $\mathfrak{E}<\mathsf{C}\big(\mathfrak{N}\mathfrak{R}(p)\big)\cap\mathfrak{N}\lhd\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt $\mathsf{C}\big(\mathfrak{N}\mathfrak{R}(p)\big)\cap\mathfrak{N}=\mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}(p)\leqq\mathsf{Z}\mathfrak{N}=\mathfrak{N}$, also $\mathfrak{R}(p)=\mathfrak{E}$, entgegen der Voraussetzung. Nach einem Satz von FITTING ([*2*]) ist $\mathsf{Z}\mathfrak{R}\cap\mathfrak{M}\leqq\mathfrak{R}$. Ist $\mathsf{Z}\mathfrak{R}\nleqq\mathfrak{R}$, so ist dann $\mathsf{Z}\mathfrak{R}\nleqq\mathfrak{M}$, also $\mathsf{N}\mathfrak{R}\nleqq\mathfrak{M}$. Wegen $\mathfrak{R}\lhd\mathfrak{M}$ folgt $\mathsf{N}\mathfrak{R}\geqq\mathfrak{M}$ und also $\mathsf{N}\mathfrak{R}=(\mathsf{N}\mathfrak{R}\cap\mathfrak{N})\,\mathfrak{M}$ mit $\mathsf{N}\mathfrak{R}\cap\mathfrak{N}>\mathfrak{E}$. Da $\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt $\mathsf{N}\mathfrak{R}\cap\mathfrak{N}=\mathfrak{N}$, $\mathsf{N}\mathfrak{R}=\mathfrak{G}$. Also haben wir $[\mathfrak{N},\mathfrak{R}]\leqq\mathfrak{N}\cap\mathfrak{R}=\mathfrak{E}$, $\mathfrak{R}\leqq\mathsf{Z}\mathfrak{N}=\mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}=\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}=\mathfrak{E}$. Daraus folgt insbesondere $\mathfrak{A}=\mathfrak{N}$. Somit sei $\mathsf{Z}\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{R}$. Setze $\mathfrak{N}\mathfrak{A}=\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{N}\mathfrak{A}\cap\mathfrak{M}=\mathfrak{U}$. Dann ist $\mathfrak{N}\mathfrak{A}/\mathfrak{N}\cong\mathfrak{A}/\mathfrak{N}\cap\mathfrak{A}\cong\mathfrak{U}$, also ist $\mathfrak{U}$ abelsch. Damit erfüllen das Produkt $\mathfrak{N}\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ und die Untergruppen $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{A}$ die sämtlichen Bedingungen von Satz 2. Nach Satz 2 gilt also unsere Behauptung $\mathfrak{U}=\mathfrak{E}$, also $\mathfrak{A}=\mathfrak{N}$.

§ 3. Zusätze zu Satz 1 und 2

SATZ 3. *Satz 1 gilt für* $p=3$ *unter der Bedingung, daß die 2-Sylowgruppe des Radikals* $\mathfrak{R}$ *von* $\mathfrak{M}$ *abelsch ist.*

Dazu (wie in Satz 1) genügt es zu beweisen

SATZ 4. *Satz 2 gilt für* $p=3$ *unter der zusätzlichen Bedingung, daß die 2-Sylowgruppe von* $\mathfrak{R}$ *abelsch ist.*

BEWEIS. Im Beweise von Satz 2 wird die Bedingung $p>3$ benötigt nur in q), § 1, und zwar unter der Annahme, daß $\mathfrak{R}$ eine nicht abelsche 2-Gruppe ist.

SATZ 5. *Satz 1 gilt für* $p=2$ *unter der Bedingung, daß die Ordnung des Radikals* $\mathfrak{R}$ *von* $\mathfrak{M}$ *prim zu* 3 *ist.*

Dazu (wie in Satz 1) genügt es zu beweisen

SATZ 6. *Satz 2 gilt für $p=2$ unter der zusätzlichen Bedingung, daß die Ordnung von $\mathfrak{R}$ prim zu 3 ist.*

BEWEIS. Im Beweise von Satz 2 wird die Bedingung $p>2$ benötigt an vielen Stellen:

1. In j), § 1: Aus dem Hilfssatz in i), § 1 folgt nur $|\mathfrak{U}| \leqq 4$ (anstatt $|\mathfrak{U}| \leqq 2$).

2. In o), § 1: Aus dem Hilfssatz in i), § 1 folgt nur $|\mathfrak{U}| \leqq 4$ (anstatt $|\mathfrak{U}| \leqq 2$).

3. Sei $\mathfrak{U}=\mathfrak{E}$. Dann sind wir fertig. Also sei $|\mathfrak{U}|=2$. Dann ist die Bedingung $p>2$ in q), § 1 mit $q>2$ benötigt. Doch in diesem Falle ist $q=3$. Wegen unserer Annahme kommt dieser Fall nicht vor. Sei schließlich $|\mathfrak{U}|=4$. Dann ist in p), § 1 $|\mathfrak{A}/\mathfrak{R}\cap\mathfrak{A}|=|\mathfrak{R}/\mathfrak{R}\cap\mathfrak{A}|=|\mathfrak{U}|=4$.

Setze $|\mathfrak{R}|=2^n$. Sei $n>4$. Setze $\mathfrak{R}=(\mathfrak{R}\cap\mathfrak{A})\times\langle N_1^*\rangle\times\langle N_2^*\rangle$ und $\mathfrak{R}\cap\mathfrak{A}=\langle N_1\rangle\times\langle N_2\rangle\times\langle N_3\rangle\times\cdots$. Wie in p), § 1 gilt (**). Wegen $\mathsf{Z}\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{N}\mathfrak{R}$ existiert $E\neq R\in\mathfrak{R}$ mit $[R,U]\neq E$ ($\mathfrak{U}=\langle U\rangle$). Setze $R^{-1}N_1R=N'N_1^{*u_{11}}N_2^{*u_{12}}$, $R^{-1}N_2R=N''N_1^{*u_{21}}N_2^{*u_{22}}$, $R^{-1}N_3R=\hat{N}N_1^{*u_{31}}N_2^{*u_{32}}$ mit $N', N'', \hat{N}\in\mathfrak{R}\cap\mathfrak{A}$. Dann gibt es ganze Zahlen c_1, c_2, c_3, die nicht alle gerade sind, mit $c_1u_{11}+c_2u_{21}+c_3u_{31}\equiv 0 \pmod 2$, $c_1u_{12}+c_2u_{22}+c_3u_{32}\equiv 0 \pmod 2$. Dann folgt $R^{-1}\times N_1^{c_1}N_2^{c_2}N_3^{c_3}R=N'^{c_1}N''^{c_2}\hat{N}^{c_3}$ mit $E\neq N_1^{c_1}N_2^{c_2}N_3^{c_3}$, $N'^{c_1}N''^{c_2}\hat{N}^{c_3}\in\mathfrak{R}\cap\mathfrak{A}$. Daraus folgt ein Widerspruch zu (**) [vgl. p), § 1]. Somit ist $n\leqq 4$.

Ist $n=1$, so ist dann $\mathfrak{R}\leqq\mathsf{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U})$, $\mathfrak{U}\leqq\mathsf{Z}\mathfrak{R}=\mathfrak{R}$, also $\mathfrak{U}=\mathfrak{E}$, entgegen $|\mathfrak{U}|=4$. Sei $n=2$. Wegen $\mathsf{Z}\mathfrak{R}=\mathfrak{R}$ wird $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ treu auf $\mathfrak{R}$ dargestellt, $\mathfrak{R}\mathfrak{U}\leqq GL(2,2)$. Wegen $|GL(2,2)|=6$ folgt $|\mathfrak{U}|\leqq 2$, entgegen $|\mathfrak{U}|=4$. Sei $n=3$. Dann wird $\mathfrak{R}\mathfrak{U}\leqq GL(3,2)$. Wegen $|GL(3,2)|=168$ und $(|\mathfrak{R}|,3)=1$ folgt $q=7$. Wegen $|\mathsf{N}(GL(3,2)(7))|=21$ kommt dieser Fall nicht vor. Sei schließlich $n=4$. Dann wird $\mathfrak{R}\mathfrak{U}\leqq GL(4,2)$. Wegen $|GL(4,2)|=2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$ und $(|\mathfrak{R}|,3)=1$ folgt entweder $q=7$ oder $q=5$. Sei $|\mathfrak{R}|=q=7$. Wegen $7\not\equiv 1 \pmod 4$, $\mathsf{Z}\mathfrak{R}\cap\mathfrak{R}\mathfrak{U}\leqq\mathfrak{R}$ und $|\mathfrak{U}|=4$ kommt dieser Fall nicht vor. Somit ist $|\mathfrak{R}|=q=5$. $\mathsf{N}(GL(4,2)(5))$ ist auflösbar und hat die Ordnung 60. Jede Untergruppe der Ordnung 20 von $GL(4,2)$ ist nach dem Sylowschen Satz in einem $\mathsf{N}(GL(4,2)(5))$ enthalten. Alle Untergruppen der Ordnung 20 von $\mathsf{N}(GL(4,2)(5))$ sind, nach einem Satz von P. HALL [4], miteinander konjugiert. Also sind alle Untergruppen der Ordnung 20 von $GL(4,2)$ miteinander konjugiert. Nun erzeugen

$$R=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0,\end{pmatrix},\qquad U=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

eine Untergruppe der Ordnung 20. Sei $(a,b,c,d)\in\mathfrak{R}$. Aus $(a,b,c,d)U=(a,b,c,d)$ folgt $a=b=c=d$. Also haben wir $|\mathsf{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U})|=2$, entgegen $|\mathsf{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U})|\geqq|\mathfrak{R}\cap\mathfrak{A}|=4$.

Damit ist der Beweis von Satz 6 beendet.

§ 4. Der Fall $p = 2$

Obgleich Satz 1 für $p \leqq 3$ im allgemeinen nicht mehr richtig ist, kann man doch über die Struktur von $\mathfrak{A}$ etwas sagen. Die folgenden Sätze 7 und 8 werden für $p \leqq 3$ ausgesprochen. Aber für $p = 3$ werden wir in § 5 stärkere Sätze beweisen.

Satz 7. Voraussetzung: Wie in Satz 1. Behauptung: *Für $p \leqq 3$ ist der Exponent von $\mathfrak{A}$ höchstens p^2.*

Dazu (wie bei Satz 1) genügt es zu beweisen

Satz 8. Voraussetzung: $p \leqq 3$. Alle anderen Bedingungen sind wie in Satz 2. Behauptung: *Ist $\mathfrak{A}$ eine abelsche Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{N}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{N}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{U} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}$, so ist $\mathfrak{U}$ elementar abelsch und der Exponent von $\mathfrak{A}$ höchstens p^2.*

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion nach $|\mathfrak{G}|$ geführt.

a) Es gilt $\mathfrak{N}\mathfrak{A}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A} \cong \mathfrak{U}$. Da $\mathfrak{N}$ elementar abelsch ist, ist insbesondere $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}$ elementar abelsch. Wenn also $\mathfrak{U}$ elementar abelsch ist, ist der Exponent von $\mathfrak{A}$ höchstens p^2. Also genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{U}$ elementar abelsch ist.

b) $\mathfrak{N}$ sei nicht minimal. Sei $\{\mathfrak{L}_i, i \in I\}$ die Menge aller maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{N}$. Wegen der Nichtminimalität von $\mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{L}_i > \mathfrak{E}$. Setze $\mathfrak{Z}_i/\mathfrak{L}_i = \mathbf{Z}(\mathfrak{N}/\mathfrak{L}_i)$. Wie in a), § 1 ist $\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{N}\mathfrak{S}_i\mathfrak{V}_i$ mit $\mathfrak{S}_i \leqq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{V}_i \leqq \mathbf{N}\mathfrak{S}_i \cap \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{V}_i \lhd \mathfrak{G}$. Wie in b), § 1 erfüllt $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{V}_i$ (für jedes $i \in I$) alle Bedingungen von Satz 8. Die auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{V}_i$ angewandte Induktionsannahme liefert, daß $\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{U}/\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{V}_i \cong \mathfrak{U}/\mathfrak{V}_i$ (für jedes $i \in I$) elementar abelsch ist. Nun setze $\mathfrak{L}^* = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{L}_i$, $\mathfrak{S}^* = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{S}_i$, $\mathfrak{V}^* = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{V}_i$. Wie in c), § 1 gilt $\mathfrak{V}^* = \mathfrak{E}$. Damit wird $\mathfrak{U}$ elementar abelsch.

c) Daher sei $\mathfrak{N}$ minimal. Nun wie in k), § 1 darf man annehmen

(R). Es gibt keine echte Untergruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{N}$ mit $\mathbf{N}\mathfrak{S} \geqq \mathfrak{U}$ und $\mathbf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{H} \leqq \mathfrak{N}\mathfrak{S}$, wobei $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{U}$ gesetzt wird.

Setze $q = 2$ für $p = 3$ und $q = 3$ für $p = 2$. Setze $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(q) \times \mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S}$: q-Sylowkomplement). Ist $\mathfrak{N}(q) = \mathfrak{E}$, so erfüllt $\mathfrak{G}$ die Bedingungen von Satz 4 oder Satz 6. Dann wird $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ nach Satz 4 oder Satz 6. Somit sei $\mathfrak{N}(q) > \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{N} > \mathfrak{S}$.

Wir zeigen $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$. Dazu zeigen wir zunächst $[\mathfrak{U}, \mathfrak{S}] = \mathfrak{E}$. Setze $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{U}$. Sei $\mathfrak{L}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{N}$. Setze $\mathfrak{Z}/\mathfrak{L} = \mathbf{Z}(\mathfrak{N}/\mathfrak{L}) \cap \mathfrak{H}/\mathfrak{L}$. Wie in a), § 1 gilt $\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{T} \leqq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{V} \leqq \mathbf{N}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V} \lhd \mathfrak{H}$. Wie in b), § 1 erfüllt $\mathfrak{H}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$ alle Bedingungen von Satz 4 oder Satz 6. Also nach Satz 4 oder Satz 6 haben wir $\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{U} = \mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$, also $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}$. Wegen $\mathfrak{T} \lhd \mathfrak{S}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{T} \leqq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(q) \times \mathfrak{S}$ folgt $\mathfrak{T} \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Somit haben wir $\mathbf{N}\mathfrak{T} \geqq \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ und $\mathbf{N}\mathfrak{T} = (\mathbf{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N})\,\mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Wegen $[\mathfrak{N}, \mathfrak{T}] \leqq \mathfrak{L}$ folgt $\mathfrak{L}\mathfrak{T} \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{T}$. Wie in c), § 1 unter Anwendung eines Satzes aus Wielandt [*10*] erhalten wir $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N})\,\mathfrak{L}$ mit $\mathbf{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N} > \mathfrak{E}$ (wegen $\mathfrak{N} > \mathfrak{L}$). Da $\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt $\mathbf{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$. Daraus folgt $\mathfrak{T} \lhd \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{T} \leqq \mathbf{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{T}\mathfrak{V} = \mathfrak{T}\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{S}\mathfrak{U}$ ist daher $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}\mathfrak{V} \lhd \mathfrak{S}\mathfrak{U}$, $[\mathfrak{U}, \mathfrak{S}] \leqq \mathfrak{S} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$. Wie in o), § 1 wird dann $\mathfrak{N}(q)$

eine Untergruppe von $\mathfrak{R}$, die die Bedingung in (R) erfüllt. Nach (R) haben wir $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}(q)$, $\mathfrak{S}=\mathfrak{E}$.

d) Somit sei $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}(q)$.

Sei $\mathfrak{R}$ nicht abelsch. Wir zeigen, daß man annehmen darf, daß $\mathfrak{R}/\mathsf{C}\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}\mathfrak{U}/\mathsf{C}\mathfrak{R}$ minimal ist. Angenommen, daß $\mathfrak{R}/\mathsf{C}\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}\mathfrak{U}/\mathsf{C}\mathfrak{R}$ nicht minimal ist. Sei $\mathsf{C}\mathfrak{R}<\mathfrak{S}<\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}\lhd\mathfrak{R}\mathfrak{U}$. Setze $\mathfrak{S}^*=\mathfrak{S}(\mathsf{Z}\mathfrak{S}\cap\mathfrak{R})$. Dann gilt $\mathsf{Z}\mathfrak{S}^*\cap\mathfrak{R}\leqq\mathsf{Z}\mathfrak{S}\cap\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{S}^*$. Dann [wie in n), § 1 Fall B] wird $\mathfrak{S}^*$ einer Untergruppe von $\mathfrak{R}$, die die Bedingung in (R) erfüllt. Nach (R) haben wir also $\mathfrak{S}^*=\mathfrak{S}(\mathsf{Z}\mathfrak{S}\cap\mathfrak{R})=\mathfrak{R}$.

Setze $\mathfrak{H}=\mathfrak{R}\mathfrak{S}\mathfrak{U}$. Sei $\mathfrak{L}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{R}$. Setze $\mathfrak{Z}/\mathfrak{L}=\mathsf{Z}(\mathfrak{R}/\mathfrak{L})\cap\mathfrak{H}/\mathfrak{L}$. Wie in a), § 1 gilt $\mathfrak{Z}=\mathfrak{R}\mathfrak{T}\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{T}\leqq\mathfrak{S}$, $\mathfrak{V}\leqq\mathsf{N}\mathfrak{T}\cap\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}\lhd\mathfrak{H}$. Wegen $\mathfrak{R}=\mathfrak{S}(\mathsf{Z}\mathfrak{S}\cap\mathfrak{R})$ folgt, wie in c), $\mathfrak{T}=\mathfrak{E}$. Dann folgt weiter $\mathfrak{V}=\mathfrak{T}\mathfrak{V}\lhd\mathfrak{S}\mathfrak{U}$, $[\mathfrak{S},\mathfrak{V}]=\mathfrak{E}$. Wie in b), § 1 erfüllt $\mathfrak{H}/\mathfrak{L}\mathfrak{T}\mathfrak{V}=\mathfrak{H}/\mathfrak{L}\mathfrak{V}$ die Bedingungen von Satz 8. Die auf $\mathfrak{H}/\mathfrak{L}\mathfrak{V}$ angewandte Induktionsannahme liefert, daß $\mathfrak{L}\mathfrak{U}/\mathfrak{L}\mathfrak{V}\cong\mathfrak{U}/\mathfrak{V}$ elementar abelsch ist.

Setze $\mathfrak{S}'=\mathsf{Z}\mathfrak{S}\cap\mathfrak{R}$. Wegen $\mathsf{Z}\mathfrak{S}'\cap\mathfrak{R}\geqq\mathfrak{S}$ folgt $\mathfrak{S}'(\mathsf{Z}\mathfrak{S}'\cap\mathfrak{R})=\mathfrak{R}$. Wegen $\mathsf{C}\mathfrak{R}<\mathfrak{S}$ folgt $\mathfrak{S}'<\mathfrak{R}$. Setze $\mathfrak{H}'=\mathfrak{R}\mathfrak{S}'\mathfrak{U}$. Sei $\mathfrak{L}'$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{R}$. Setze $\mathfrak{Z}'/\mathfrak{L}'=\mathsf{Z}(\mathfrak{R}/\mathfrak{L}')\cap\mathfrak{H}'/\mathfrak{L}'$. Wie in a), § 1 gilt $\mathfrak{Z}'=\mathfrak{R}\mathfrak{T}'\mathfrak{V}'$ mit $\mathfrak{T}'\leqq\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{V}'\leqq\mathsf{N}\mathfrak{T}'\cap\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{L}'\mathfrak{T}'\mathfrak{V}'\lhd\mathfrak{H}'$. Genau so wie oben gilt $[\mathfrak{S}',\mathfrak{V}']=\mathfrak{E}$ und daß $\mathfrak{U}/\mathfrak{V}'$ elementar abelsch ist.

Wegen $[\mathfrak{S},\mathfrak{V}]=[\mathfrak{S}',\mathfrak{V}']=\mathfrak{E}$ folgt $[\mathfrak{S}\mathfrak{S}',\mathfrak{V}\cap\mathfrak{V}']=[\mathfrak{R},\mathfrak{V}\cap\mathfrak{V}']=\mathfrak{E}$. Wegen $\mathsf{Z}\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{R}\mathfrak{R}$ folgt $\mathfrak{V}\cap\mathfrak{V}'\leqq\mathsf{Z}\mathfrak{R}\cap\mathfrak{U}\leqq\mathfrak{R}\mathfrak{R}\cap\mathfrak{U}=\mathfrak{E}$. Dann wird $\mathfrak{U}$ elementar abelsch.

e) Somit sei $\mathfrak{R}/\mathsf{C}\mathfrak{R}$ minimal in $\mathfrak{R}\mathfrak{U}/\mathsf{C}\mathfrak{R}$. Bezeichne $\mathsf{F}\mathfrak{R}$ die Frattinigruppe von $\mathfrak{R}$. Wir zeigen, daß wir annehmen $\mathsf{C}\mathfrak{R}=\mathsf{F}\mathfrak{R}$ dürfen. Da $\mathfrak{R}/\mathsf{C}\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}\mathfrak{U}/\mathsf{C}\mathfrak{R}$ minimal ist, ist $\mathfrak{R}/\mathsf{C}\mathfrak{R}$ elementar abelsch, also ist $\mathsf{C}\mathfrak{R}\geqq\mathsf{F}\mathfrak{R}$. Sei $\mathsf{C}\mathfrak{R}>\mathsf{F}\mathfrak{R}$. Dann betrachten wir die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{R}/\mathsf{F}\mathfrak{R}$. Wegen $(p,q)=1$ ist sie vollständig reduzibel. Also haben wir $\mathfrak{R}/\mathsf{F}\mathfrak{R}=\mathsf{C}\mathfrak{R}/\mathsf{F}\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}/\mathsf{F}\mathfrak{R}$ mit $\mathsf{N}\mathfrak{S}\geqq\mathfrak{U}$. Nimm $\mathsf{C}\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ anstatt $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ in d). Dann kann man genau so wie in d) schließen, daß $\mathfrak{U}$ elementar abelsch wird.

f) Somit sei $\mathsf{F}\mathfrak{R}=\mathsf{C}\mathfrak{R}$. Wir betrachten die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{R}/\mathsf{F}\mathfrak{R}$. Angenommen, daß für ein $E\neq U\in\mathfrak{U}$ und $R\in\mathfrak{R}-\mathsf{F}\mathfrak{R}$ $[R,U]\in\mathsf{F}\mathfrak{R}$ gilt. Da $\mathfrak{U}$ abelsch ist, folgt dann für jedes $U'\in\mathfrak{U}$ $[U'^{-1}RU',U]\in\mathsf{F}\mathfrak{R}$. Da $\mathfrak{R}/\mathsf{F}\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}\mathfrak{U}/\mathsf{F}\mathfrak{R}$ minimal ist, folgt $[U,\mathfrak{R}]\leqq\mathsf{F}\mathfrak{R}$. Nun ist $\langle U\rangle$ eine p-Sylowgruppe von $\mathsf{F}\mathfrak{R}\langle U\rangle$. Nach dem Sylowschen Satz sind alle p-Sylowgruppen von $\mathsf{F}\mathfrak{R}\langle U\rangle$ miteinander konjugiert. Wegen $[U,\mathfrak{R}]\leqq\mathsf{F}\mathfrak{R}$ folgt $\mathsf{F}\mathfrak{R}\langle U\rangle\lhd\mathfrak{R}\langle U\rangle$. Also haben wir $\mathfrak{R}=\mathsf{F}\mathfrak{R}(\mathfrak{R}\langle U\rangle\cap\mathfrak{R})$ [vgl. c), § 1]. Daraus folgt $\mathfrak{R}=\mathsf{N}\langle U\rangle\cap\mathfrak{R}=\mathsf{Z}U\cap\mathfrak{R}$ (wegen $\mathfrak{R}\lhd\mathfrak{R}\langle U\rangle$), also $U\in\mathsf{Z}\mathfrak{R}$. Wegen $\mathsf{Z}\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{R}\mathfrak{R}$ folgt $U=E$, entgegen Voraussetzung. Also sind alle $U\neq E$ ohne Fixpunkte. Also, da $\mathfrak{U}$ abelsch ist, ist es nach einem Satz von BURNSIDE-ZASSENHAUS ([11], Satz 3) zyklisch. Dann erhalten wir mit dem Hilfssatz in i), § 1 $|\mathfrak{U}|\leqq3$ oder $|\mathfrak{U}|\leqq4$. Sei also $|\mathfrak{U}|=4$. Sonst sind wir fertig.

g) Sei $\mathfrak{R}$ abelsch. Ist $p=3$, dann erfüllt $\mathfrak{G}$ die Bedingung von Satz 4. Also haben wir nach Satz 4 $\mathfrak{U}=\mathfrak{E}$. Somit sei $p=2$ ($q=3$). Sei $\mathfrak{R}/\mathsf{F}\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}\mathfrak{U}/\mathsf{F}\mathfrak{R}$ nicht minimal. Dann betrachten wir die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{R}/\mathsf{F}\mathfrak{R}$. Sie ist vollständig reduzibel ($p=2$, $q=3$). Also haben wir $\mathfrak{R}/\mathsf{F}\mathfrak{R}=\mathfrak{S}/\mathsf{F}\mathfrak{R}\times\mathfrak{T}/\mathsf{F}\mathfrak{R}$ mit $\mathsf{F}\mathfrak{R}<\mathfrak{S}<\mathfrak{R}$, $\mathsf{N}\mathfrak{S}\geqq\mathfrak{U}$ und $\mathsf{N}\mathfrak{T}\geqq\mathfrak{U}$. Nimm $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ anstatt $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ in d). Dann kann man genau so wie in d) schließen, daß $\mathfrak{U}$ elementar abelsch ist. Somit sei $\mathfrak{R}/\mathsf{F}\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}\mathfrak{U}/\mathsf{F}\mathfrak{R}$ minimal. Dann sind wie in f) alle $U\neq E$ auf $\mathfrak{R}/\mathsf{F}\mathfrak{R}$ ohne Fixpunkte. Also wird $\mathfrak{U}$ wieder zyklisch von der Ordnung $\leqq 4$. Sei also $|\mathfrak{U}|=4$. Sonst sind wir fertig.

h) Nun gilt

(***) Ist $R\in\mathfrak{R}-\mathsf{F}\mathfrak{R}$, so gilt für $E\neq N\in\mathfrak{R}\cap\mathfrak{A}$ niemals $[N,R]=E$.

Denn sei $[N,R]=E$. Wegen $N\in\mathfrak{R}\cap\mathfrak{A}\leqq\mathsf{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U})\leqq\mathsf{Z}\mathfrak{U}$ folgt $[N,U^{-1}\times RU]=E$ (für jedes $U\in\mathfrak{U}$). Setze $\mathfrak{S}\mathfrak{U}=\langle R,\mathfrak{U}\rangle$ mit $\mathfrak{R}\geqq\mathfrak{S}\ni R$. Dann folgt $[\mathfrak{S},N]=E$. Da $\mathfrak{R}/\mathsf{F}\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}\mathfrak{U}/\mathsf{F}\mathfrak{R}$ minimal ist und wegen $\mathfrak{S}\ni R\in\mathfrak{R}-\mathsf{F}\mathfrak{R}$, folgt $\mathfrak{S}\,\mathsf{F}\mathfrak{R}=\mathfrak{R}$, also $\mathfrak{S}=\mathfrak{R}$. Daraus folgt $\langle N\rangle\lhd\mathfrak{R}\mathfrak{R}\mathfrak{U}=\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{R}$ minimal ist, so ist $\mathfrak{R}=\langle N\rangle$. Wegen $\mathsf{Z}\mathfrak{R}=\mathfrak{R}$ und $[N,\mathfrak{U}]=E$ folgt $\mathfrak{U}=\mathfrak{E}$, entgegen $|\mathfrak{U}|=4$.

Setze $|\mathfrak{R}|=2^n$.

Sei $n>4$. Setze $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}\cap\mathfrak{A}\times\langle N_1^*\rangle\times\langle N_2^*\rangle$ und $\mathfrak{R}\cap\mathfrak{A}=\langle N_1\rangle\times\langle N_2\rangle\times\langle N_3\rangle\times\cdots$ [vgl. Beweis von Satz 6, (3)]. Setze $\mathfrak{U}=\langle U\rangle$. Sei $R\in\mathfrak{R}-\mathsf{F}\mathfrak{R}$. Dann gilt nach f) und g) $RU=UR_1$ mit $RR_1^{-1}\notin\mathsf{F}\mathfrak{R}$. Wie im Beweis von Satz 6, (3) haben wir: $R^{-1}N_1^{c_1}N_2^{c_2}N_3^{c_3}R=N'^{c_1}N''^{c_2}\hat{N}^{c_3}$ mit nicht lauter geraden ganzen Zahlen c_1, c_2, c_3 und N', N'', $\hat{N}\in\mathfrak{R}\cap\mathfrak{A}$. Weiter gilt wie in p), § 1, $RR_1^{-1}\in\mathsf{Z}(N_1^{c_1}N_2^{c_2}N_3^{c_3})$, entgegen (***). Somit ist $n\leqq 4$.

Wegen $\mathsf{Z}\mathfrak{R}=\mathfrak{R}$ wird $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ treu auf $\mathfrak{R}$ dargestellt, $\mathfrak{R}\mathfrak{U}\leqq GL(n,2)$. Wegen $|\mathfrak{U}|=4$ und $\mathsf{Z}\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{R}\mathfrak{R}$ folgt $|\mathfrak{R}|\geqq 9$. Wegen $|GL(n,2)|\not\equiv 0\pmod 9$ mit $n\leqq 3$ muß $n=4$ sein. $GL(4,2)$ (3) ist elementar abelsch und hat die Ordnung 9. Also ist $\mathfrak{R}=GL(4,2)$ (3) und $\mathsf{F}\mathfrak{R}=\mathfrak{E}$. Nach dem Sylowschen Satz sind alle $GL(4,2)$ (3) miteinander konjugiert. Also darf man annehmen, daß $\mathfrak{R}$ durch

$$R_1=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad R_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Da U^2 auf $\mathfrak{R}$ ohne Fixpunkt ist, ist $X=Y$ äquivalent mit $U^2X^{-1}U^2X=U^2Y^{-1}U^2Y$ ($X,Y\in\mathfrak{R}$). Andererseits gilt $U^2(U^2X^{-1}U^2X)\,U^2=(U^2X^{-1}U^2X)^{-1}$. Für jedes $X\in\mathfrak{R}$ gilt also $U^2XU^2=X^{-1}$. Insbesondere haben wir $U^2R_1U^2=R_1^{-1}$ und $U^2R_2U^2=R_2^{-1}$. Daraus folgt, daß U^2 die folgende Gestalt hat:

$$U^2=\begin{pmatrix}A&&0&0\\&&0&0\\0&0&&\\0&0&&D\end{pmatrix}$$

mit $A, D \in GL(2, 2)$, $|A| = |D| = 2$. Daraus folgt $|\mathbf{Z}U^2 \cap \mathfrak{N}| = 4$. Wegen $\mathbf{C}(\mathfrak{N}\mathfrak{U}) \leqq \mathfrak{N}$ und $4 \leqq |\mathbf{C}(\mathfrak{N}\mathfrak{U})|$ folgt $\mathbf{Z}U^2 \cap \mathfrak{N} = \mathbf{C}(\mathfrak{N}\mathfrak{U}) = \mathbf{Z}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}$. Wegen der Gestalt von U^2 ist $\mathbf{C}(\mathfrak{N}\mathfrak{U}) = \langle (a, b, 0, 0), (0, 0, c, d) \rangle$ mit irgendwelchen $(a, b) \neq 0 \neq (c, d)$. Es gilt $(0, 0, c, d) R_1 = (0, 0, c, d)$. Wegen $(0, 0, c, d) \in \mathbf{C}(\mathfrak{N}\mathfrak{U})$ folgt $(0, 0, c, d) U^{-1}RU = (0, 0, c, d)$. Da $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ minimal ist, folgt $[(0, 0, c, d), \mathfrak{N}] = \mathfrak{E}$, $\langle (0, 0, c, d) \rangle \lhd \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{N}$ minimal ist, haben wir $\mathfrak{N} = \langle (0, 0, c, d) \rangle$ und $n = 1$, entgegen der Voraussetzung.

Damit ist der Beweis von Satz 8 vollendet.

§ 5. Der Fall $p = 3$

SATZ 9. Voraussetzung: Wie in Satz 1. Behauptung: *Für $p = 3$ ist $\mathfrak{A}$ elementar abelsch.*

Dazu genügt es zu beweisen

SATZ 10. Voraussetzung: $p = 3$. Alle anderen Bedingungen sind wie in Satz 2. Behauptung: *Ist $\mathfrak{A}$ eine abelsche 3-Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{N}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{N}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{U} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}$, so ist die Klasse der 3-Gruppe $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ höchstens 2 und $\mathfrak{A}$ elementar abelsch.*

BEWEIS. Der Beweis wird durch Induktion nach $|\mathfrak{G}|$ geführt.

a) Nach Satz 8 ist $\mathfrak{U}$ elementar abelsch. Ist die Klasse von $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ höchstens 2, so ist $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ regulär (P. HALL [3], Corollary 4.13). Da $\mathfrak{N}$ auch elementar abelsch ist, ist daher der Exponent von $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ gleich 3 (P. HALL [3], Theorem 4.26). Wegen $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ ist $\mathfrak{A}$ elementar abelsch. Also braucht man nur zu zeigen, daß die Klasse von $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ höchstens 2 ist.

b) Wie in k), § 1 darf man annehmen

(R) $\mathfrak{N}$ enthält keine echte Untergruppe $\mathfrak{S}$ mit $\mathbf{N}\mathfrak{S} \geqq \mathfrak{U}$ und $\mathbf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{H} \leqq \mathfrak{N}\mathfrak{S}$ $(\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{U})$.

c) Sei $\mathfrak{N}$ minimal.

Setze $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}(2) \times \mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S}$: 2-Sylowkomplement). Wie in c), § 4 haben wir $[\mathfrak{S}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ und daher $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}(2)$ [nach (R)]. Ist $\mathfrak{N}$ abelsch, dann erfüllt $\mathfrak{G}$ die Bedingung von Satz 4 und wir haben nach Satz 4 $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$. Somit sei $\mathfrak{N}$ nicht abelsch.

d) Wir zeigen $[\mathbf{C}\mathfrak{N}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$. Setze $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathbf{C}\mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Sei $\mathfrak{L}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{N}$. Setze $\mathfrak{Z}/\mathfrak{L} = \mathbf{Z}(\mathfrak{N}/\mathfrak{L}) \cap \mathfrak{H}/\mathfrak{L}$. Wie in a), § 1 haben wir $\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{S} \leqq \mathbf{C}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{V} \leqq \mathbf{N}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{L}\mathfrak{S}\mathfrak{V} \lhd \mathfrak{H}$.

Wegen $\mathfrak{S} \leqq \mathbf{C}\mathfrak{N}$ folgt $\mathbf{N}\mathfrak{S} \geqq \mathfrak{N}$. Wegen $\mathfrak{S}\mathfrak{V} \lhd \mathbf{C}\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ folgt $\mathbf{N}\mathfrak{S} \geqq \mathfrak{U}$. Also haben wir $\mathbf{N}\mathfrak{S} = (\mathbf{N}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N})\mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Nun gilt $\mathfrak{L}\mathfrak{S} \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{S}$. Mit dem Satz von SYLOW erhalten wir $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N})\mathfrak{L}$ mit $\mathbf{N}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N} > \mathfrak{E}$ (wegen $\mathfrak{L} < \mathfrak{N}$) [vgl. k), § 1]. Da $\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt $\mathfrak{N} = \mathbf{N}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}$, also $\mathfrak{S} \lhd \mathfrak{G}$ und daraus $\mathfrak{S} \leqq \mathbf{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$. Also haben wir $\mathfrak{V} = \mathfrak{S}\mathfrak{V} \lhd \mathbf{C}\mathfrak{N}\mathfrak{U}$.

Wie in b), § 1 erfüllt $\mathfrak{H}/\mathfrak{L}\mathfrak{S}\mathfrak{V}$ alle Bedingungen von Satz 4. Nach Satz 4 haben wir dann $\mathfrak{L}\mathfrak{S}\mathfrak{U} = \mathfrak{L}\mathfrak{S}\mathfrak{V}$, daher $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}$. Somit ist $\mathfrak{U} \lhd \mathbf{C}\mathfrak{N}\mathfrak{U}$, also $[\mathfrak{U}, \mathbf{C}\mathfrak{N}] \leqq \mathfrak{U} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$.

e) Bezeichne $\mathsf{F}\mathfrak{R}$ die Frattinigruppe von $\mathfrak{R}$. Wir zeigen $\mathsf{F}\mathfrak{R} = \mathsf{C}\mathfrak{R}$. Zunächst zeigen wir $\mathsf{F}\mathfrak{R} \leqq \mathsf{C}\mathfrak{R}$. Sei $\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S} \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{U}$. Wegen $\mathsf{Z}(\mathfrak{S}(\mathsf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R})) \cap \mathfrak{R} \leqq \mathsf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} \leqq \mathfrak{S}(\mathsf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R})$ erfüllt dann $\mathfrak{S}(\mathsf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R})$ (wie in n), § 1, Fall B) die Bedingung in (R). Nach (R) haben wir also $\mathfrak{S}(\mathsf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}) = \mathfrak{R}$. Setze $\mathfrak{S} = \mathsf{F}\mathfrak{R}$. Dann haben wir $\mathsf{F}\mathfrak{R}(\mathsf{Z}(\mathsf{F}\mathfrak{R}) \cap \mathfrak{R}) = \mathfrak{R} = \mathsf{Z}(\mathsf{F}\mathfrak{R}) \cap \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R} \leqq \mathsf{Z}(\mathsf{F}\mathfrak{R})$, also $\mathsf{F}\mathfrak{R} \leqq \mathsf{C}\mathfrak{R}$.

Sei $\mathsf{F}\mathfrak{R} < \mathsf{C}\mathfrak{R}$. Dann betrachten wir die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{R}/\mathsf{F}\mathfrak{R}$. Wegen ihrer vollständigen Reduzibilität ($p = 3$, $q = 2$) gilt $\mathfrak{R}/\mathsf{F}\mathfrak{R} = \mathsf{C}\mathfrak{R}/\mathsf{F}\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}/\mathsf{F}\mathfrak{R}$ mit $\mathsf{N}\mathfrak{S} \geqq \mathfrak{U}$. Wegen $[\mathsf{C}\mathfrak{R}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$ erfüllt $\mathfrak{S}$, wie in o), § 1, die Bedingung in (R). Nach (R) haben wir also $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$, entgegen der Voraussetzung. Somit ist $\mathsf{F}\mathfrak{R} = \mathsf{C}\mathfrak{R}$.

f) Wir zeigen, daß $\mathsf{C}\mathfrak{R}$ zyklisch ist. Sonst gibt es nach einem Satz von Burnside-Zassenhaus ([*11*], Satz 3) $E \neq R \in \mathsf{C}\mathfrak{R}$ und $E \neq N \in \mathfrak{R}$ mit $[R, N] = E$. Wegen $[\mathsf{C}\mathfrak{R}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$ folgt $\mathsf{Z}\mathfrak{R} \geqq \mathfrak{U}$ und $\mathsf{Z}\mathfrak{R} \geqq \mathfrak{R}$, also $\mathsf{Z}\mathfrak{R} = (\mathsf{Z}\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R})\,\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ mit $\mathsf{Z}\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R} \ni N$. Da $\mathfrak{R}$ minimal ist, folgt $\mathsf{Z}\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$, $R \in \mathsf{Z}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ und $R = E$, entgegen der Voraussetzung.

g) Wir zeigen $\mathsf{C}\mathfrak{R} = \mathsf{F}\mathfrak{R} = [\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$ und $|\mathsf{C}\mathfrak{R}| = 2$. Wegen $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}] \leqq \mathsf{F}\mathfrak{R} = \mathsf{C}\mathfrak{R}$ gilt $[X, Y]^2 = [X^2, Y] = E$ für $X, Y \in \mathfrak{R}$. Da $\mathsf{C}\mathfrak{R}$ zyklisch ist, ist $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$ auch zyklisch. Also haben wir $|[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]| = 2$. Sei $\mathsf{F}\mathfrak{R} > [\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$. Dann ist $\mathfrak{R}/[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$ abelsch vom Typ $(2^a, 2, \ldots, 2)$ mit $a > 1$. Setze $\mathfrak{S}/[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}] = \mathfrak{W}_1(\mathfrak{R}/[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}])$ (vgl. g), § 1). Nun ist $\mathfrak{S} \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{S} < \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ zyklisch. Dann gilt $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{S}\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{U}$, entgegen der Bedingung (R). Somit ist $\mathsf{F}\mathfrak{R} = [\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$.

h) Hilfssatz. *Sei $\mathfrak{P}$ eine 2-Gruppe der Ordnung 2^n mit der Eigenschaft: $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] = \mathsf{C}\mathfrak{P}$, $|[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]| = 2$. Dann besitzt $\mathfrak{P}$ eine einzige treue irreduzible Darstellung Z des Grades 2^r mit $r = (n-1)/2$ (im komplexen Zahlkörper).*

Beweis. Wegen $|[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]| = 2$ besitzt $\mathfrak{P}$ 2^{n-1} lineare Darstellungen. Wegen $|[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]| = 2$ und $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] = \mathsf{C}\mathfrak{P}$ ist die Klassenanzahl von $\mathfrak{P}$ gleich $2 + (2^n - 2)/2 = 2^{n-1} + 1$. Also besitzt $\mathfrak{P}$ eine einzige nicht lineare irreduzible Darstellung Z. Sei z der Grad von Z. Nach der Orthogonalitätsrelation gilt $z^2 + 2^{n-1} = 2^n$, also $z = 2^r$. $\mathfrak{P}$ besitzt eine treue Darstellung (z. B. die reguläre Darstellung). Also ist Z treu für $\mathfrak{P}$ als einzige nicht lineare irreduzible Darstellung.

i) Hilfssatz. *Sei $\mathfrak{S}$ eine endliche Gruppe mit folgenden Eigenschaften: 1. $\mathfrak{S}$ enthält einen 2-Normalteiler $\mathfrak{P}$, der die Bedingungen von Hilfssatz h) erfüllt. 2. $\mathfrak{S}$ enthält eine 3-Untergruppe $\mathfrak{Q}$, die elementar abelsch ist und keinen Normalteiler $> \mathfrak{E}$ von $\mathfrak{S}$ umfaßt. Sei $|\mathfrak{Q}| = m$. 3. $\mathfrak{S}$ erlaubt die Faktorisierung $\mathfrak{S} = \mathfrak{P}\mathfrak{Q}$. Dann besitzt $\mathfrak{S}$ m treue irreduzible Darstellungen vom Grade 2^r, die auf $\mathfrak{P}$ alle gleich Z sind.*

Beweis. Sei Z^* die induzierte Darstellung von Z auf $\mathfrak{S}$. Der Grad von Z^* ist gleich $m\,2^r$. Sei $Z^* = \sum_{i=1,\ldots,l} m_i X_i$ die Zerlegung von Z^* in die irreduziblen Bestandteile. Da $\mathfrak{P}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{S}$ ist, zerfällt X_i nach einem Satz von Frobenius [*3*] auf $\mathfrak{P}$ in irreduzible Bestandteile des gleichen Grades. Da Z die einzige nicht lineare irreduzible Darstellung von $\mathfrak{P}$ ist, gilt nach dem

Reziprozitätssatz von FROBENIUS [3] $X_i = m_i Z$ (auf $\mathfrak{P}$), also $Z^* = (\sum_{i=1,\dots,l} m_i^2) Z$ (auf $\mathfrak{P}$). Daraus folgt $\sum_{i=1,\dots,l} m_i^2 = m$.

Nun ist $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] = \mathsf{C}\mathfrak{P}$ der kleinste Normalteiler $> \mathfrak{E}$ von $\mathfrak{S}$. Also ist eine Darstellung von $\mathfrak{S}$ treu auf $\mathfrak{S}$ genau dann, wenn sie $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$ treu darstellt. Daher ist die Anzahl der nicht treuen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{S}$ gleich der Klassenanzahl von $\mathfrak{S}/[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$.

Setze $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] = \langle C \rangle$. Nun liefert eine Klasse von konjugierten Elementen in $\mathfrak{S}/[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$, die ein Element der Gestalt $Q[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$ ($Q \in \mathfrak{Q}$) enthält, zwei Klassen von konjugierten Elementen in $\mathfrak{S}$, nämlich diejenige von Q und diejenige von QC. Also ist die Klassemanzahl von $\mathfrak{S}$ mindestens um m größer als die Klassenanzahl von $\mathfrak{S}/[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$. Daher gibt es mindestens m treue irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{S}$. Wie oben besitzt jede solche Darstellung nur Z als irreduzible Bestandteile auf $\mathfrak{P}$. Nach dem Reziprozitätssatz von FROBENIUS [3] sind diese dann mit $X_1, X_2, \dots, X_l$ identisch. Somit ist $l \geqq m$. Wegen $\sum_{i=1,\dots,l} m_i^2 = m$, $m_i \geqq 1$ folgt $l = m$, $m_i = 1$.

j) HILFSSATZ. *Sei $\mathfrak{S}$ wie in* i). *Seien $X_1, \dots, X_m$ die treuen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{S}$. Dann bleiben die entsprechenden modularen Darstellungen $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_m$ für $\mathfrak{z}$ irreduzibel und liegen in $GF(\mathfrak{z})$.*

BEWEIS. Wegen $|\mathfrak{P}| = 2^n$ bleibt $\overline{X}_i = Z$ auf $\mathfrak{P}$ irreduzibel für $\mathfrak{z}$. Also bleibt $\overline{X}_i$ irreduzibel für $\mathfrak{z}$ ($i = 1, \dots, m$).

Sei x_i der Charakter von X_i ($i = 1, \dots, m$). Sei $P \in \mathfrak{P} - [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$. Dann sind P und PC konjugiert in $\mathfrak{P}(\mathfrak{S})$. Also gilt $x_i(PC) = x_i(P)$. Andererseits gilt wegen $X_i(C) = Z(C) = -E$ auch $x_i(PC) = -x_i(P)$. Also haben wir $x_i(P) = 0$.

Jedes Element X von $\mathfrak{S}$ wird in der folgenden Form dargestellt: $X = PQ = QP$ mit $P \in \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{z} \equiv 0 \pmod{|Q|}$. Wir bringen P und Q gleichzeitig auf diagonalen Gestalten.

Nun sei e der Exponent von $\mathfrak{S}$, E eine primitive e-te Einheitswurzel, Q der rationale Zahlkörper und $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{z}$ in $\mathsf{Q}(\mathsf{E})$.

Sei T eine dritte Einheitswurzel. Wegen $\mathsf{T} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ haben wir $Q \equiv E \pmod{\mathfrak{p}}$, also $X \equiv P \pmod{\mathfrak{p}}$, und daher $x_i(X) \equiv x_i(P) \pmod{\mathfrak{p}}$. Ist insbesondere die Ordnung von X durch 4 teilbar, so haben wir $x_i(X) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$.

Sei $\bar{x}_i$ der Charakter von $\overline{X}_i$. Dann ist $\bar{x}_i(X) = x_i(X) + \mathfrak{p}$ (Restklasse mod $\mathfrak{p}$). Sei $\mathfrak{S}'$ die Menge aller Elemente Y von $\mathfrak{S}$, deren Ordnungen Teiler von 6 sind. Dann haben wir $\langle \bar{x}_i(X),\ X \in \mathfrak{S} \rangle = \langle \bar{x}_i(Y),\ Y \in \mathfrak{S}' \rangle = \langle 1 + \mathfrak{p} \rangle = GF(\mathfrak{z})$. Daher liegt nach einem Satz von R. BRAUER [1] $\overline{X}_i$ in $GF(\mathfrak{z})$.

k) Nun erfüllt die Untergruppe $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ unserer Gruppe $\mathfrak{G}$ die Bedingungen der Hilfssätze in i) und j). Wir betrachten die Darstellung von $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{R}$. Wegen $\mathsf{Z}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ und der Minimalität von $\mathfrak{R}$ ist sie treu und irreduzibel. Setze $|\mathfrak{R}| = 2^n$. Dann bekommt man nach den Hilfssätzen in i) und j) $|\mathfrak{R}| = 3^{2r}$ mit $r = (n-1)/2$.

l) Wir betrachten die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{R}/[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$. Sie ist vollständig reduzibel ($p = 3$, $q = 2$). Sei $\mathfrak{R}/[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}] = \mathfrak{R}_1/[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}] \times \cdots \times \mathfrak{R}_s/[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$ eine

Zerlegung von $\mathfrak{R}/[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$ in $\mathfrak{U}$-irreduzible Bestandteile. Sei $\mathfrak{B}_i$ der Kern von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{R}_i/[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$ $(i=1, \ldots, s)$. $\mathfrak{U}/\mathfrak{B}_i$ ist ohne Fixpunkte auf $\mathfrak{R}_i/[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$. Denn sonst gibt es $U \in \mathfrak{U} - \mathfrak{B}_i$ und $R \in \mathfrak{R}_i - [\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$ mit $[U, R] \in [\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$. Daraus folgt für jedes $U' \in \mathfrak{U}$ $[U, U'^{-1} R U'] \in [\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$. Da $\mathfrak{R}_i/[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$ minimal ist, folgt weiter $[\mathfrak{U}, \mathfrak{R}_i] \in [\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$, also $U \in \mathfrak{B}_i$, entgegen Voraussetzung. Also ist $\mathfrak{U}/\mathfrak{B}_i$ nach einem Satz von BURNSIDE-ZASSENHAUS ([11], Satz 3) zyklisch. Da andererseits $\mathfrak{U}$ elementar abelsch ist, haben wir $|\mathfrak{U}/\mathfrak{B}_i| \leqq 3$. Sei $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}_i$ für irgendein i. Dann folgt $\mathfrak{R}\mathfrak{U} \rhd \mathfrak{Z}\mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{R}\mathfrak{U} \geqq \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{R}\mathfrak{U} \neq \mathfrak{Z}\mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{R}\mathfrak{U}$, entgegen (R). Somit ist $|\mathfrak{U}/\mathfrak{B}_i| = 3$ $(i=1, \ldots, s)$. Da die Gruppe der Ordnung 3 nur eine treue irreduzible Darstellung des Grades 2 über $GF(2)$ besitzt, folgt weiter $|\mathfrak{R}_i/[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]| = 4$ $(i=1, \ldots, s)$ und daraus $s=r$.

Wegen $[\mathfrak{R}_i, \mathfrak{B}_i] \leqq [\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$ ist $[\langle \mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_r \rangle, \bigcap_{i=1,\ldots,r} \mathfrak{B}_i] = [\mathfrak{R}, \bigcap_{i=1,\ldots,r} \mathfrak{B}_i] \leqq [\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$. Aus $[[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}], \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$ folgt weiter $[\mathfrak{R}, \bigcap_{i=1,\ldots,r} \mathfrak{B}_i] = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{R} \leqq \mathfrak{R}\mathfrak{R}$ haben wir $\bigcap_{i=1,\ldots,r} \mathfrak{B}_i = \mathfrak{E}$ und daher $|\mathfrak{U}| \leqq 3^r$.

Wegen $\mathfrak{R}/\mathfrak{R} \cap \mathfrak{A} \cong \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U}) \geqq \mathfrak{R} \cap \mathfrak{A}$ folgt $|\mathfrak{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U})| \geqq 3^{2^r - r}$.

Sei $\mathfrak{R}_i$ abelsch für irgendein i. Dann folgt $\mathfrak{R} \rhd \mathfrak{Z}\mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{R} \geqq \mathfrak{R}_i$. Also erfüllt $\mathfrak{Z}\mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{R}$, wie in n), § 1, Fall B die Bedingung in (R), entgegen (R). Somit ist $\mathfrak{R}_i$ nicht abelsch $(i=1, \ldots, r)$.

Sei $r > 1$ und setze $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}_1 \ldots \mathfrak{R}_{r-1}$. Wir betrachten die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{S}$. Sei $\mathfrak{B}$ der Kern von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{S}$. Ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$, dann erfüllt $\mathfrak{S}$ die Bedingung in (R), entgegen (R). Denn setze $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{U}$ und sei $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{H} \leqq \mathfrak{N}\mathfrak{S}$. Dann wie in k), § 1 gibt es ein $E \neq U \in \mathfrak{U}$ mit $U \in \mathfrak{Z}\mathfrak{S}$, entgegen Voraussetzung. Also ist $\mathfrak{B} > \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{B} = \bigcap_{i=1,\ldots,r-1} \mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}_r = \mathfrak{E}$ folgt $|\mathfrak{B}| \leqq 3$, also haben wir $|\mathfrak{B}| = 3$. Setze $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{U}$. Wegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \geqq \mathfrak{S}\mathfrak{U}$ folgt $\mathfrak{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} = (\mathfrak{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N})\,\mathfrak{S}\mathfrak{U}$. Sei $\mathfrak{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$. Dann folgt $\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$, entgegen $|\mathfrak{B}| = 3$. Somit ist $\mathfrak{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N} < \mathfrak{N}$. Sei $\mathfrak{C}\mathfrak{S} < [\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$. Dann ist $\mathfrak{C}\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{Z}(\mathfrak{C}\mathfrak{S}) \cap \mathfrak{R} \lhd \mathfrak{R}$. Also erfüllt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{C}\mathfrak{S}) \cap \mathfrak{R}$, wie in n), § 1, Fall B die Bedingung in (R), entgegen (R). Somit ist $\mathfrak{C}\mathfrak{S} = [\mathfrak{R}, \mathfrak{R}] = [\mathfrak{S}, \mathfrak{S}]$. Also erfüllt $\mathfrak{S}$ die Bedingung des Hilfssatzes in h). Wegen $|\mathfrak{R}_r/[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]| = 4$ ist $|\mathfrak{S}| = 2^{2(r-1)+1}$. Somit besitzt $\mathfrak{S}$ nach dem Hilfssatze in h) eine einzige treue irreduzible Darstellung des Grades 2^{r-1}.

Nach den Hilfssätzen in i) und j) ist sie als modulare Darstellung mod 3 irreduzibel und liegt in $GF(3)$. Nun betrachten wir die Darstellung von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}$. $\mathfrak{N}$ ist für $\mathfrak{N}$ irreduzibel [wegen der Hilfssätze in i) und j)]. Wegen $\mathfrak{S} \lhd \mathfrak{R}$ zerfällt $\mathfrak{N}$ und daher $\mathfrak{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}$ nach einem Satz von FROBENIUS [3] in $\mathfrak{S}$-irreduzible Bestandteile vom gleichen Grade. Wegen $[\mathfrak{S}, \mathfrak{S}] = [\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$ sind diese alle treu für $\mathfrak{S}$. Also folgt $|\mathfrak{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}| = 3^{a 2^{r-1}}$ mit $a \geqq 1$. Wegen $|\mathfrak{N}| = 3^{2^r}$ und $\mathfrak{N} > \mathfrak{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}$ folgt $a = 1$, also $|\mathfrak{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}| = 3^{2^{r-1}}$.

Nun gilt andererseits $\mathfrak{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N} \geqq \mathfrak{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U})$. Wegen $|\mathfrak{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U})| \geqq 3^{2^{r-1}}$ folgt $|\mathfrak{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}| \geqq 3^{2^r - r}$. Damit haben wir $2^{r-1} \geqq 2^r - r$. Wegen $r > 1$ folgt $r = 2$ mit der Gleichung $2^{r-1} = 2^r - r$. Also haben wir $|\mathfrak{U}| = 9$, $|\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}| = 9$, daher $\mathfrak{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U}) = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}$.

Wegen $[\mathsf{C}(\mathfrak{N}\mathfrak{U}), \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$ folgt $[\mathsf{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$. Da $\mathsf{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}$ für $\mathfrak{S}$ treu ist, ist $\mathfrak{U}$ der Kern von $\mathfrak{S}\mathfrak{U}$ auf $\mathsf{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}$. Also haben wir $\mathfrak{U} \leqq \mathsf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ und $\mathsf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} \neq \mathfrak{N}\mathfrak{U}$, entgegen (R). Somit haben wir $r = 1$. Daraus folgt $|\mathfrak{U}| \leqq 3$, $|\mathfrak{N}\mathfrak{U}| \leqq 27$. Also ist die Klasse von $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ gleich höchstens 2.

Wir bemerken noch, daß $\mathfrak{N}$ eine Quaterionengruppe ist.

m) Sei $\mathfrak{N}$ nicht minimal. Sei $\{\mathfrak{L}_i, i \in I\}$ die Menge aller maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{N}$. Setze $\mathfrak{Z}_i/\mathfrak{L}_i = \mathsf{Z}(\mathfrak{N}/\mathfrak{L})$. Wie in a), § 1 haben wir $\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{N}\mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i$ mit $\mathfrak{S}_i \leqq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{B}_i \leqq \mathsf{N}\mathfrak{S}_i \cap \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i \lhd \mathfrak{G}$. Wie in b), § 1 erfüllt $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i$ die Bedingung von Satz 10.

Wir zeigen, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i$ die Bedingung (R) erfüllt. Sei $(\mathfrak{E} <)\ \mathfrak{L}_i\mathfrak{S}\mathfrak{B}_i/\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i\ (< \mathfrak{L}_i\mathfrak{N}\mathfrak{B}_i/\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i)$ eine Untergruppe von $\mathfrak{L}_i\mathfrak{N}\mathfrak{B}_i/\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i$ mit $\mathsf{N}(\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}\mathfrak{B}_i/\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i) \geqq \mathfrak{L}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{U}/\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i$ und $\mathsf{Z}(\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}\mathfrak{B}_i/\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i) \cap \mathfrak{H}/\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i \leqq \mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{B}_i/\mathfrak{L}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i$. Dabei wird $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{U}$ gesetzt. Dann erfüllt $\mathfrak{S}$, entgegen (R), die Bedingung in (R). Denn offensichtlich gilt $\mathsf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{H} \leqq \mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{B}_i$. Sei $\mathsf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{H} \nleqq \mathfrak{N}\mathfrak{S}$. Dann gibt es, wie in k), § 1, ein $E \neq U \in \mathfrak{B}_i$ mit $U \in \mathsf{Z}\mathfrak{S}$. Andererseits gilt $[\mathfrak{N}, \mathfrak{B}_i] \leqq \mathfrak{S}_i$, insbesondere $[\mathfrak{N}, U] \leqq \mathfrak{S}_i$. Wegen $\mathfrak{S} \geqq \mathfrak{S}_i$ und $(|\mathfrak{N}|, |\mathfrak{U}|) = 1$ folgt $[\mathfrak{N}, U] = E$, wegen $\mathsf{Z}\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{N}\mathfrak{N}$ dann $U = E$, entgegen der Voraussetzung.

n) Sei $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}_i$ für irgendein i. Dann folgt nach (R), $\mathfrak{N} = \mathfrak{S}_i$.

Sei J die Menge der $i \in I$ mit $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{B}_i$. Nun gilt wie in c), § 1 $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{S}_i = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{B}_i = \mathfrak{E}$. Also haben wir nach der Definition von J $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{S}_j = \mathfrak{E}$. Wegen $[\mathfrak{N}, \mathfrak{B}_j] \leqq \mathfrak{S}_j$ folgt $[\mathfrak{N}, \bigcap_{j \in J} \mathfrak{B}_j] = \mathfrak{E}$ und daher $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{B}_j = \mathfrak{E}$. Da $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}_j\mathfrak{S}_j\mathfrak{B}_j$ die Bedingung (R) erfüllt, ist $\mathfrak{L}_j\mathfrak{N}\mathfrak{B}_j/\mathfrak{L}_j\mathfrak{S}_j\mathfrak{B}_j = \mathfrak{N}/\mathfrak{S}_j$ eine Quaternionengruppe und $|\mathfrak{U}/\mathfrak{B}_j| = 3$ (nach l).

Da also $\mathfrak{N}/\mathfrak{S}_j$ den Exponenten 4 hat, so hat auch $\mathfrak{N}$ den Exponenten 4. Wegen $\mathsf{F}\mathfrak{N} = \langle X^2, X \in \mathfrak{N} \rangle$ und $[X^2, \mathfrak{N}] \leqq \bigcap_{j \in I} \mathfrak{S}_j = \mathfrak{E}$ folgt $\mathsf{F}\mathfrak{N} \leqq \mathsf{C}\mathfrak{N}$. Aus $[\mathsf{C}\mathfrak{N}, \mathfrak{U}] \leqq \bigcap_{j \in J} \mathfrak{S}_j = \mathfrak{E}$ kann man, wie in e), § 4 folgern $\mathsf{F}\mathfrak{N} = \mathsf{C}\mathfrak{N}$. Also sind $\mathsf{C}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}/\mathsf{C}\mathfrak{N}$ elementar abelsch.

o) Sei $\mathfrak{N}_1/\mathsf{C}\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathsf{C}\mathfrak{N}$. Wie in n), § 1 erfüllt $\mathfrak{N}_1(\mathsf{Z}\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N})$ die Bedingung in (R). Also haben wir nach (R) $\mathfrak{N}_1(\mathsf{Z}\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$. Wegen $\mathfrak{N}_1 \cap (\mathsf{Z}\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{N}_1 \cap \mathsf{C}\mathfrak{N}$ ist ferner $\mathfrak{N}/\mathsf{C}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1/\mathsf{C}\mathfrak{N} \times (\mathsf{Z}\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N})/\mathsf{C}\mathfrak{N}$. Sei $\mathfrak{N}_2/\mathsf{C}\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathsf{C}\mathfrak{N}$ in $(\mathsf{Z}\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N})/\mathsf{C}\mathfrak{N}$. Dann haben wir wie oben $(\mathsf{Z}\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N})/\mathsf{C}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_2/\mathsf{C}\mathfrak{N} \times (\mathsf{Z}\mathfrak{N}_1 \cap \mathsf{Z}\mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N})/\mathsf{C}\mathfrak{N}$. In dieser Weise bekommen wir eine $\mathfrak{U}$-irreduzible Zerlegung von $\mathfrak{N}/\mathsf{C}\mathfrak{N}$: $\mathfrak{N}/\mathsf{C}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1/\mathsf{C}\mathfrak{N} \times \cdots \times \mathfrak{N}_s/\mathsf{C}\mathfrak{N}$ mit $[\mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_j] = \mathfrak{E}$ für $i \neq j$. Sei $\mathfrak{B}_i'$ der Kern von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{N}_j/\mathsf{C}\mathfrak{N}$. Sei $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}_i'$ für irgendein i. Dann gilt $\mathfrak{N}\mathfrak{U} \rhd \mathsf{Z}\mathfrak{N}_j \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} > \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{N}\mathfrak{U} \neq \mathsf{Z}\mathfrak{N}_j \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}$, entgegen (R). Also ist $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{B}_j$ $(i = 1, \ldots, s)$. Wie in l) ist $\mathfrak{U}/\mathfrak{B}_i'$ ohne Fixpunkte auf $\mathfrak{N}_j/\mathsf{C}\mathfrak{N}$. Also ist $\mathfrak{U}/\mathfrak{B}_i'$, nach einem Satz von BURNSIDE-ZASSENHAUS ([11], Satz 3) zyklisch. Daher gilt $|\mathfrak{U}/\mathfrak{B}_i'| = 3$. Wegen $[\mathfrak{N}, \bigcap_{i=1,\ldots,s} \mathfrak{B}_i'] \leqq \mathsf{C}\mathfrak{N}$, $[\mathsf{C}\mathfrak{N}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$ und $(|\mathfrak{N}|, |\mathfrak{U}|) = 1$ folgt $[\mathfrak{N}, \bigcap_{i=1,\ldots,s} \mathfrak{B}_i'] = \mathfrak{E}$ und $\bigcap_{i=1,\ldots,s} \mathfrak{B}_i' = \mathfrak{E}$. Also haben wir insbesondere $|\mathfrak{U}| \leqq 3^s$. Sei $\mathfrak{N}_i$ abelsch für irgendein i. Dann folgt $\mathfrak{N}_i \leqq \mathsf{Z}\mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{N} \lhd \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ mit $\mathsf{Z}\mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{N} \neq \mathfrak{N}$. Also erfüllt

$\mathsf{Z}\mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{R}$, wie in n), § 1, Fall B die Bedingung in (R), entgegen (R). Somit ist $\mathfrak{R}_i$ nicht abelsch $(i=1, \ldots, s)$. Setze $\mathfrak{C}_i = [\mathfrak{R}_i, \mathfrak{R}_i]$. Wegen $|\mathfrak{U}/\mathfrak{W}_i'| = 3$ ist der Typ von $\mathfrak{R}_i/\mathsf{C}\mathfrak{R}$ gleich (2,2). Also gibt es zwei Elemente X_i, $Y_i \in \mathfrak{R}_i$ mit $\mathfrak{R}_i = \langle X_i, Y_i, \mathsf{C}\mathfrak{R}\rangle$. Daraus folgt $\mathfrak{C}_i = \langle [X_i, Y_i]\rangle$. Wegen $[X_i, Y_i]^2 = [X_i^2, Y_i] = E$ folgt $|\mathfrak{C}_i| = 2$.

p) Nun zeigen wir, daß $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{C}_i$ elementar abelsch ist. Angenommen, $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{C}_i$ sei nicht elementar abelsch. Da $\mathsf{C}\mathfrak{R}$ elementar abelsch ist und $\mathfrak{R}_i/\mathsf{C}\mathfrak{R}$ den Typ (2,2) hat, ist der Typ von $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{C}_i$ entweder (i) (4, 2, ...) oder (ii) (4, 4, 2, ...).

Fall (i). Setze $\mathfrak{S}/\mathfrak{C}_i = \mathfrak{W}_1(\mathfrak{R}_i/\mathfrak{C}_i)$ (vgl. g), § 1). Dann gilt $\mathfrak{S} \lhd \mathfrak{R}\,\mathfrak{U}$, $|\mathfrak{R}_i/\mathfrak{S}| = |\mathfrak{S}/\mathsf{C}\mathfrak{R}| = 2$. Daraus folgt $[\mathfrak{R}_i, \mathfrak{U}] \leqq \mathsf{C}\mathfrak{R}$, also $\mathfrak{U} = \mathfrak{W}_i'$, entgegen $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{W}_i'[0]$.

Fall (ii). Sei $X\mathfrak{C}_i$ $(X \in \mathfrak{R}_i)$ ein Basiselement der Ordnung 4 von $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{C}_i$. Wegen $X^2 \in \mathsf{C}\mathfrak{R}$ und $[\mathfrak{U}, \mathsf{C}\mathfrak{R}] = \mathfrak{E}$ folgt $\langle X^2, \mathfrak{C}_i\rangle \lhd \mathfrak{R}\,\mathfrak{U}$. Da der Typ von $\mathfrak{R}_i/\langle X^2, \mathfrak{C}_i\rangle$ gleich (4, 2, ...) ist, bekommen wir wie in Fall (i) einen Widerspruch. Somit ist $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{C}_i$ elementar abelsch.

Wir betrachten die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{C}_i$. Wegen ihrer vollständigen Reduzibilität $(p=3,\ q=2)$ haben wir $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{C}_i = \mathsf{C}\mathfrak{R}/\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{Q}_i/\mathfrak{C}_i$. $\mathfrak{Q}_i$ hat die Ordnung 8 und besitzt einen Automorphismus der Ordnung 3 (wegen $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{W}_i'$). Da außerdem $\mathfrak{Q}_i$ nicht abelsch ist, ist $\mathfrak{Q}_i$ eine Quaternionengruppe $(i=1, \ldots, s)$. Wegen $\mathsf{F}\mathfrak{R} = \mathsf{C}\mathfrak{R}$ haben wir, nun $\mathfrak{R} = \mathfrak{Q}_1 \ldots \mathfrak{Q}_s \mathsf{C}\mathfrak{R} = \mathfrak{Q}_1 \ldots \mathfrak{Q}_s$.

q) Jetzt zeigen wir $\mathfrak{C}_1 \ldots \mathfrak{C}_s = \mathfrak{C}_1 \times \cdots \times \mathfrak{C}_s$. Angenommen, $\mathfrak{C}_1 \ldots \mathfrak{C}_s$ sei kein direktes Produkt von $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_s$. Dann gibt es eine Ziffer a mit $\mathfrak{C}_1 \times \cdots \times \mathfrak{C}_t \geqq \mathfrak{C}_a$ und $a > t$. Wegen $\bigcap_{i \in J} \mathfrak{S}_j = \mathfrak{E}$ gibt es dann eine Ziffer $j \in J$ mit $\mathfrak{C}_a \leqq \mathfrak{S}_j$. Also gibt es auch ein i mit $1 \leqq i \leqq t$ und $\mathfrak{C}_i \leqq \mathfrak{S}_j$. Notfalls die Ziffer ändernd, können wir annehmen $\mathfrak{C}_1 \leqq \mathfrak{S}_j$. Wir betrachten die Darstellungen von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_a$ auf $\mathfrak{R}/\mathfrak{L}_j$. Dann ist $\mathfrak{S}_j$ der Kern von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{R}/\mathfrak{L}_j$. Wegen $|\mathfrak{R}/\mathfrak{S}_j| = 8$ folgt $|\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_a/\mathfrak{S}_j \cap \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_a| \leqq 8$. Andererseits gilt $|\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_a \mathsf{C}\mathfrak{R}/\mathsf{C}\mathfrak{R}| = |\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_a/\mathsf{C}\mathfrak{R}| = 16$. Also gibt es in $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_a \cap \mathfrak{S}_j$ ein Element $Q_1 Q_a$ $(Q_1 \in \mathfrak{Q}_1,\ Q_a \in \mathfrak{Q}_a)$ mit $Q_1 \notin \mathfrak{C}_1$ oder $Q_a \notin \mathfrak{C}_i$. Sei etwa $Q_1 \notin \mathfrak{C}_1$. Dann gibt es wegen $[\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_a] (\geqq [\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_a]) = \mathfrak{E}$ ein Q_1' mit $[Q_1, Q_1'] \neq E$ und $[Q_a, Q_1'] = E$. Nun folgt $\mathfrak{C}_1 \leqq \mathfrak{S}_j \cap \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_a \leqq \mathfrak{S}_j$, entgegen der Voraussetzung.

r) Wir zeigen $\mathfrak{Q}_1 \ldots \mathfrak{Q}_s = \mathfrak{Q}_1 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_s$. Angenommen, $\mathfrak{Q}_1 \ldots \mathfrak{Q}_s$ sei kein direktes Produkt von $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_s$. Dann gibt es eine Ziffer a mit $(\mathfrak{Q}_1 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_t) \cap \mathfrak{Q}_a > \mathfrak{E}$ und $a > t$. Sei $Q_a = Q_1 \ldots Q_t$ $(Q_i \in \mathfrak{Q}_i$ für $i = 1, \ldots, t$ und $a)$ ein von Eins verschiedenes Element von $(\mathfrak{Q}_1 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_t) \cap \mathfrak{Q}_a$. Wegen $\mathfrak{E} = [\mathfrak{R}_i, \mathfrak{R}_j] \geqq [\mathfrak{Q}_i, \mathfrak{Q}_j]$ $(i \neq j)$ folgt $[(\mathfrak{Q}_1 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_t) \cap \mathfrak{Q}_a, \mathfrak{Q}_a] = \mathfrak{E}$. Wegen $[\mathfrak{R}_i, \mathfrak{R}_i] = [\mathfrak{Q}_i, \mathfrak{Q}_i] = \mathfrak{C}_i \leqq \mathsf{C}\mathfrak{R}$ gilt $(\mathfrak{Q}_1 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_t) \cap \mathfrak{Q}_a \leqq \mathfrak{C}_a \leqq \mathsf{C}\mathfrak{R}$. Also haben wir $Q_a \in \mathfrak{C}_a$. Wegen $(\mathfrak{Q}_1 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_t) \cap \mathsf{C}\mathfrak{R} = \mathfrak{C}_1 \times \cdots \times \mathfrak{C}_t$ ist weiter $Q_1 \in \mathfrak{C}_1, \ldots, Q_t \in \mathfrak{C}_t$. Dann haben wir nach q) $Q_a = Q_1 = \cdots = Q_t = E$, entgegen der Voraussetzung.

Sei $s = 1$. Wegen $|\mathfrak{R}/\mathfrak{R} \cap \mathfrak{A}| = |\mathfrak{U}|$ und $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{A} \leqq \mathsf{C}(\mathfrak{R}\,\mathfrak{U})$ folgt nun $|\mathfrak{R}/\mathsf{C}(\mathfrak{R}\,\mathfrak{U})| \leqq 3$ und $[\mathfrak{R}\,\mathfrak{U}, \mathfrak{R}\,\mathfrak{U}] \leqq \mathsf{C}(\mathfrak{R}\,\mathfrak{U})$. Dann sind wir fertig. Also sei $s > 1$.

Wir betrachten die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{Q}_1 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_{s-1}$. Sei $\mathfrak{W}_s$ der Kern von $\mathfrak{U}$. Ist $\mathfrak{W}_s = \mathfrak{E}$, dann erfüllt $\mathfrak{Q}_1 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_{s-1}$ wie in l) die Bedingung

in (R), entgegen $(\bar{R})$. Also ist $\mathfrak{W}_s > \mathfrak{E}$. Wegen $\mathsf{Z}\mathfrak{R} \leqq \mathfrak{R}\mathfrak{R}$ und $|\mathfrak{Q}_s| = 8$ folgt $|\mathfrak{W}_s| \leqq 3$. Also haben wir $|\mathfrak{W}_s| = 3$. Offenbar gilt $\mathfrak{Q}_s \mathfrak{W}_s \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{U}$. In gleicher Weise bekommen wir die Untergruppen $\mathfrak{W}_1, \ldots, \mathfrak{W}_{s-1}$ von $\mathfrak{U}$ mit $|\mathfrak{W}_i| = 3$ und $\mathfrak{Q}_i \mathfrak{W}_i \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{U}$ $(i = 1, \ldots, s-1)$.

s) Nun zeigen wir $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{W}_1 \ldots \mathfrak{Q}_s \mathfrak{W}_s = \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{W}_1 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_s \mathfrak{W}_s = \mathfrak{R}\mathfrak{U}$. Angenommen $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{W}_1 \ldots \mathfrak{Q}_s \mathfrak{W}_s$ sei kein direktes Produkt von $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{W}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_s \mathfrak{W}_s$. Dann gibt es eine Ziffer a mit $(\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{W}_1 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_t \mathfrak{W}_t) \cap \mathfrak{Q}_a \mathfrak{W}_a > \mathfrak{E}$ und $a > t$. Nach der Definition der Untergruppen $\mathfrak{W}$ haben wir $[\mathfrak{Q}_i \mathfrak{W}_i, \mathfrak{Q}_j \mathfrak{W}_j] = \mathfrak{E}$ $(i \neq j)$. Also folgt $[(\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{W}_1 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_t \mathfrak{W}_t) \cap \mathfrak{Q}_a \mathfrak{W}_a, \mathfrak{Q}_i \mathfrak{W}_i] = \mathfrak{E}$ für $i = 1, \ldots, t$ und a. Nun ist das Zentrum von $\mathfrak{Q}_i \mathfrak{W}_i$ gleich $\mathfrak{C}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. Also haben wir einerseits $(\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{W}_1 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_t \mathfrak{W}_t) \cap \mathfrak{Q}_a \mathfrak{W}_a \leqq \mathfrak{C}_a$ und andererseits $(\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{W}_1 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_t \mathfrak{W}_t) \cap \mathfrak{Q}_a \mathfrak{W}_a \leqq \mathfrak{C}_1 \times \cdots \times \mathfrak{C}_t$, entgegen q). Daraus folgt insbesondere $|\mathfrak{U}| = 3^s$.

Da $\mathfrak{R}\mathfrak{U}/[\mathfrak{R}\mathfrak{U}, \mathfrak{R}\mathfrak{U}] \cong \mathfrak{W}_1 \times \cdots \times \mathfrak{W}_s$ eine 3-Gruppe und $\mathsf{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U}) = \mathfrak{C}_1 \times \cdots \times \mathfrak{C}_s$ eine 2-Gruppe ist, ist die direkte Zerlegung von $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ in direkt unzerlegbaren Faktoren eindeutig ([*12*], S. 82).

t) Wegen $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{W}_j = \mathfrak{E}$ und $|\mathfrak{U}| = 3^s$ haben wir $|J| \geqq s$. Also (notfalls die Ziffern verändernd) dürfen wir annehmen $J \ni 1, \ldots, s$. Wir betrachten die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{R}/\mathfrak{L}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. Da $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}_i$ eine Quaternionengruppe ist, gibt es eine Nummer i' mit $\mathfrak{C}_i \leqq \mathfrak{S}_{i'}$ $(i = 1, \ldots, s)$. Da $\mathfrak{C}_i$ der kleinste Normalteiler $> \mathfrak{E}$ von $\mathfrak{Q}_i \mathfrak{W}_i$ ist, folgt $\mathfrak{Q}_{i'} \mathfrak{W}_{i'} \cap \mathfrak{S}_i \mathfrak{W}_i = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{Q}_{i'} \mathfrak{W}_{i'} \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{U}$ folgt weiter $\mathfrak{R}\mathfrak{U} = \mathfrak{S}_i \mathfrak{W}_i \times \mathfrak{Q}_{i'} \mathfrak{W}_{i'}$. Nun können wir annehmen, daß alle $\mathfrak{S}_i \mathfrak{W}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ verschieden sind (wegen $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{W}_j = \mathfrak{E}$). Dann folgt daraus wegen der Eindeutigkeit der direkten Zerlegung von $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ in direkt unzerlegbaren Faktoren [nach s)], daß alle $\mathfrak{Q}_{i'} \mathfrak{W}_{i'}$ miteinander verschieden sind. Also (notfalls die Ziffern verändernd) darf man annehmen $i = i'$ $(i = 1, \ldots, s)$.

Wegen $\mathfrak{L}_i \mathfrak{S}_i \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{S}_i$ bekommen wir wie in k), § 1, mit dem Satz von SYLOW $\mathfrak{R} = (\mathsf{N}\mathfrak{S}_i \cap \mathfrak{R})\mathfrak{L}_i$. Wir setzen $\mathfrak{N}_i = \mathsf{N}\mathfrak{S}_i \cap \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{L}^* = \mathsf{N}\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}$ $(i = 1, \ldots, s)$. Wegen $\mathsf{N}\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R} = \mathsf{Z}\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}$ folgt $\mathfrak{L}^* \leqq \mathfrak{N}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. Da die Darstellung von $\mathfrak{Q}_i \mathfrak{W}_i$ auf $\mathfrak{N}_i$ treu ist, folgt $\mathfrak{L}^* < \mathfrak{N}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. Offenbar gilt $\mathfrak{N}_i \lhd \mathfrak{R}\mathfrak{U}$.

Wir zeigen $(\mathfrak{N}_1/\mathfrak{L}^*) \ldots (\mathfrak{N}_s/\mathfrak{L}^*) = \mathfrak{N}_1/\mathfrak{L}^* \times \cdots \times \mathfrak{N}_s/\mathfrak{L}^*$. Angenommen $(\mathfrak{N}_1/\mathfrak{L}^*) \ldots (\mathfrak{N}_s/\mathfrak{L}^*)$ sei kein direktes Produkt von $\mathfrak{N}_1/\mathfrak{L}^*, \ldots, \mathfrak{N}_s/\mathfrak{L}^*$. Dann gibt es eine Ziffer a mit $(\mathfrak{N}_1/\mathfrak{L}^* \times \cdots \times \mathfrak{N}_t/\mathfrak{L}^*) \cap \mathfrak{N}_a/\mathfrak{L}^* > \mathfrak{E}$ und $a > t$. Wegen $[\mathfrak{N}_i, \mathfrak{S}_i] = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{S}_i \mathfrak{S}_j = \mathfrak{R}$ $(i, j = 1, \ldots, s;\ i \neq j)$ folgt $[(\mathfrak{N}_1 \ldots \mathfrak{N}_t) \cap \mathfrak{N}_a, \mathfrak{R}] \leqq \mathfrak{L}^*$, $(\mathfrak{N}_1/\mathfrak{L}^* \times \cdots \times \mathfrak{N}_t/\mathfrak{L}^*) \cap \mathfrak{N}_a/\mathfrak{L}^* = \mathfrak{E}$, entgegen der Voraussetzung. Da die Darstellung von $\mathfrak{Q}_i \mathfrak{W}_i$ auf $\mathfrak{N}_i$ treu ist, folgt daraus insbesondere $|\mathfrak{N}_1 \ldots \mathfrak{N}_s/\mathfrak{N}_1 \ldots \mathfrak{N}_s \cap \mathsf{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U})| \geqq 3^s$.

Andererseits haben wir $|\mathfrak{R}/\mathfrak{R} \cap \mathfrak{A}| = |\mathfrak{U}| = 3^s$. Also gilt wegen $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{A} \leqq \mathsf{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U})$ dann $\mathfrak{R} = \mathfrak{N}_1 \ldots \mathfrak{N}_s \mathsf{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U})$ und $|\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_i \cap \mathsf{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U})| = 3$. Daraus folgt insbesondere $\mathfrak{N}_i \cap \mathsf{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U}) \geqq [\mathfrak{N}_i, \mathfrak{W}_i]$.

Nun gilt schließlich $[\mathfrak{R}, \mathfrak{U}] = [\mathfrak{N}_1 \ldots \mathfrak{N}_s \mathsf{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U}), \mathfrak{U}] = [\mathfrak{N}_1 \ldots \mathfrak{N}_s, \mathfrak{U}] = [\mathfrak{N}_1, \mathfrak{U}] \ldots [\mathfrak{N}_s, \mathfrak{U}] = [\mathfrak{N}_1, \mathfrak{W}_1] \ldots [\mathfrak{N}_s, \mathfrak{W}_s] \leqq \mathsf{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U})$. Also ist die Klasse von $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ höchstens gleich zwei.

Damit ist der Beweis von Satz 10 vollendet.

BEISPIEL. Sei $p \leqq 3$ und $\mathfrak{N}$ elementar abelsch vom Typ (p, p). Sei $\mathfrak{G}$ die Erweiterung von $\mathfrak{N}$ durch $GL(2, p)$ mit zerfallenden Faktorensystemen. Dann kann man als $\mathfrak{A}$ nehmen: $\left\langle (1, 0)^* \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ für $p = 2$ und $\left\langle (1, 0)^* \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (0, 1) \right\rangle$ für $p = 3$. Dabei bezeichnet $*$ die Multiplikation in $\mathfrak{G}$.

Literatur

[1] BRAUER, R.: Über Systeme hyperkomplexer Zahlen. Math. Z. **30**, 79–107 (1929).

[2] FITTING, H.: Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung. Jber. dtsch. Math. Verein. **48**, 77–141 (1938).

[3] FROBENIUS, G.: Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppen und denen ihrer Untergruppen. Sitz. Berlin (1898), 501–515.

[4] HALL, P.: A note on soluble groups. J. London Math. Soc. **3**, 98–105 (1928).

[5] HALL, P.: A contribution to the theory of groups of prime power order. Proc. London Math. Soc. **36**, 29–95 (1934).

[6] HUPPERT, B.: Primitive, auflösbare Permutationsgruppen. Arch. Math. **6**, 303–310 (1955).

[7] ITÔ, N.: On primitive permutation groups. Acta sci. math. **16**, 207–228 (1955).

[8] RITT, J. F.: On algebraic functions which can be expressed in terms of radicals. Trans. Amer. Math. Soc. **24**, 21–30 (1923).

[9] SCHREIER, O.: Über die Erweiterung von Gruppen II. Abh. math. Sem. Hamburg **4**, 321–346 (1926).

[10] WIELANDT, H.: Zum Satz von SYLOW. Math. Z. **60**, 407–408 (1954).

[11] ZASSENHAUS, H.: Über endliche Fastkörper. Abh. math. Sem. Hamburg **11**, 187–220 (1936).

[12] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. Leipzig u. Berlin 1937.

Mathematisches Institut der Nagoya-Universität, Nagoya-Chikusa (Japan)

(Eingegangen am 14. Dezember 1959)

BERGAU, P., u. J. MENNICKE
Math. Zeitschr. 74, 414–435 (1960)

Über topologische Abbildungen der Brezelfläche vom Geschlecht 2

JAKOB NIELSEN zum Gedenken

Von

P. BERGAU und J. MENNICKE

Topologische Abbildungen orientierbarer Flächen sind bereits von vielen Autoren untersucht worden. Wir nennen hier nur J. NIELSEN [*14*], [*15*], [*16*], M. DEHN [*11*], R. BAER [*5*], [*6*], [*7*] und L. GOERITZ [*12*], [*13*].

Die weitestreichenden Untersuchungen sind ohne Zweifel die von J. NIELSEN. Er zieht den auf H. POINCARÉ zurückgehenden Gedanken heran, die hyperbolische Ebene mit einer gewissen Pflasterung und einer auf dieser Pflasterung einfach transitiv operierenden Gruppe von hyperbolischen Bewegungen aufzufassen als eine metrische Realisierung der universellen Überlagerung mit ihrer Deckbewegungsgruppe. Das zweite entscheidende Hilfsmittel NIELSENs ist seine Methode der „Randpunktentwicklung": Jedem Punkt des Randkreises der hyperbolischen Ebene wird eine Folge von Elementen der Fundamentalgruppe in geometrisch naheliegender Weise zugeordnet. Die Selbstabbildungen induzieren Automorphismen auf der Fundamentalgruppe und diese induzieren Abbildungen des Randkreises auf sich. Man hat also die induzierten Abbildungen des Randkreises zu untersuchen. Von den vielen schönen mit dieser Methode erhaltenen Sätzen nennen wir etwa den folgenden bekannten: Jeder Automorphismus der Fundamentalgruppe läßt sich durch eine topologische Selbstabbildung der Fläche induzieren. Das führt zu der Einsicht, daß die Gruppe der Selbstabbildungen, abgesehen von Deformationen, isomorph ist zu der äußeren Automorphismengruppe der Fundamentalgruppe.

Die oben zitierten Untersuchungen von M. DEHN, R. BAER und L. GOERITZ haben eine andere Struktur. Hier wird die Tatsache herangezogen, daß einfache Kurvensysteme auf der Fläche, das sind solche Systeme einfacher, das ist doppelpunktfreier Kurven, deren je zwei sich nicht schneiden, bei topologischen Abbildungen der Fläche wieder auf einfache Kurvensysteme abgebildet werden. Es handelt sich also darum, einfache Kurvensysteme auf der Fläche zu untersuchen und sie zu klassifizieren. Das hat für das Geschlecht 2 zuerst DEHN durchgeführt und nach ihm für beliebiges Geschlecht BAER und GOERITZ. Insbesondere gelingt es mit dieser Methode, von gewissen einfachen Abbildungen zu zeigen, daß sie im wesentlichen, d.h. bis auf Deformationen, die Gruppe aller Selbstabbildungen erzeugen.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf das Geschlecht 2. Ihr liegen bezüglich des Erzeugendensystems die Arbeiten von DEHN, BAER und GOERITZ

zugrunde. Um unsere Arbeit unabhängig von diesen Untersuchungen lesbar zu gestalten, haben wir in einem einleitenden Abschnitt die von L. GOERITZ angegebenen Erzeugenden beschrieben und die von ihnen induzierten Automorphismen angeführt.

Die Poincarésche Pflasterung besteht in unserem Falle aus Achtecken. Wir gehen durch Unter- und Oberteilung über zu einer Pflasterung mit Sechsecken. Die Ecken der Sechsecke bilden ein gewisses Punktnetz. Die von den Spiegelungen an den Punkten des Netzes erzeugte Punktspiegelungsgruppe ist Obergruppe der Fundamentalgruppe vom Index 2. Ihr und dem Punktnetz wenden wir unser Interesse zu.

Wir bemerken, daß es in der Gruppe der Selbstabbildungen der Brezelfläche vom Geschlecht 2, wenn man von Deformationen absieht, ein nichttriviales Zentrum gibt, das ein Element der Ordnung 2 enthält. Diese Bemerkung, die für höheres Geschlecht nicht zutrifft, führt dazu, daß man die Automorphismen der Fundamentalgruppe fortsetzen kann zu Automorphismen der Punktspiegelungsgruppe. Auf dem Punktnetz induzieren die Automorphismen gewisse Kollineationen; diese werden von besonders einfachen, sog. Scherungen erzeugt.

Es gelingt uns, für alle Automorphismen eine konfigurative Kennzeichnung anzugeben. Sie besteht in folgendem: Eine zu einem Automorphismus gehörige Kollineation ist durch die Abbildung der Ecken eines Grundsechsecks bereits bestimmt. Wir geben ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, daß ein beliebiges Sechseck des Punktnetzes Bild bezüglich einer durch einen Automorphismus induzierten Kollineation ist. Dieses Kriterium zieht nur die Gestalt des Sechsecks heran, nicht aber seine Lage im Punktnetz.

Schließlich bemerken wir, daß ein enger Zusammenhang zwischen der Automorphismengruppe und einer Artinschen Zopfgruppe besteht. Die Gruppe der zu orientierungserhaltenden Abbildungen gehörigen Automorphismen ist homomorphes Bild der Zopfgruppe aus sechs Fäden. Aus einer genaueren Untersuchung dieses Homomorphismus erhalten wir für die Automorphismengruppe ein System definierender Relationen.

In einem Anhang stellen wir ein zahlentheoretisches Ergebnis dar, das auch für beliebiges Geschlecht gilt. Es handelt sich darum, daß man die Fundamentalgruppen der orientierbaren Flächen mit Hilfe einer geeigneten quadratischen Form treu als orthogonale Gruppen über dem Ring der ganzen rationalen Zahlen darstellen kann.

1. Eine topologische Selbstabbildung einer Brezelfläche F_p vom Geschlecht p induziert einen Automorphismus in der Fundamentalgruppe der Fläche. Da zur Fixierung der Fundamentalgruppe ein Anfangspunkt auszuzeichnen ist, so ist dieser Automorphismus nur bis auf einen inneren Automorphismus bestimmt, entsprechend einem Wechsel des Anfangspunktes.

Deformationen induzieren innere Automorphismen. BAER [6] und GOERITZ [13] haben gezeigt, daß auch umgekehrt diejenigen Flächenabbildungen, die innere Automorphismen induzieren, Deformationen sind.

Nielsen [14] hat bewiesen, daß sich auch jeder Automorphismus der Fundamentalgruppe durch eine Selbstabbildung der Fläche induzieren läßt. Die hier nicht interessanten Fälle der Kugel und des Torus mögen ausgeschlossen sein.

Bezeichnet $\mathfrak{F}$ die Fundamentalgruppe der Brezelfläche F_p, $\mathfrak{A}$ die Automorphismengruppe von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{J}$ die Gruppe der inneren Automorphismen von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{B}$ die Gruppe der topologischen Selbstabbildungen von F_p und $\mathfrak{D}$ den Normalteiler der Deformationen, so kann man also folgende Isomorphie aussprechen:

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{J} \cong \mathfrak{B}/\mathfrak{D}.$$

Für die Gruppe $\mathfrak{B}/\mathfrak{D}$ ist der Name *Abbildungstypengruppe* gebräuchlich.

Bei der Untersuchung von Flächenabbildungen können wir also nach Belieben entweder die Flächenabbildungen selbst oder die durch sie induzierten Automorphismen ins Auge fassen.

2. Im folgenden betrachten wir die Brezelfläche F_2 vom Geschlecht 2. Wir werden in Anlehnung an Baer [6] und Goeritz [13] einige Selbstabbildungen von F_2 geometrisch definieren und die induzierten Automorphismen angeben.

Wir legen für F_2 das in Fig. 1 beschriebene Schema zugrunde. Schneidet man die Fläche längs der Kurven S_i auf, so entstehen zwei Kugeln mit je drei Löchern. Schneidet man auch noch längs der Kurven U_i auf, so zerfällt jede Kugel in zwei Sechsecke. Die Bezeichnung der Sechsecke und der zu den einzelnen Sechsecken gehörigen Strecken von S_i, U_i ist der Fig. 2 zu entnehmen. Beim Übergang von Fig. 2 zu Fig. 1 wird U_3 ausgezeichnet: man hat beim Zusammenheften der vier Sechsecke U_3 nach außen zu stülpen.

In Fig. 3 ist ein fundamentales Kurvensystem und ein Anfangspunkt auf der Fläche festgelegt. Die erzeugenden Wege genügen der Relation

$$s_1 t_1 s_1^{-1} t_1^{-1} s_2 t_2 s_2^{-1} t_2^{-1} = 1.$$

Wir definieren nun einige Selbstabbildungen.

Wir schneiden aus der Fläche einen kleinen Zylinder mit S_1 als Meridian heraus, verdrehen Basiskreis und Deckkreis um 2π gegeneinander in der in Fig. 4 angegebenen Weise und fügen den Zylinder wieder ein. Die bewirkte Selbstabbildung nennen wir eine Torsion längs S_1 und bezeichnen sie mit τ_{S_1}, ebenso den induzierten Automorphismus.

Für den Automorphismus ergibt eine leichte, in Fig. 5 dargestellte Rechnung:

$$\tau_{S_1} = \begin{cases} s_1 \to s_1 \\ t_1 \to t_1 \\ s_2 \to s_2 t_2^{-1} \\ t_2 \to t_2. \end{cases}$$

Analog definieren wir Flächenabbildungen τ_{S_i} für $i = 2, 3$ und τ_{U_i} für $i = 1, 2, 3$.

Sodann definieren wir an Hand der Fig. 6 eine Flächenabbildung wie folgt. Wir zerschneiden die Fläche in zwei berandete Tori und einen schmalen Zylinder mit der Kurve L_2 als Meridian. Sodann tordieren wir den Zylinder um π und setzen ihn wieder ein, nachdem wir vorher den rechten Torus um π gedreht haben. Die entstehende Flächenabbildung bezeichnen wir mit ω_2.

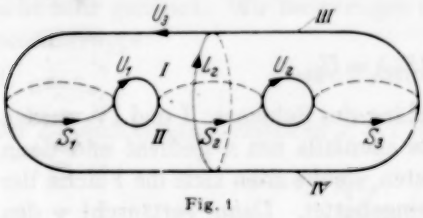


Fig. 1

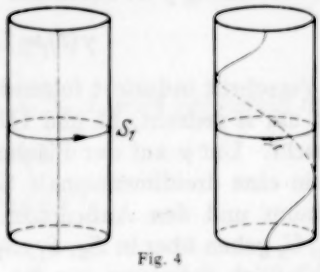


Fig. 4

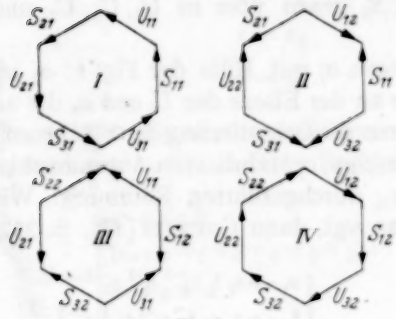


Fig. 2

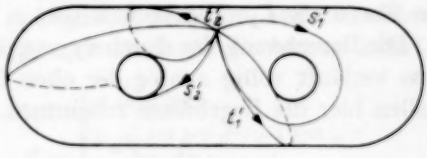


Fig. 5

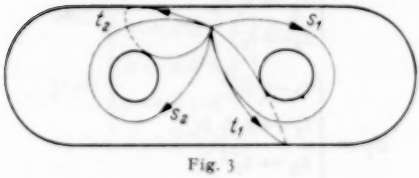


Fig. 3

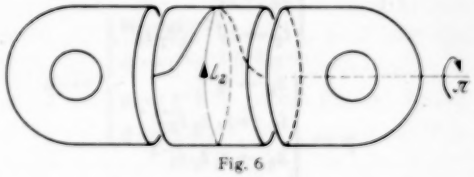


Fig. 6

Schließlich definieren wir einige Abbildungen, die das Schema der Fig. 2 insgesamt in sich überführen und die zusammen eine endliche Gruppe der Ordnung 48 erzeugen.

Die Abbildung α definieren wir im Schema der Fig. 2 durch

$$\alpha(I) = I, \qquad \alpha(S_{11}) = S_{21}.$$

Man verifiziert ohne Mühe, daß sich diese Abbildung eindeutig zu einer inzidenzerhaltenden Abbildung des gesamten Schemas fortsetzen läßt. Sie läßt sich so beschreiben: alle Sechsecke werden jeweils um $\frac{2}{3}\pi$ gedreht. Für die Fläche bedeutet α eine zyklische Vertauschung der drei zu S_1, S_2, S_3 gehörigen Arme. Die Kurven U_i werden gleichfalls zyklisch vertauscht.

Die Abbildung β definieren wir so:

$$\beta(I) = \mathrm{III}, \qquad \beta(S_{11}) = S_{12}.$$

Auch diese Abbildung setzt sich eindeutig zu einer inzidenzerhaltenden Abbildung des ganzen Schemas fort. Das Schema wird an einer Geraden so gespiegelt, daß jeweils die Sechsecke I und III bzw. II und IV vertauscht werden. In der Fläche bedeutet β eine Vertauschung der zu S_2, S_3 gehörigen Arme, wobei der zu S_1 gehörige Arm festbleibt. Die Kurven U_1, U_2, U_3 gehen über in U_3^{-1}, U_2^{-1}, U_1^{-1}.

Die Abbildung γ ist bestimmt durch

$$\gamma(I) = \mathrm{I}, \qquad \gamma(S_{11}) = U_{21}.$$

Diese Vorschrift induziert folgende Abbildung des Schemas: I und IV werden jeweils um π gedreht, II und III werden ebenfalls um π gedreht und dann vertauscht. Um γ auf der Fläche zu deuten, denke man sich die Fläche der Fig. 1 in eine dreidimensionale Sphäre eingebettet. Dann vertauscht γ den Innenraum und den Außenraum. S_1, S_2, S_3 gehen über in U_2, U_3, U_1 und U_1, U_2, U_3 gehen über in S_3, S_1, S_2.

Schließlich definieren wir die Abbildungen σ_i mit Hilfe der Fig. 1: σ_1 sei die Spiegelung an der Ebene der S_i, σ_2 die an der Ebene der U_i und σ_3 die an der Ebene von L_2. Die Abbildungen σ_i kehren die Orientierung der Fläche um.

Die Berechnung der durch τ_{S_i}, τ_{U_i}, ω_2, α, β, γ, σ_i induzierten Automorphismen verläuft völlig analog der oben für τ_{S_1} durchgeführten Rechnung. Wir stellen hier die Ergebnisse zusammen. Man vgl. dazu GOERITZ [13], S. 252.

$$\alpha = \begin{cases} s_1 \to s_2^{-1} s_1^{-1} \\ t_1 \to s_1 s_2 t_2^{-1} s_2^{-1} s_1^{-1} \\ s_2 \to s_1 \\ t_2 \to t_2^{-1} s_1 t_1 s_1^{-1}, \end{cases} \qquad \beta = \begin{cases} s_1 \to s_1 t_1 s_1^{-1} t_1^{-1} s_1^{-1} \\ t_1 \to s_1 s_2 t_2 s_2^{-1} t_1^{-1} s_1^{-1} \\ s_2 \to s_1 s_2 \\ t_2 \to t_2, \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} s_1 \to t_2^{-1} \\ t_1 \to t_2 s_2 t_2^{-1} \\ s_2 \to s_1 t_1 s_1^{-1} \\ t_2 \to s_1^{-1}, \end{cases} \qquad \sigma_1 = \begin{cases} s_1 \to s_1^{-1} \\ t_1 \to s_1 t_1 s_1^{-1} \\ s_2 \to s_2^{-1} \\ t_2 \to s_2 t_2 s_2^{-1}, \end{cases}$$

$$\sigma_2 = \begin{cases} s_1 \to t_2^{-1} s_1 s_2 t_2 s_2^{-1} \\ t_1 \to s_2 t_2^{-1} s_2^{-1} t_1^{-1} s_2 t_2 s_2^{-1} \\ s_2 \to s_2 \\ t_2 \to t_2^{-1}, \end{cases} \qquad \sigma_3 = \begin{cases} s_1 \to s_2^{-1} \\ t_1 \to s_2 t_2 s_2^{-1} \\ s_2 \to s_1^{-1} \\ t_2 \to s_1 t_1 s_1^{-1}, \end{cases}$$

$$\tau_{S_1} = \begin{cases} s_1 \to s_1 \\ t_1 \to t_1 \\ s_2 \to s_2 t_2^{-1} \\ t_2 \to t_2, \end{cases} \qquad \tau_{U_1} = \begin{cases} s_1 \to s_1 \\ t_1 \to t_1 s_1 \\ s_2 \to s_2 \\ t_2 \to t_2, \end{cases} \qquad \omega_2 = \begin{cases} s_1 \to s_1 t_1 s_1^{-1} t_1^{-1} s_1^{-1} \\ t_1 \to s_1 t_1^{-1} s_1^{-1} \\ s_2 \to s_2 \\ t_2 \to t_2. \end{cases}$$

Die τ_{S_i} und die τ_{U_i} hängen mit α zusammen vermöge der Relationen

$$\alpha^{-1} \tau_{U_i} \alpha = \tau_{U_{i-1}}, \qquad \alpha^{-1} \tau_{S_i} \alpha = \tau_{S_{i-1}} \qquad (i = 1, 2, 3;\ i - 1 : \mathrm{mod}\ 3).$$

BAER, GOERITZ und vor ihnen DEHN und NIELSEN haben bewiesen, daß die Abbildungen $\tau_{S_i}, \tau_{U_i}, \omega_2, \alpha, \beta, \gamma, \sigma_j$ die Abbildungstypengruppe erzeugen. Wir verzichten hier auf einen eigenen Vollständigkeitsbeweis und beziehen uns auf diese Autoren.

3. Für unsere Zwecke ist die oben angegebene Form der Automorphismen nicht sehr geeignet. Wir bevorzugen die symmetrische Definition der Fundamentalgruppe:

$$a\,b\,c\,d\,a^{-1}\,b^{-1}\,c^{-1}\,d^{-1} = 1. \tag{1}$$

Der Zusammenhang zwischen a, b, c, d und s_1, t_1, s_2, t_2 wird hergestellt durch:

$$\begin{aligned} a &= t_1^{-1}\,s_2\,t_2 & s_1 &= a\,b \\ b &= t_2^{-1}\,s_2^{-1}\,t_1\,s_1, & t_1 &= c\,d\,a^{-1}. \\ c &= s_2 & s_2 &= c \\ d &= t_2 & t_2 &= d \end{aligned}$$

Wir rechnen die Automorphismen $\tau_S, \tau_U, \omega_2, \alpha, \beta, \gamma, \sigma_j$ um auf die neuen Erzeugenden a, b, c, d. Das Ergebnis dieser elementaren Rechnung lautet:

$$\alpha = \begin{cases} a \to d\,c\,b \\ b \to b^{-1}\,c^{-1}\,d^{-1}\,c^{-1}\,b^{-1}\,a^{-1} \\ c \to a\,b \\ d \to c\,a^{-1}, \end{cases} \qquad \beta = \begin{cases} a \to d\,c\,b\,c \\ b \to c^{-1}\,b^{-1}\,d^{-1}\,c^{-1}\,b^{-1}\,a^{-1} \\ c \to a\,b\,c \\ d \to d, \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} a \to d\,a^{-1}\,b^{-1}\,a^{-1} \\ b \to a\,b\,a\,d^{-2} \\ c \to d\,c\,a^{-1} \\ d \to b^{-1}\,a^{-1}, \end{cases} \qquad \sigma_1 = \begin{cases} a \to a\,c^{-2} \\ b \to c^2\,a^{-1}\,b^{-1}\,a^{-1} \\ c \to c^{-1} \\ d \to c\,d\,c^{-1}, \end{cases}$$

$$\sigma_2 = \begin{cases} a \to c\,a^{-1}\,c \\ b \to c^{-1}\,a\,b\,a\,c^{-1} \\ c \to c \\ d \to d^{-1}, \end{cases} \qquad \sigma_3 = \begin{cases} a \to c\,a^{-1}\,b^{-1}\,a^{-1} \\ b \to a\,b\,a\,c^{-2} \\ c \to b^{-1}\,a^{-1} \\ d \to d\,c\,a^{-1}, \end{cases}$$

$$\tau_{S_1} = \begin{cases} a \to a\,d^{-1} \\ b \to d\,b \\ c \to c\,d^{-1} \\ d \to d, \end{cases} \qquad \tau_{U_1} = \begin{cases} a \to b^{-1} \\ b \to b\,a\,b \\ c \to c \\ d \to d, \end{cases}$$

$$\omega_2 = \begin{cases} a \to d\,c\,a^{-1}\,c\,d \\ b \to d^{-1}\,c^{-1}\,b^{-1}\,c^{-1}\,d^{-1} \\ c \to c \\ d \to d. \end{cases}$$

4. Schneidet man die Fläche F_2 längs der in 3. definierten Kurven a, b, c, d auf, so entsteht ein gewisses Fundamentalpolygon mit dem Randweg $a\,b\,c\,d\,a^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$. Wir haben es in Fig. 7 dargestellt.

Für das weitere ziehen wir einen auf H. POINCARÉ zurückgehenden Gedanken heran. Er besagt folgendes: Die hyperbolische Ebene läßt eine Pflasterung mit regulären Achtecken zu. Dabei stoßen jeweils 8 Achtecke in einem Punkt zusammen. Zwei benachbarte Seiten eines Achtecks schließen also einen Winkel von 45° ein; die Winkelsumme des Achtecks beträgt 360°.

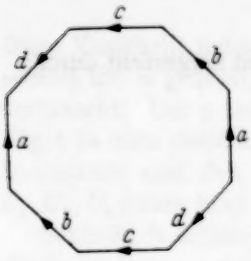


Fig. 7

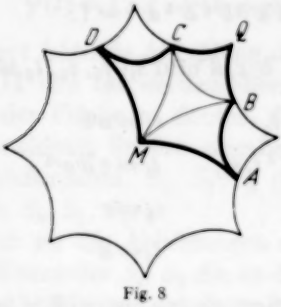


Fig. 8

Man kann nun diese Pflasterung auffassen als universelle Überlagerung der Fläche F_2. Weiter kann man die Deckbewegungsgruppe, die zur Fundamentalgruppe isomorph ist, auffassen als eine Gruppe von hyperbolischen Bewegungen, die die Achteckspflasterung auf sich abbildet und einfach transitiv auf den Achtecken operiert. Der Kantenkomplex der Achteckspflasterung ist gerade das Cayley-Dehnsche Gruppenbild der Fundamentalgruppe.

Die Elemente der Deckbewegungsgruppe sind als hyperbolische Bewegungen sämtlich Schiebungen längs gewisser Achsen. Wir wollen den Isomorphismus zwischen der hyperbolischen Bewegungsgruppe und der Fundamentalgruppe explizit herstellen. Wir fassen dazu das Achteck der Fig. 7 auf als Grundachteck in der hyperbolischen Ebene. Dem Element a der Fundamentalgruppe ordnen wir die Schiebung zu, die das Grundachteck abbildet auf das ihm längs a rechts benachbarte. b wird die Schiebung zugeordnet, die auf das längs b links benachbarte Achteck führt, die c zugeordnete Schiebung führt auf das längs c rechts benachbarte Achteck und die d zugeordnete auf das längs d links angrenzende Achteck. Man bestätigt ohne Mühe, daß bei dieser Zuordnung dem Element $a\,b\,c\,d\,a^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$ die identische Schiebung entspricht, die zu einem einmaligen Umlauf um einen gewissen Eckpunkt des Grundachtecks gehört. Man vgl. im übrigen THRELFALL [21].

Wir wollen nun den Begriff der Punktspiegelung heranziehen. Man zerlege dazu entsprechend Fig. 8 das Grundachteck und die übrigen Achtecke in reguläre Dreiecke mit einer Winkelsumme von jeweils 135° und führe die Eckpunkte dieser Dreiecke ein. Die Bezeichnung ist durch Fig. 8 festgelegt.

Wir benutzen im folgenden die in der Spiegelungsgeometrie geläufige Terminologie, die bei BACHMANN [4], §3, 1—3 ausführlich begründet wird. Ein Punkt und die Spiegelung an diesem Punkt werden sprachlich nicht unterschieden. In diesem Sinne kann man z.B. von Produkten von Punkten sprechen.

Die in Fig. 8 eingeführten Punkte erzeugen eine gewisse hyperbolische Bewegungsgruppe $\mathfrak{P}$, die die Achteckspflasterung auf sich abbildet. Sie ist

Obergruppe der Deckbewegungsgruppe vom Index 2. Den Erzeugenden a, b, c, d entsprechen die Punktprodukte:

$$(2)\qquad \begin{cases} a = MA \\ b = BM \\ c = MC \\ d = DM. \end{cases}$$

Setzt man diese Produkte in die Relation (1) ein, so erhält man

$$(MABCD)^2 = 1.$$

Das Produkt $MABCD$ ist also in der Punktspiegelungsgruppe involutorisch. In der hyperbolischen Ebene verifiziert man leicht, daß es in unserer Bezeichnungsweise der Punkt $Q^{CD} = DCQCD$ ist

Zwischen den Punkten M, A, B, Q, C, D besteht also die Spiegelungsgleichung

$$(3)\qquad MABQCD = 1.$$

Wir wollen zeigen, daß die Relation (3) zusammen mit den Relationen

$$(4)\qquad M^2 = A^2 = B^2 = Q^2 = C^2 = D^2 = 1$$

schon die Gruppe $\mathfrak{P}$ abstrakt definiert. Dazu genügt die leicht mit dem REIDEMEISTER-Verfahren zu bestätigende Bemerkung, daß die durch (3) und (4) abstrakt definierte Gruppe eine Untergruppe vom Index 2 besitzt, die

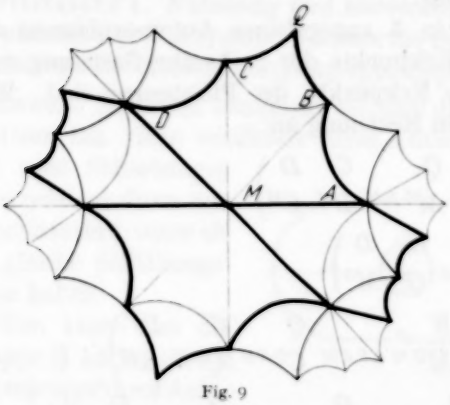


Fig. 9

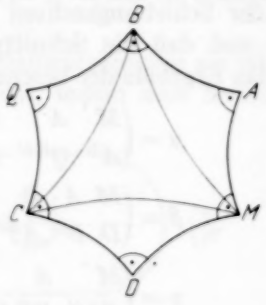


Fig. 10

aus allen geraden Produkten von Erzeugenden besteht und diese Gruppe von durch (2) zu erklärenden Elementen a, b, c, d erzeugt und durch die Relation (1) definiert wird.

Die Gl. (3) führt uns dazu, unsere unterteilte Pflasterung gemäß Fig. 9 aufzufassen als die Unterteilung einer Pflasterung mit Sechsecken. Grundsechseck sei das Sechseck $MABQCD$. Jeweils vier Sechsecke stoßen in einem Punkt zusammen.

Die vier in Fig. 9 dargestellten Sechsecke bilden einen Bereich, den man als Fundamentalbereich der Deckbewegungsgruppe auffassen kann. Dieser

Auffassung entspricht genau die in Fig. 2 durchgeführte Zerlegung der Fläche F_2 in vier Sechsecke.

In unserer Pflasterung erscheinen die Sechsecke irregulär. Das Grundsechseck hat nämlich abwechselnd Winkel von 45° und 135°. Wir wollen deshalb, entsprechend Fig. 10, zu einer regulären Pflasterung mit Sechsecken übergehen. Je zwei benachbarte Seiten eines Sechsecks bilden einen Winkel von 90°. In dieser Pflasterung ist die Spiegelungsgleichung (3) erfüllt.

Die Achtecke erscheinen in dieser Pflasterung irregulär. Im übrigen sind beide Pflasterungen bezüglich der Inzidenzen der Punkte und Geraden und Polygone isomorph.

Wir bemerken noch, daß die Punktspiegelungsgruppe $\mathfrak{P}$ eine DYCKsche Gruppe ist und daß die neue Pflasterung genau das zu dieser Gruppe gehörige Dycksche Gruppenbild ist.

5. Wir kehren nun zu den in **3.** angegebenen Automorphismen zurück. Wir wollen zeigen, daß sich diese Automorphismen eindeutig zu Automorphismen von $\mathfrak{P}$ fortsetzen lassen. Damit ist dann die ganze Automorphismengruppe von $\mathfrak{F}$ als Gruppe von Automorphismen von $\mathfrak{P}$ erwiesen. Da die Gruppe $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{P}$ charakteristisch ist, so ist die Automorphismengruppe von $\mathfrak{F}$ sogar genau die ganze Automorphismengruppe von $\mathfrak{P}$.

Wir gehen so vor: Man fasse die Punkte des Grundsechsecks auf als Schnittpunkte je zweier Schiebungsachsen, bestimme die Bilder der Schiebungsachsen und ermittle deren Schnittpunkte. Diese Schnittpunkte sind die Bildpunkte bezüglich des Automorphismus.

Es zeigt sich nun, daß für alle in **3.** angegebenen Automorphismen die Bilder der Schiebungsachsen stets Eckpunkte der Sechseckspflasterung verbinden und daß die Schnittpunkte Eckpunkte der Pflasterung sind. Wir geben das Ergebnis der beschriebenen Rechnung an:

$$\alpha = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ A^M & Q^{BM} & D^{CBM} & M^{CBM} & B^M & C^M \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ D & B^C & A^{BC} & C^{ABC} & Q^C & M^D \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ B^{AM} & D^{MABAM} & M^{DMABAM} & C^{QAM} & Q^{AM} & A^M \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ M^{CM} & A^{CMCM} & B^{ACMCM} & Q^{BACMCM} & C^{MCM} & D^{CM} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ M & A^C & B^{AC} & Q^{BAC} & C & D^M \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ B^{AM} & C^{ABAM} & M^{CABAM} & D^{CABAM} & A^{BAM} & Q^{BAM} \end{pmatrix},$$

$$\tau_{S_1} = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ D & A^{MD} & B^{MD} & Q^{MD} & C^{MD} & M^D \end{pmatrix},$$

$$\tau_{U_1} = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ M & B & A^B & Q & C & D \end{pmatrix},$$

$$\omega_2 = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ M & A^{QBA} & B^{QBA} & Q^{BA} & C & D \end{pmatrix}.$$

Die Potenzschreibweise ist so zu lesen: $Q^{BM} = MBQBM$.

Damit ist nun gezeigt:

Satz 1. *Die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{F}$ stimmt überein mit der Automorphismengruppe der Obergruppe $\mathfrak{P}$.*

Wir möchten den Satz 1 als eine Strukturaussage über die Abbildungstypengruppe verstehen. Deshalb werden wir zu Satz 1 ein Korollar formulieren. Wir benötigen dazu einen Hilfssatz.

Zunächst definieren wir den Automorphismus μ von $\mathfrak{F}$ durch

$$\mu = \begin{cases} a \to a^{-1} \\ b \to b^{-1} \\ c \to c^{-1} \\ d \to d^{-1}. \end{cases}$$

μ ist der von M in $\mathfrak{F}$ induzierte Automorphismus. In der Gruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ gilt $\mu = \sigma_1 \sigma_2$. Auf der Fläche F_2 bedeutet μ eine Drehung um π um die in Fig. 11 angegebene Achse.

Unser Hilfssatz lautet nun:

Hilfssatz 1. *Notwendig und hinreichend für die Fortsetzbarkeit aller Automorphismen von $\mathfrak{F}$ zu Automorphismen der Obergruppe $\mathfrak{P}$ ist, daß die Abbildung μ im Zentrum der Abbildungstypengruppe liegt.*

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß die Fundamentalgruppe ein triviales Zentrum hat. Man verifiziert diese Aussage leicht, indem man heranzieht, daß zwei Schiebungen dann und nur dann vertauschbar sind, wenn sie die gleiche Schiebungsachse haben.

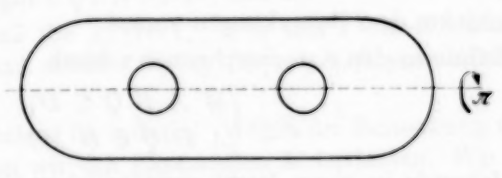


Fig. 11

Fig. 12

Man kann also die Gruppe $\mathfrak{F}$ auffassen als Untergruppe ihrer Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$, indem man $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{J}$ identifiziert. Die Punktspiegelungsgruppe $\mathfrak{P}$ erscheint ebenfalls als Untergruppe von $\mathfrak{A}$. Die Automorphismen aus $\mathfrak{A}$ erscheinen als Transformationen von $\mathfrak{F}$ mit Elementen aus $\mathfrak{A}$. Das zeigt, daß genau diejenigen Automorphismen von $\mathfrak{F}$, die mit $\mathfrak{P}$ vertauschbar sind, auch Automorphismen von $\mathfrak{P}$ sind.

Formuliert man diese Aussage in der Faktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{F}$, so ergibt sich, da das Bild von $\mathfrak{P}$ in dieser Faktorgruppe die Ordnung 2 hat, die Aussage des Hilfssatzes.

Vermittels des Hilfssatzes erhalten wir folgendes Korollar:

Korollar zu Satz 1. *Die Abbildung μ liegt im Zentrum der Abbildungstypengruppe.*

6. Wir wollen von dem in **5.** angegebenen Erzeugendensystem zu einem einfacheren Erzeugendensystem übergehen. Wir ziehen dazu die besonders einfachen Automorphismen vom Typ τ_{U_i} heran. Wir nennen sie *Scherungen* und definieren:

$$x_1 = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ A & M^A & B & Q & C & D \end{pmatrix},$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ M & B & A^B & Q & C & D \end{pmatrix},$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ M & A & Q & B^Q & C & D \end{pmatrix},$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ M & A & B & C & Q^C & D \end{pmatrix},$$

$$x_5 = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ M & A & B & Q & D & C^D \end{pmatrix}.$$

Der zu x_1 inverse Automorphismus ist

$$x_1^{-1} = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ A^M & M & B & Q & C & D \end{pmatrix};$$

entsprechendes gilt für die anderen x_i.

Weiter definieren wir:

$$z = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ D & C & Q & B & A & M \end{pmatrix}.$$

Wir wollen zeigen, daß x_i $(i = 1, \ldots, 5)$ und z die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ erzeugen.

Wir schicken drei Bemerkungen voraus.

Wir definieren den Automorphismus y durch

$$y = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ A & B & Q & C & D & M \end{pmatrix}.$$

Wie die folgende in einem leicht verständlichen Schema zusammengestellte Rechnung zeigt, liegt y in der von den x_i erzeugten Gruppe.

Das Schema ist im Sinne der für die Automorphismen von $\mathfrak{P}$ benutzten Substitutionsschreibweise zu lesen.

$$\begin{array}{llllll} M\,A & B & Q & C & D \\ A\,M^A & B & Q & C & D \\ A\,B & M^{AB} & Q & C & D \\ A\,B & Q & M^{ABQ} & C & D \\ A\,B & Q & C & M^{ABQC} & D \\ A\,B & Q & C & D & M^{ABQCD} = M. \end{array}$$

Weiter bemerken wir, daß die inneren Automorphismen von $\mathfrak{P}$ in der von den x_i erzeugten Gruppe liegen. Wir geben folgende Rechnung an:

$$\begin{array}{llllll} M & A & B & Q & C & D \\ A^M & M & B & Q & C & D \\ A^M & B^M & M & Q & C & D \\ A^M & B^M & Q^M & M & C & D \\ A^M & B^M & Q^M & C^M & M & D \\ A^M & B^M & Q^M & C^M & D^M & M. \end{array}$$

Zusammen mit der Bemerkung über y folgt daraus, daß die inneren Automorphismen von den x_i erzeugt werden.

Schließlich bemerken wir noch, daß auch die Scherung

$$x_6 = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ D^M & A & B & Q & C & M \end{pmatrix}$$

in der von den x_i $(i=1, \ldots, 5)$ erzeugten Gruppe liegt. Dazu führen wir folgende Rechnung durch:

$$\begin{array}{llllll} M & A & B & Q & C & D \\ A & B & Q & C & D & M \\ A & B & Q & D^C & C & M \\ A & B & D^{CQ} & Q & C & M \\ A & D^{CQB} & B & Q & C & M \\ D^{CQBA} & A & B & Q & C & M. \end{array}$$

Wegen $MABQCD=1$ gilt $CQBA=DM$, also $D^{CQBA}=D^M$.

Wir zeigen jetzt, daß die x_i $(i=1, \ldots, 5)$ und z die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ erzeugen. Dazu müssen wir $\tau_{S_i}, \tau_{U_i}, \omega_2, \alpha, \beta, \gamma, \sigma_j$ durch x_i und z ausdrücken.

Wir führen die Rechnung für α durch. Wegen der Bemerkung über innere Automorphismen können wir den Exponenten M fortlassen. Wir stellen die Rechnung wieder in einem Schema zusammen.

$$\begin{array}{llllll} M & A & B & Q & C & D \\ A^M & Q^{BM} & D^{CBM} & M^{CBM} & B^M & C^M \\ A & Q^B & D^{CB} & M^{CB} & B & C \\ A & Q^B & D^{CB} & B & M^C & C \\ A & Q^B & B & D^C & M^C & C \\ A & B & Q & D^C & M^C & C \\ A & B & Q & D^C & C & M \\ A & B & Q & C & D & M. \end{array}$$

Wegen der über y gemachten Bemerkung ist damit für α die Rechnung beendet. Für die anderen Erzeugenden verläuft die Rechnung völlig analog. Je nachdem, ob die Abbildung die Orientierung erhält oder nicht, erscheint am Schluß eine Potenz von y oder z und eine Potenz von y.

Damit ist gezeigt, daß x_i $(i=1, \ldots, 5)$ und z die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ erzeugen. Wie man leicht sieht, lassen sich x_2, x_3, x_4, x_5 durch x_1 und y ausdrücken:

$$y^j x_1 y^{-j} = x_{j+1} \qquad (j = 1, \ldots, 4).$$

Also haben wir folgendes Ergebnis:

Satz 2. *Die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ wird von den drei Elementen $x = x_1$, y, z erzeugt. Die Elemente x, y erzeugen die Untergruppe $\mathfrak{A}^+$ der Automorphismengruppe vom Index 2, die zu den orientierungserhaltenden Abbildungen gehört.*

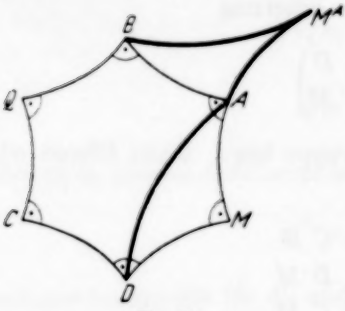


Fig. 13

Da wir die Scherungen x_i später benötigen, so formulieren wir über sie ein Korollar.

Korollar zu Satz 2. *Die Scherungen x_i $(i=1, \ldots, 6)$ an den sechs Seiten des Grundsechsecks und die Spiegelung z an einer Symmetrieachse erzeugen die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$.*

In Fig. 13 haben wir die Scherung x_1 am Grundsechseck dargestellt. Die inverse Scherung x_1^{-1} erfolgt auf der Geraden (A, M) zur anderen Seite.

7. Wir werden nun einige Betrachtungen in der hyperbolischen Ebene anstellen, die im Anschluß an das Korollar zu Satz 2 zu einer geometrischen Kennzeichnung der Automorphismen führen werden.

Wir definieren den Begriff der *Konvexität* eines Sechsecks in der hyperbolischen Ebene wie folgt. Jede Seite des Sechsecks bestimmt eine Gerade, auf der sie nämlich liegt. Diese Gerade zerlegt die hyperbolische Ebene in zwei Halbebenen. Ein Sechseck soll nun konvex heißen, wenn zu jeder Sechseckseite 4 Punkte des Sechsecks sämtlich in einer durch die Seite definierten Halbebene liegen.

Wir bemerken, daß das Grundsechseck konvex ist. Wir wollen zeigen, daß diese Eigenschaft bei Automorphismen erhalten bleibt.

Hilfssatz 2. *Ein Automorphismus bildet das Grundsechseck ab auf ein gewisses Sechseck des Punktnetzes, das konvex ist.*

Zum Beweis des Hilfssatzes 2 ziehen wir das Korollar zu Satz 2 heran. Zwischen das Grundsechseck und das Bildsechseck bezüglich eines Automorphismus läßt sich eine Folge von Sechsecken schalten, derart, daß je zwei aufeinanderfolgende Sechsecke durch eine Scherung auseinander hervorgehen. Eventuell muß an den Anfang der Folge die Spiegelung z treten.

Für z gilt der Hilfssatz 2. Wir haben ihn also vollständig bewiesen, wenn wir zeigen, daß er für eine Scherung gilt. Dazu genügt folgende Aussage:

Hilfssatz 3. *In einem konvexen Sechseck, in dem das Produkt der Ecken, in zyklischer Reihenfolge, die Identität ist, schneiden sich nichtbenachbarte Seiten nicht.*

Der Hilfssatz 3 stellt nämlich sicher, daß man auf ein konvexes Sechseck mit dem Eckenprodukt 1 Scherungen anwenden kann, ohne die Konvexität zu zerstören.

Wir beweisen nun den Hilfssatz 3. Es sei A, B, C, D, E, F ein konvexes Sechseck mit dem Eckenprodukt $ABCDEF=1$. Die Geraden (A, B) und (C, D) mögen sich in Z schneiden (Fig. 14). Dann gibt es zu A, B, Z einen ebenfalls auf (A, B) liegenden Punkt Y derart, daß gilt

$$YZ = AB. \tag{5}$$

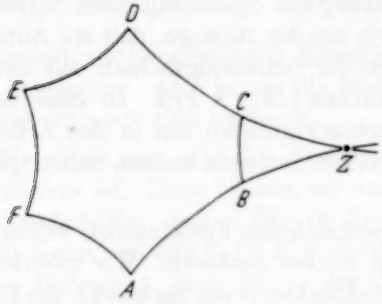


Fig. 14

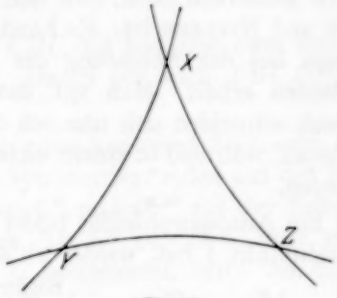


Fig. 15

Weiter gibt es zu D, C, Z einen ebenfalls auf (C, D) liegenden Punkt X mit

$$ZX = CD. \tag{6}$$

Man vgl. zu diesen beiden Aussagen BACHMANN [4], § 7, 1, Sätze S und S'.

Schließlich folgt aus $ABCDEF=1$ und (5), (6) noch

$$XY = EF. \tag{7}$$

Daher liegen X und Y auch auf (E, F) (BACHMANN [4], § 7, 1, Satz U). Wir betrachten nun das von X, Y, Z aufgespannte Dreieck (Fig. 15). Die Geraden (X, Y), (X, Z), (Y, Z) sind Geraden des Sechsecks. E, F können nicht auf verschiedenen Seiten von (X, Z) liegen, wegen der Konvexität. Ebenso können E, F nicht auf verschiedenen Seiten von (Y, Z) liegen.

E, F können nicht beide zwischen X und Y liegen, da dann die Spiegelungsgleichung (7) nicht besteht.

Also: Wenn E, F auf der Seite von (Y, Z) liegen, auf der X liegt, so liegen sie auch auf der Seite von (X, Z), auf der Y nicht liegt und umgekehrt.

Den entsprechenden Schluß kann man für die anderen Paare vollziehen.

1. E, F, C, D mögen auf der Seite von (Y, Z) liegen, auf der X liegt. Dann liegen E, F auch auf der Seite von (X, Z) ,auf der Y nicht liegt. Dann müssen A, B wegen der Konvexität auf der Seite von (X, Z) liegen, auf der Y nicht liegt. Dann liegen A, B auf der Seite von (X, Y), auf der Z liegt. Da aber

C, D auf der Seite von (Y, Z) liegen, auf der X liegt, so liegen sie auf der Seite von (X, Y), auf der Z nicht liegt. Also liegen A, B und C, D auf verschiedenen Seiten von (X, Y), im Widerspruch zur Konvexität.

2. E, F, C, D mögen auf der Seite von (Y, Z) liegen, auf der X nicht liegt. Wir führen ein völlig analoges Schlußschema durch, indem wir in 1. die Aussagen „liegt" und „liegt nicht" vertauschen und gelangen wieder zu einem Widerspruch gegen die Konvexität. Damit ist bewiesen, daß der Schnittpunkt Z in Fig. 14 nicht existiert. Ebenso schneiden sich die Geraden (A, B) und (E, F) nicht. Daraus folgt, daß sich auch (A, B) und (E, D) nicht schneiden. Da die Gerade (A, B) nicht ausgezeichnet war, so gilt entsprechendes für die anderen Geraden. Damit ist der Beweis von Hilfssatz 3 und auch von Hilfssatz 2 beendet.

Wir bemerken noch, daß der Hilfssatz 2 ein Spezialfall eines Satzes von DEHN und NIELSEN ist. Es handelt sich um die Aussage, daß ein Automorphismus bei der Abbildung der Menge der Schiebungsachsen auf sich die Inzidenzen erhält. Man vgl. dazu NIELSEN [*14*], S. 239. In dem Grundsechseck schneiden sich nämlich die Sechsecksgeraden nur in den Ecken des Sechsecks, während in einem nicht-konvexen Sechseck weitere Schnittpunkte existieren.

8. Ein Automorphismus bildet ein Sechseck des Punktnetzes, welches das Eckenprodukt 1 hat, wieder ab auf ein solches Sechseck. Wir möchten die Eigenschaft eines konvexen Sechsecks, das Eckenprodukt 1 zu haben, konfigurativ verstehen.

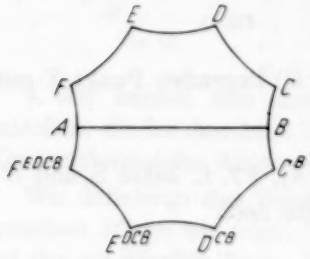


Fig. 16

Dazu betrachten wir ein konvexes Sechseck A, B, C, D, E, F mit $ABCDEF = 1$ (Fig. 16). Wir definieren den Begriff des *Gegensechsecks*. Dazu zeichnen wir eine Kante (A, B) aus. Wir tragen auf der Geraden (C, B) die Strecke (C, B) von B aus nach unten ab. Der neue Punkt ist im Spiegelungskalkül C^B. Sodann tragen wir in C^B nach links unter dem zum Winkel $\sphericalangle(B, C, D)$ gehörigen Supplementwinkel die Strecke (C, D) an. Wir gelangen zum Punkte D^{CB}. Weiter gelangen wir mit den Strecken (E, D) und (F, E) und den entsprechenden Supplementwinkeln zu den Punkten E^{DCB} und F^{EDCB}. Fahren wir mit der Konstruktion fort, so schließt sich die Figur in A wegen $A^{FEDCB} = A$. Weiter gilt $F^{EDCB} = F^A$.

Das Sechseck $A, B, C^B, D^{CB}, E^{DCB}, F^{EDCB}$ hat also dieselben Seitenlängen wie A, B, C, D, E, F und die jeweiligen Supplementwinkel. Wir nennen dieses Sechseck das zu A, B, C, D, E, F gehörige *Gegensechseck*. Beginnen wir statt mit der Kante (A, B) mit einer anderen, so erhalten wir offenbar ein kongruentes Gegensechseck.

Wir bemerken noch, daß die Beziehung Sechseck — Gegensechseck eine reziproke ist: das Gegensechseck zum Gegensechseck ist das ursprüngliche Sechseck.

Wir formulieren nun mit Hilfe des Gegensechsecks die Eigenschaft, daß das Eckenprodukt 1 ist, als Schließungssatz.

Hilfssatz 4. *Notwendig und hinreichend dafür, daß an einem konvexen Sechseck das Spiegelungsprodukt an den Ecken, in zyklischer Reihenfolge, die Identität ergibt, ist, daß sich das Gegensechseck mit denselben Seitenlängen und den jeweiligen Supplementwinkeln schließt.*

Beweis. Daß das Kriterium notwendig ist, wurde bereits gezeigt. Um zu zeigen, daß es auch hinreichend ist, hat man offenbar nur zu zeigen, daß aus $A^{FEDCB}=A$ und $F^{EDCB}=F^{A}$ folgt $ABCDEF=1$. Die beiden obigen Bedingungen kann man auch so schreiben:

$$A^{FEDCBA}=A,$$

$$F^{FEDCBA}=F.$$

Die eigentliche hyperbolische Bewegung $FEDCBA$ hat also zwei verschiedene Fixpunkte. Also ist sie die Identität. Damit gilt auch $ABCDEF=1$ und der Hilfssatz 4 ist bewiesen.

Wir zeigen nun, daß das Gegensechseck eines konvexen Sechsecks ebenfalls konvex ist. Dazu können wir uns aus Symmetriegründen auf den Nachweis beschränken, daß in Fig. 16 die Punkte C^{B} und D^{CB} auf der Seite von (A, B) liegen, auf der C, D, E, F nicht liegen. Da D^{C} auf (D, C) liegt, gehört wegen Hilfssatz 3 auch D^{C} zu der durch C bestimmten Seite von (A, B). Folglich liegen die Spiegelpunkte C^{B} und D^{CB} auf der anderen Seite.

Das Sechseck und das Gegensechseck bilden also zusammen ein konvexes Achteck. Der Flächeninhalt dieses Achtecks ist, wegen der Supplementwinkel des Gegensechsecks, unabhängig von der speziellen Gestalt des Sechsecks und beträgt 2π. Diese letzte Bemerkung führt uns nun zu einer konfigurativen Kennzeichnung der Automorphismen.

Satz 3. *Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Sechseck des Punktnetzes als Bild des Grundsechsecks einen Automorphismus definiert, ist folgendes:*

1. das Produkt der Spiegelungen an den Ecken des Sechsecks, in zyklischer Reihenfolge, ist die Identität;

2. das Sechseck ist konvex.

Zwei Sechsecke, die vermöge von Bewegungen aus der Punktspiegelungsgruppe kongruent sind, führen zu Automorphismen, die sich nur um einen inneren Automorphismus unterscheiden.

Beweis zu Satz 3. Daß das in Satz 3 ausgesprochene Kriterium notwendig ist, wurde bereits gezeigt. Wir wollen beweisen, daß es auch hinreichend ist.

Das Sechseck bildet zusammen mit seinem Gegensechseck ein konvexes Achteck mit dem Flächeninhalt 2π. Mit diesen Achtecken können wir die hyperbolische Ebene pflastern. Wir bleiben dabei ganz auf dem Punktnetz. Wir haben also eine Abbildung des Punktnetzes in sich hergestellt, die ein Isomorphismus der Punktgruppe in sich ist. Zu zeigen ist noch, daß dieser Isomorphismus nicht die Punktgruppe abbildet auf eine echte Untergruppe.

Wenn ein echter Isomorphismus in die Punktgruppe vorliegt, so gibt es mindestens einen Punkt, der im Innern des Achtecks liegt. Der zur Pflasterung mit den Achtecken gehörige Fundamentalbereich ist gleichzeitig Deckbereich der Punktgruppe $\mathfrak{P}$. Da er einen Punkt des Netzes im Innern enthält, so muß er mindestens zwei Fundamentalbereiche der Punktspiegelungsgruppe umfassen. Dem widerspricht die Tatsache, daß das Achteck einen Flächeninhalt 2π hat. Also fällt die Pflasterung mit Achtecken mit dem Punktnetz zusammen.

Die in Satz 3 ausgesprochene Bemerkung über kongruente Sechsecke ist evident. Damit ist der Satz 3 bewiesen.

9. Wir greifen nun auf Abschnitt 6 zurück. Die dort angegebenen Schemata zur Umrechnung von Erzeugenden der Automorphismengruppe $\mathfrak{A}^+$ sind ihrer Struktur nach mit Artinschen Zöpfen verwandt.

Wir wollen diesen Zusammenhang präzisieren und betrachten die Zopfgruppe mit sechs Fäden.

Die Zopfgruppe läßt sich nach ARTIN [*1*] treu darstellen als eine Gruppe von Automorphismen der freien Gruppe. Den Erzeugenden, die geometrisch Überkreuzungen oder Unterkreuzungen zweier benachbarter Fäden sind, entsprechen die Substitutionen

$$(8)\qquad x_i' = \begin{pmatrix} t_\nu & t_i & t_{i+1} \\ t_\nu & t_{i+1} & t_{i+1}^{-1} t_i t_{i+1} \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} (\nu = 1, \ldots, 6;\ \nu \neq i,\ i+1) \\ (i = 1, \ldots, 5). \end{matrix}$$

Die t_i $(i = 1, \ldots, 6)$ erzeugen eine freie Gruppe vom Rang 6. Die Substitutionen x_i' genügen den Relationen

$$(9)\qquad \begin{cases} x_i' x_k' = x_k' x_i'; & (|i-k| \geqq 2;\ i, k = 1, \ldots, 5) \\ x_{i+1}' x_i' x_{i+1}' = x_i' x_{i+1}' x_i'; & (i = 1, \ldots, 4) \end{cases}$$

Die Relationen (9) definieren die Zopfgruppe als abstrakte Gruppe. Ein Vergleich der Erzeugenden x_i' der Zopfgruppe und der Erzeugenden x_i der Gruppe $\mathfrak{A}^+$ der zu den orientierungserhaltenden Abbildungen gehörigen Automorphismen führt zu der Aussage:

Hilfssatz 5. *Die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}^+$ ist homomorphes Bild der Zopfgruppe mit sechs Fäden.*

Beweis. Der Homomorphismus wird durch die Zuordnung von x_i zu x_i' $(i = 1, \ldots, 5)$ hergestellt. Wir haben nur zu prüfen, ob die x_i auch dem Relationensystem (9) genügen. Davon überzeugt aber eine leichte Rechnung, die wir hier übergehen können. Damit ist der Hilfssatz 5 bewiesen.

Wir wollen nun den Kern des Homomorphismus zwischen der Zopfgruppe und der Automorphismengruppe $\mathfrak{A}^+$ bestimmen. Der Homomorphismus ist dadurch gekennzeichnet, daß gewissen in der Zopfgruppe von der Identität verschiedenen Substitutionen der identische Automorphismus in $\mathfrak{A}^+$ entspricht. Sollen gewisse in der Zopfgruppe von 1 verschiedene Substitutionen gleich der Identität werden, so impliziert dies gewisse Relationen zwischen den Elementen t_i.

Durch eine leichte Rechnung erhält man in der Zopfgruppe:

$$X = x_1' x_2' x_3' x_4' x_5' = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 \\ t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 & t_1^R \end{pmatrix}; \qquad R = t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6$$

und

$$X^6 = \begin{pmatrix} t_i \\ t_i^R \end{pmatrix}, \qquad (i = 1, \ldots, 6).$$

In der Automorphismengruppe $\mathfrak{A}^+$ entspricht X^6 der identische Automorphismus. Das impliziert die Relationen

$$t_i^R = t_i \qquad (i = 1, \ldots, 6). \tag{10}$$

Weiter folgt

$$Y = x_1' x_2' x_3' x_4' x_5'^2 x_4' x_3' x_2' x_1' = \begin{pmatrix} t_1 & t_j \\ t_1^R & t_j^{R^{-1}} \end{pmatrix}; \qquad (j = 2, \ldots, 6)$$

und

$$Y^2 = \begin{pmatrix} t_1 & t_j \\ t_1^{R^2} & t_j^{R^{-1} t_1 R^{-1} t_1 R^2} \end{pmatrix}; \qquad (j = 2, \ldots, 6).$$

In $\mathfrak{A}^+$ entspricht Y^2 ebenfalls der identische Automorphismus. Daraus folgt in Verbindung mit (10):

$$t_i^{R^2} = t_i, \qquad (i = 1, \ldots, 6) \tag{11}$$

entsprechend folgt aus $X^\nu\, Y^2\, X^{-\nu}$

$$t_i^{R^{2\nu+1}} = t_i, \qquad (i = 1, \ldots, 6;\ \nu = 1, \ldots, 5). \tag{12}$$

Nun sind Substitutionsgruppen vom Typ der durch (8) erzeugten Gruppe über Gruppen mit isomorphen Zentrumsfaktorgruppen isomorph.

Die Punktspiegelungsgruppe $\mathfrak{P}$ besitzt nur ein triviales Zentrum. Diese Aussage sieht man leicht in der hyperbolischen Ebene ein: Eine Bewegung aus dem Zentrum müßte mit zwei verschiedenen Punkten A, B vertauschbar sein, diese also zu Fixpunkten haben; also muß sie die Identität sein.

Also haben die durch (10), (11), (12) definierte Gruppe und die Punktspiegelungsgruppe $\mathfrak{P}$ isomorphe Zentrumsfaktorgruppen. Also sind die auf ihnen durch die Substitutionen vom Typ (8) erzeugten Substitutionsgruppen isomorph.

Wir formulieren das Ergebnis.

Satz 4. *Die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}^+$ wird als abstrakte Gruppe definiert durch die Relationen*

$$x_i x_k = x_k x_i, \qquad (|i - k| \geqq 2;\ i, k = 1, \ldots, 5), \tag{13}$$

$$x_{i+1} x_i x_{i+1} = x_i x_{i+1} x_i, \qquad (i = 1, \ldots, 4), \tag{14}$$

$$(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)^6 = 1, \tag{15}$$

$$(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5^2 x_4 x_3 x_2 x_1)^2 = 1. \tag{16}$$

Der Übergang von $\mathfrak{A}^+$ zu $\mathfrak{A}$ ist eine zerfallende Erweiterung; Vertretergruppe ist $(1, z)$. Die Erweiterung ist durch den von z in $\mathfrak{A}^+$ induzierten Automorphismus vollständig bestimmt.

Wir wollen die Zöpfe, zu denen der identische Automorphismus gehört, noch geometrisch erläutern.

Zur Relation (15) gehört der Toruszopf mit der Verdrillingszahl 6. Zur Relation (16) gehört ein Zopf, bei dem ein Faden zweimal um die fünf anderen geschlungen ist. Wir haben beide Zöpfe in Fig. 17 und Fig. 18 dargestellt.

Der von den Zöpfen der Fig. 17 und der Fig. 18 erzeugte Normalteiler ist der Kern des in Hilfssatz 5 ausgesprochenen Homomorphismus.

10. Im folgenden Abschnitt wollen wir zeigen, daß man unsere Methode nicht direkt auf Flächen höheren Geschlechts übertragen kann. Unsere Methode der Fortsetzung der Automorphismen auf eine von Punktspiegelungen erzeugte Gruppe beruht auf der in Abschnitt 5. ausgesprochenen Eigenschaft der dort definierten Abbildung μ, im Zentrum der Abbildungstypengruppe zu liegen. Die Abbildung μ wurde induziert durch den Automorphismus

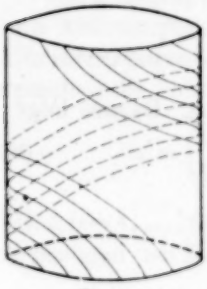


Fig. 17

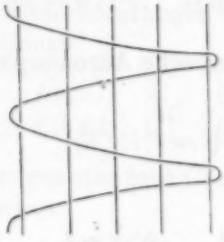


Fig. 18

$$\mu = \begin{cases} a \to a^{-1} \\ b \to b^{-1} \\ c \to c^{-1} \\ d \to d^{-1}. \end{cases}$$

Für eine entsprechend zu definierende Abbildung μ' einer Fläche höheren Geschlechts geht nun die Zentrumseigenschaft verloren.

Wir wollen das am Beispiel der Fläche vom Geschlecht 3 erläutern. Die Fundamentalgruppe dieser Fläche wird definiert durch die Relation

$$a\,b\,c\,d\,e\,f\,a^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}e^{-1}f^{-1} = 1.$$

Wir betrachten die durch den Automorphismus

$$\mu' = \begin{cases} a \to a^{-1} \\ b \to b^{-1} \\ c \to c^{-1} \\ d \to d^{-1} \\ e \to e^{-1} \\ f \to f^{-1} \end{cases}$$

induzierte Abbildung μ' und zeigen, daß sie nicht im Zentrum der Abbildungstypengruppe liegt.

Berechnen wir zu dem Automorphismus

$$\delta = \begin{cases} a \to a\,d\,e\,f \\ b \to f^{-1}e^{-1}d^{-1}b \\ c \to c\,d\,e\,f \\ d \to d \\ e \to e \\ f \to f \end{cases}$$

den Kommutator

$$\delta\mu'\delta^{-1}\mu'^{-1} = \begin{cases} a \to d^{-1}e^{-1}f^{-1}a\,d\,e\,f \\ b \to f^{-1}e^{-1}d^{-1}b\,f\,e\,d \\ c \to d^{-1}e^{-1}f^{-1}c\,d\,e\,f \\ d \to d \\ e \to e \\ f \to f, \end{cases}$$

so erkennen wir, daß $\delta\mu'\delta^{-1}\mu'^{-1}$ kein innerer Automorphismus ist. Aus der Isomorphie des Abschnitts **1.** entnehmen wir, daß der Abbildungstypus δ mit dem Abbildungstypus μ' nicht vertauschbar ist.

Wir bemerken noch, daß man die Abbildung μ' entsprechend der in Abschnitt **5.** für μ gegebenen geometrischen Interpretation auffassen kann als Drehung eines zu Fig. 1 analogen Schemas um eine Symmetrieachse. Aus dieser Bemerkung verifiziert man auch geometrisch, daß μ' nicht im Zentrum der Abbildungstypengruppe liegt.

11. Anhang.

Wir stellen in diesem Anhang einige zahlentheoretische Überlegungen an, aus denen wir aber keine Schlüsse über die Struktur der Abbildungstypengruppe ziehen.

Da sie aber insbesondere zu einer orthogonalen Darstellung der Fundamentalgruppe über dem Ring der ganzen rationalen Zahlen führen, die unseres Wissens bisher nicht bekannt ist, so haben sie im Anschluß an die vorliegende Arbeit ein gewisses selbständiges Interesse und ihre Wiedergabe in einer kurzen Form mag hier gerechtfertigt erscheinen.

Wir gehen aus von dem in Fig. 10 dargestellten Grundsechseck des Punktnetzes. Wie eine leichte Rechnung zeigt, hat für dieses Grundsechseck der Kosinus der Seitenlänge den Wert 2.

Diese Bemerkung führt uns zu folgender Frage: Ist es möglich, eine Einlagerung der hyperbolischen Ebene in die projektive Ebene so zu definieren, d.h. für den absoluten Kegelschnitt eine quadratische Form so zu finden, daß man den Punkten des Grundsechsecks rationale Koordinaten zuordnen kann? Wenn das geht, so haben offenbar wegen der Spiegelungsformel

$$\mathfrak{r}^* = -\mathfrak{r} + 2\frac{f(\mathfrak{r},\mathfrak{a})}{f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})}\mathfrak{a} \tag{17}$$

alle Punkte des Netzes rationale Koordinaten.

Man kann nun in der Tat eine geeignete quadratische Form finden. Wir geben die Form und die projektiven Koordinaten der Grundpunkte an. Die Form lautet:

$$f(\mathfrak{r},\mathfrak{r}) = -\tfrac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)+\tfrac{4}{3}(xy+xz+yz). \tag{18}$$

Die Koordinaten der Grundpunkte entnimmt man der Fig. 19.

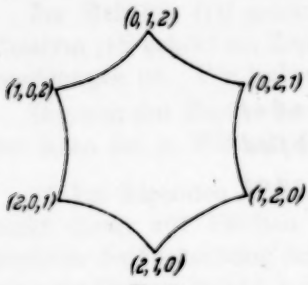


Fig. 19

Die projektiven Koordinaten der Grundpunkte sind auf den Formwert

$$f(\mathfrak{r},\mathfrak{r}) = 1. \tag{19}$$

normiert. Natürlich normiert (19) die Koordinaten nur bis auf ein gemeinsames Vorzeichen.

Man bemerkt, daß aus (19) folgt

$$x+y+z \equiv 0 \mod 3.$$

Daraus folgt, daß die Bilinearform $f(\mathfrak{r},\mathfrak{a})$ in der Spiegelungsformel (17) für die Grundpunkte eine Linearform in $\mathfrak{r}$ mit ganzrationalen Koeffizienten ist.

Also haben wegen der Normierung (19) auch die durch Spiegelung aus den Grundpunkten hervorgehenden Punkte und damit alle Netzpunkte ganzrationale Koordinaten und den Formwert 1.

Aus der Bemerkung über die Linearform $f(\mathfrak{r},\mathfrak{a})$ für die Grundpunkte folgt nach (17), daß die zu den Spiegelungen an den Grundpunkten gehörigen orthogonalen Matrizen ganzzahlig sind. Wir haben also eine treue orthogonale Darstellung zur Form (18) über dem Ring der ganzen rationalen Zahlen für die Punktspiegelungsgruppe $\mathfrak{P}$ und damit auch für die Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ gewonnen. Zieht man noch heran, daß die Fundamentalgruppen der Flächen höheren Geschlechts als Fundamentalgruppen von Überlagerungen sämtlich Untergruppen der zum Geschlecht 2 gehörigen Fundamentalgruppe sind, so hat man also folgende Aussage:

Satz. *Die Fundamentalgruppe einer orientierbaren Fläche beliebigen Geschlechts gestattet eine treue orthogonale Darstellung zur Form* (18) *über dem Ring der ganzen rationalen Zahlen.*

Wir bemerken noch ohne Beweis, daß die Gesamtheit der Punkte mit ganzrationalen Koordinatentripeln, für die (19) gilt, gerade mit dem Punktnetz übereinstimmt.

Literatur

ARTIN, E.:
[1] Theorie der Zöpfe. Hamb. Abh. **4**, 47–72 (1926).
[2] Theory of Braids. Ann. of Math. (2), **48**, 101–126 (1947).
[3] Braids and Permutations. Ann. of Math, (2) **48**, 643–649 (1947).
BACHMANN, F.:
[4] Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Heidelberg: Springer 1959.

BAER, R.:
[5] Kurventypen auf Flächen. J. reine u. angew. Math. **156**, 231–246 (1927).
[6] Isotopie von Kurven auf orientierbaren geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen. J. reine u. angew. Math. **159**, 101–116 (1928).
[7] Die Abbildungstypengruppe der orientierbaren geschlossenen Fläche vom Geschlecht 2. J. reine u. angew. Math. **160**, 1–25 (1929).
BOHNENBLUST, F.:
[8] The Algebraical Braid Group. Ann. of Math. (2) **48**, 127–136 (1947).
BURNSIDE, W
[9] Theory of Groups of Finite Order, 2nd ed. Cambridge 1911.
COXETER, H. S. M., and W. O. J. MOSER:
[10] Generators and Relations for Discrete Groups. Ergebn. d. Math. (N.F.) **14** (1957).
DEHN, M.:
[11] Über Kurvensysteme auf zweiseitigen Flächen mit Anwendung auf das Abbildungsproblem, Autogr. Vortrag im Math. Colloquium Breslau, 11. Febr. 1922.
GOERITZ, L.:
[12] Normalformen der Systeme einfacher Kurven auf orientierbaren Flächen. Hamb. Abh. **9**, 223–243 (1933).
[13] Die Abbildungen der Brezelflächen und der Vollbrezel vom Geschlecht 2. Hamb. Abh. **9**, 244–259 (1933).
NIELSEN, J.:
[14] Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. Acta Math. **50**, 189–358 (1927).
[15] Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. II. Acta Math. **53**, 1–76 (1929).
[16] Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. III. Acta Math. **58**, 87–167 (1932).
[17] Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen. Det Kgl. Danske Vidensk. Selskab. Mat.-fys. Medd. **15**, 1 (1937).
REIDEMEISTER, K.:
[18] Topologie der Polyeder. Leipzig: Akad. Verlagsges. 1953.
[19] Über die Automorphismen von Wegegruppen. J. reine u. angew. Math. **167**, 79–87 (1932).
SEIFERT, H., u. W. THRELFALL:
[20] Lehrbuch der Topologie. New York: Chelsea Publ. Comp. 1947.
THRELFALL, W.:
[21] Gruppenbilder. Abh. Sächs. Akad. Wissensch., Math.-physik. Kl. **41**, Nr. 6, 1–59 (1932).

Braunschweig, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule
(Eingegangen am 3. Februar 1960)

SCHÄFKE, F. W.
Math. Zeitschr. 74, 436–470 (1960)

Reihenentwicklungen analytischer Funktionen nach Biorthogonalsystemen spezieller Funktionen. I

Von

FRIEDRICH WILHELM SCHÄFKE

Inhaltsübersicht

Teil I

Einleitung 436
1. Elementare Hilfssätze 438
2. Eigenwertprobleme mit zwei Parametern 444
3. Anwendung auf die Hillsche Differentialgleichung 458

Teil II

4. Reihenentwicklungen nach Bessel-Funktionen $J_{\nu+n}(z)$, n ganz
5. Reihenentwicklungen nach Bessel-Funktionen $J_{\nu+n}((\nu+n)z)$, n ganz
6. Reihenentwicklungen nach Whittakerschen Funktionen $M_{\kappa,\nu+n}(z)$, n ganz
7. Reihenentwicklungen nach Kugelfunktionen

Einleitung

Die vorliegende Arbeit soll eine zusammenfassende Darstellung und ausführliche Herleitung der Resultate geben, die ich zu einem Teil in dem gemeinsam mit Herrn J. MEIXNER verfaßten Werk über Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen[1]) dargestellt und zu einem anderen Teil in Vorträgen auf der Tagung der Deutschen Mathematikervereinigung in Mainz 1953, auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Amsterdam 1954 und auf der Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Berlin 1955 angegeben habe. Darüber hinaus werden zahlreiche neue Überlegungen bezüglich der im Titel genannten Reihenentwicklungen hier erstmals vorgelegt.

In den Abschnitten **1, 2** wird die l.c.[1]) im Abschnitt **1.7**, S. 82–89 skizzierte Theorie mit vollständiger Durchführung der Beweise gegeben. Dabei erwies es sich als vorteilhaft, die zugrunde gelegten Voraussetzungen etwas zu modifizieren. Der interessierte Leser wird bei einem ersten Vergleich die Vorzüge der neuen Darstellung sofort erkennen, so daß hier eine entsprechende längere Erörterung unterbleiben kann. Weiter wird unter anderem eine Ergänzung der Theorie in der Richtung gegeben, daß der in l.c.[1]), S. 128 dem Leser überlassene Teil des Beweises des Entwicklungssatzes für Mathieusche Funktionen hier vollständig vorliegt.

[1]) MEIXNER, J., u. F. W. SCHÄFKE: Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954. — In Zitaten kürzen wir ab: MS.

Ausdrücklich muß bemerkt werden, daß für die gegebene Theorie nicht eine größtmögliche Allgemeinheit angestrebt wurde. Auch ist eine Bezugnahme auf neuere Entwicklungen der Theorie der linearen topologischen Räume hier vermieden worden, obwohl die Neufassung der Voraussetzungen dazu anregt. Die Theorie wurde gerade so angelegt, daß die Bezeichnungen einfach werden, die Beweise durchsichtig erscheinen und die Anwendung auf die geschilderten Typen spezieller Reihenentwicklungen möglichst leicht ist.

Schon in meinem oben erwähnten Vortrage 1955 habe ich darauf hingewiesen, daß die in **1**, **2** dargestellte Theorie ein sehr allgemeines Entwicklungstheorem für die Hillsche Differentialgleichung umfaßt. Diese Überlegungen werden im Abschnitt **3** ausführlich dargestellt. Dabei findet auch der Fall eines ganzen charakteristischen Exponenten Berücksichtigung, vor allem im Sinne der oben erwähnten Ergänzung des Beweises des Entwicklungssatzes für Mathieusche Funktionen.

Die einfachste Anwendung der Theorie auf spezielle Funktionen der mathematischen Physik, nämlich die auf die Bessel-Funktionen, gibt Abschnitt **4**. Im Gegensatz zu den Entwicklungen von NEUMANN und GEGENBAUER, die den Potenzreihentyp darstellen, handelt es sich hier und analog in den folgenden Abschnitten um Entwicklungen vom Typ einer Laurent-Reihe. Die Fruchtbarkeit der geschilderten Methode wird an einer Reihe von neuen Resultaten und neuen einfachen Beweisen bekannter Ergebnisse sichtbar. Hingewiesen sei besonders auf den einfachen Zugang zu den von NEUMANN und GEGENBAUER eingeführten Polynomen O_n und $A_{n,\nu}$. Neu ist ferner die Darstellung des Falles $\nu=0$ als Grenzfall.

Das oben Gesagte gilt entsprechend für die Theorie der KAPTEYNschen Reihen bzw. ihrer Verallgemeinerungen, die der Abschnitt **5** gibt. Auch hier finden sich zahlreiche neue Resultate.

In **6** werden die Reihenentwicklungen nach Whittakerschen Funktionen untersucht. Es ergibt sich eine wesentliche Vereinfachung und Ergänzung der diesbezüglichen Überlegungen von Herrn ERDELYI.

Abschnitt **7** schließlich bringt die Theorie der Entwicklungen nach Kugelfunktionen.

Die Entwicklungssätze für Mathieusche Funktionen und für Sphäroidfunktionen werden hier nicht noch einmal notiert bzw. hergeleitet. Deswegen darf jetzt auf die Darstellung in dem unter [1]) genannten Buche verwiesen werden.

Vermerkt sei noch, daß unsere Theorie in jedem Falle neben den Reihenentwicklungen auch gewisse asymptotische Aussagen bezüglich großer Indizes liefert.

Abschließend muß auf eine Lücke hingewiesen werden, die bewußt gelassen wurde: es fehlt hier ein vollständiger Überblick über die historische Entwicklung des gesamten Fragenkomplexes. Die gegebenen Zitate können dies nicht ersetzen. Ich darf bezüglich eines derartigen Überblicks auf eine spätere Note verweisen.

1. Elementare Hilfssätze

HILFSSATZ 1. *Seien*

$$a, b, c_m^* \ (m = 0, 1, 2, \ldots) \text{ reelle Zahlen},$$

$$b + 1 > a > b > 0,$$

$$|c_m^*| < \tfrac{1}{2}(a-b)(a+b), \qquad |c_m^*| < \tfrac{1}{2}(1-a+b)(a+b);$$

k durchlaufe die natürlichen Zahlen.

Dann gilt[2])

$$\sum_{m=0}^{\infty} |(k+a)^2 - (m+b)^2 + c_m^*|^{-1} = O\left(\frac{1}{k}\log k\right).$$

BEWEIS. Wir zerlegen

$$\sum_{m=0}^{\infty} = \sum_{m=0}^{k} + \sum_{m=k+1}^{2k} + \sum_{m=2k+1}^{\infty}.$$

Man hat dann

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{k} |(k+a)^2 - (m+b)^2 + c_m^*|^{-1} &< 2\sum_{m=0}^{k} [(k-m+a-b)(k+m+a+b)]^{-1} \\ &\leqq 2\sum_{l=0}^{k} [(l+a-b)(2k-l+a+b)]^{-1} \\ &< \frac{2}{k+a+b}\sum_{l=0}^{k} (l+a-b)^{-1} \\ &= O\left(\frac{1}{k}\log k\right).\end{aligned}$$

Weiter wird

$$\begin{aligned}\sum_{m=k+1}^{2k} |(k+a)^2 - (m+b)^2 + c_m^*|^{-1} &< 2\sum_{m=k+1}^{2k} [(m-k-a+b)(m+k+a+b)]^{-1} \\ &\leqq 2\sum_{l=1}^{k} [(l-a+b)(l+2k+a+b)]^{-1} \\ &< \frac{2}{2k+a+b}\sum_{l=1}^{k} (l-a+b)^{-1} \\ &= O\left(\frac{1}{k}\log k\right).\end{aligned}$$

Schließlich erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{m=2k+1}^{\infty} |(k+a)^2 - (m+b)^2 + c_m^*|^{-1} &< 2\sum_{m=2k+1}^{\infty} [(m-k-a+b)(m+k+a+b)]^{-1} \\ &< 2\sum_{l=k+1}^{\infty} [(l-a+b)(l+a+b)]^{-1} \\ &= O\left(\frac{1}{k}\right).\end{aligned}$$

[2]) Wie Beispiele zeigen, nicht zu $o\left(\frac{1}{k}\log k\right)$ verbesserungsfähig.

HILFSSATZ 2. *Seien*

$$\lambda_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \text{ komplexe Zahlen},$$

$$\frac{\lambda_n}{n^2} \to \xi > 0 \qquad (n \to \pm\infty).$$

Dann ist

$$S_2(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda - \lambda_n|^{-2}$$

für $\lambda \neq \lambda_n$ konvergent. Es gilt

$$S_2(\lambda) \to 0 \qquad (\operatorname{Im}\lambda \to \pm\infty)$$

gleichmäßig für

$$\operatorname{Re}\lambda \leqq \eta < \infty.$$

BEWEIS. Die erste Aussage ist trivial, da die Reihenglieder offenbar $O(n^{-4})$ sind.

Für die zweite Aussage zerlegen wir

$$S_2(\lambda) = \sum_n = \sum_{\operatorname{Re}\lambda_n \leqq \eta} + \sum_{\operatorname{Re}\lambda_n > \eta}.$$

Hier enthält wegen

$$\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{n^2} \to \xi > 0 \qquad (n \to \pm\infty)$$

die erste Summe höchstens endlich viele Glieder, strebt also gegen 0 für $\lambda \to \infty$. Die zweite Summe kann nun für $\operatorname{Re}\lambda \leqq \eta$ zerlegt und abgeschätzt werden:

$$\sum_{\operatorname{Re}\lambda_n > \eta} |\lambda - \lambda_n|^{-2} \leqq \sum_{\operatorname{Re}\lambda_n > \eta} [(\operatorname{Re}\lambda_n - \eta)^2 + (\operatorname{Im}\lambda - \operatorname{Im}\lambda_n)^2]^{-1}$$

$$\leqq \sum_{\operatorname{Re}\lambda_n > \zeta} (\operatorname{Re}\lambda_n - \eta)^{-2} + \sum_{\zeta \geqq \operatorname{Re}\lambda_n > \eta} [(\operatorname{Re}\lambda_n - \eta)^2 + (\operatorname{Im}\lambda - \operatorname{Im}\lambda_n)^2]^{-1}.$$

In der letzten Zeile kann die erste Summe rechts unabhängig von λ beliebig klein gemacht werden durch hinreichend große Wahl von ζ; die Reihenglieder sind ja $O(1/n^4)$. Die zweite Summe rechts enthält dann nur endlich viele Glieder, die gegen 0 streben für $\operatorname{Im}\lambda \to \pm\infty$.

HILFSSATZ 3. *Seien*

λ_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *verschiedene komplexe Zahlen,*

c_n, ϑ *komplexe Zahlen, ϑ nicht ganz,*

$$\lambda_n = n(n + \vartheta) + c_n, \qquad |c_n| \leqq c < \infty, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$S_2(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\lambda - \lambda_n|^{-2}.$$

Dann gilt:

(1) *für*

$$\varkappa \neq \operatorname{Re}\lambda_n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

ist

$$\int_{\mathrm{Re}\,\lambda=\varkappa} S_2(\lambda)\,|d\lambda| = \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\varkappa - \mathrm{Re}\,\lambda_n|^{-1};$$

(2) *für*

$$d_n = \min_{m \neq n} |\lambda_m - \lambda_n|$$

ist

$$d_n \geqq d \cdot (|n| + 1) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

mit einer Konstanten $d > 0$;

(3) *auf dem Kreise*

$$|\lambda - \lambda_n| = \frac{d_n}{2}$$

ist gleichmäßig

$$S_2(\lambda) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (n \to \pm\infty).$$

BEWEIS. *Zu* (1): Indem man $\mathrm{Im}\,\lambda - \mathrm{Im}\,\lambda_n = \sigma$ einführt, wird

$$\int_{\mathrm{Re}\,\lambda=\varkappa} |\lambda - \lambda_n|^{-2}\,|d\lambda| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^2 + (\varkappa - \mathrm{Re}\,\lambda_n)^2} = \frac{\pi}{|\varkappa - \mathrm{Re}\,\lambda_n|}.$$

Wegen

$$\mathrm{Re}\,\lambda_n = n(n + \mathrm{Re}\,\vartheta) + \mathrm{Re}\,c_n$$

ist

$$\frac{\pi}{|\varkappa - \mathrm{Re}\,\lambda_n|} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (n \to \pm\infty).$$

Also ist die Reihe der Integrale (mit positiven Integranden) konvergent und gliedweise Integration erlaubt.

Zu (2) *und* (3): Wir zeigen zunächst

$$(*) \qquad \sum_{m \neq n} |\lambda_m - \lambda_n|^{-2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (n \to \pm\infty).$$

Dazu schätzen wir für

$$|n| > 2\left(|\vartheta| + 2c + \frac{2c}{\delta}\right)$$

mit

$$\delta = \min_{k \text{ ganz}} |k + \vartheta| > 0$$

den Ausdruck

$$n^2 \sum_{m \neq n} |\lambda_m - \lambda_n|^{-2} = \sum_{m \neq n} \frac{n^2}{|(m-n)(m+n+\vartheta) + c_m - c_n|^2}$$

ab. Wir zerlegen hier

$$\sum_{m \neq n} = \sum_{|m-n| \geqq |n|} + \sum_{0 < |m-n| < |n|},$$

dann wird die erste Summe rechts

$$\sum_{|m-n| \geqq |n|} < \sum_{|m-n| \geqq |n|} \left(|m + n + \vartheta| - \frac{2c}{|n|}\right)^{-2}$$

$$< \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(|k + \vartheta| - \frac{\delta}{2}\right)^{-2} < \infty.$$

In der zweiten Summe ist

$$0 < \frac{m}{n} < 2,$$

$$\frac{1}{n}|(m-n)(m+n+\vartheta)+c_m-c_n| \geqq |m-n|\left(\left|1+\frac{m}{n}+\frac{\vartheta}{n}\right|-\frac{2c}{|n|}\right)$$

$$> |m-n|\frac{1}{2},$$

also wird sie:

$$\sum_{0<|m-n|<|n|} < 4 \sum_{0<|m-n|<|n|} (m-n)^{-2} < 8 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2};$$

damit ist (*) bewiesen.

Daraus folgt unmittelbar

$$d_n^{-2} = \max_{m \neq n} |\lambda_m - \lambda_n|^{-2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

also (2).

Schließlich hat man für $|\lambda - \lambda_n| = \frac{d_n}{2}$, ebenfalls unter Zurückführung auf (*),

$$\sum_m |\lambda - \lambda_m|^{-2} = |\lambda - \lambda_n|^{-2} + \sum_{m \neq n} |\lambda - \lambda_m|^{-2}$$

$$\leqq \frac{4}{d_n^2} + \sum_{m \neq n} \left(|\lambda_m - \lambda_n| - \frac{d_n}{2}\right)^{-2}$$

$$< \frac{4}{d_n^2} + 4 \sum_{m \neq n} |\lambda_m - \lambda_n|^{-2}$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

das ist (3).

HILFSSATZ 4. *Seien*

$\lambda_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *verschiedene komplexe Zahlen,*

$P_2(z)$ *ein Polynom vom Grade 2,*

$$P_2(n_1) \neq P_2(n_2) \qquad (n_1 \neq n_2,\ n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$\lambda_n = P_2(n) + O(1) \qquad (n \to \pm\infty),$$

$$S_2(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\lambda - \lambda_n|^{-2} \qquad (\lambda \neq \lambda_n).$$

Dann gibt es einfach geschlossene Kurven $\mathfrak{C}_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *mit den Eigenschaften:*

(1) *Auf* $\mathfrak{C}_k$ *liegt kein* λ_n.

(2) $\mathfrak{C}_k$ *umschließt einmal positiv genau die* λ_n *mit* $|n| \leqq k$, *abgesehen von gewissen* λ_n, *(die fehlen oder hinzutreten), deren Anzahl jedoch beschränkt ist, und deren Indizes für* $k \to \infty$ *gegen* $\pm\infty$ *streben.*

(3) $$\oint_{\mathfrak{C}_k} S_2(\lambda)\,|d\lambda| = O\left(\frac{1}{k}\log k\right) \qquad (k \to \infty).$$

(4) *Das Maximum von* $S_2(\lambda)$ *für* $\lambda \in \mathfrak{C}_k$, *strebt gegen* 0 *für* $k \to \infty$. *Die* $\mathfrak{C}_k$ *können als Rechtecke gewählt werden.*

BEWEIS. Es genügt, den Beweis zu führen unter den Annahmen (vgl. Hilfssatz 3)

$$\lambda_n = n(n+\vartheta) + c_n,$$

$$\vartheta \text{ nicht ganz},$$

$$|c_n| \leqq c < \infty.$$

Denn das kann offenbar durch ganze lineare Transformation der λ-Ebene erreicht werden. Wir legen also im folgenden die Voraussetzungen von Hilfssatz 3 zugrunde.

Wir wählen dann zunächst die natürlichen Zahlen n_0, n_1, und die reelle Zahl a so, daß

$$b_0 = n_0 + \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\vartheta > 0,$$

$$b_1 = n_1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\vartheta > 0,$$

$$0 < a - b_0 < 1,$$

$$0 < a - b_1 < 1,$$

$$|\operatorname{Re} c_n - \tfrac{1}{4}(\operatorname{Re}\vartheta)^2| < \begin{cases} \tfrac{1}{2}(a-b_0)(a+b_0) \\ \tfrac{1}{2}(1-a+b_0)(a+b_0) \end{cases} (n \geqq n_0)$$

$$\begin{cases} \tfrac{1}{2}(a-b_1)(a+b_1) \\ \tfrac{1}{2}(1-a+b_1)(a+b_1) \end{cases} (n \leqq -n_1).$$

Dazu wählt man n_0, n_1 hinreichend groß so, daß sich $n_0 + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\vartheta$, $n_1 - \frac{1}{2}\operatorname{Re}\vartheta$ höchstens um $\frac{1}{2}$ unterscheiden, und dann etwa a um $\frac{1}{4}$ größer als die größere dieser beiden Zahlen. Es braucht dann nur

$$|\operatorname{Re} c_n - \tfrac{1}{4}(\operatorname{Re}\vartheta)^2| < \tfrac{1}{8}a \qquad (n \geqq n_0 \text{ oder } n \leqq -n_1)$$

zu sein.

Wir betrachten nun gemäß Hilfssatz 3:

$$\int_{\operatorname{Re}\lambda=(k+a)^2} S_2(\lambda)\,|d\lambda| = \pi \sum_n |(k+a)^2 - (n + \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\vartheta)^2 - \operatorname{Re} c_n + \tfrac{1}{4}(\operatorname{Re}\vartheta)^2|^{-1}.$$

Wir zerlegen hier

$$\sum_n = \sum_{n=-n_1+1}^{n_0-1} + \sum_{n \geqq n_0} + \sum_{n \leqq -n_1}.$$

Die erste Summe enthält nur endlich viele Glieder und ist $O(1/k^2)$ für $k \to +\infty$. Die zweite Summe kann geschrieben werden

$$\sum_{m=0}^{\infty} |(k+a)^2 - (m+b)^2 + c_m^*|^{-1},$$

indem man

$$m = n - n_0, \qquad b = b_0 = n_0 + \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\vartheta, \qquad c_m^* = -\operatorname{Re} c_n + \tfrac{1}{4}(\operatorname{Re}\vartheta)^2$$

setzt, und ist nach Hilfssatz 1 $O\left(\frac{1}{k}\log k\right)$. Die dritte Summe kann ebenfalls geschrieben werden

$$\sum_{m=0}^{\infty} |(k+a)^2 - (m+b)^2 + c_m^*|^{-1},$$

indem man

$$m = -n - n_1, \qquad b = b_1 = n_1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\vartheta, \qquad c_m^* = -\operatorname{Re} c_n + \tfrac{1}{4}(\operatorname{Re}\vartheta)^2$$

setzt, und ist nach Hilfssatz 1 auch $O\left(\frac{1}{k}\log k\right)$. Die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 sind nach der obigen Konstruktion von a, b, b_1, n_0, n_1, gegeben.

Damit ist nun — für hinreichend große k definiert —

$$\int_{\operatorname{Re}\lambda=(k+a)^2} S_2(\lambda)\,|d\lambda| = \pi \sum_n |(k+a)^2 - \operatorname{Re}\lambda_n|^{-1} = O\left(\frac{1}{k}\log k\right).$$

Klar ist damit natürlich auch, daß für $k \to \infty$

$$\max\{S_2(\lambda) \mid \operatorname{Re}\lambda = (k+a)^2\} \to 0.\ ^{3})$$

Ferner ist

$$\operatorname{Re}\lambda_n < (k+a)^2$$

äquivalent zu

$$k(k+2a) - n(n + \operatorname{Re}\vartheta) + a^2 - \operatorname{Re} c_n > 0,$$

d.h.

$$k^2 - n^2 + 2ak - n\operatorname{Re}\vartheta + a^2 - \operatorname{Re} c_n > 0$$

oder

$$k - |n| + O(1) > 0 \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, \ldots, \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{pmatrix};$$

das bedeutet, daß links der Geraden $\operatorname{Re}\lambda = (k+a)^2$ genau die λ_n mit $|n| \leqq k$ liegen, abgesehen nur von gewissen λ_n (die fehlen oder zuviel sind), deren Anzahl mit $k \to \infty$ beschränkt bleibt, und deren Indizes mit $k \to \infty$ gegen $\pm\infty$ streben.

Weiter wählen wir nun für $k = 1, 2, 3, \cdots$ gewisse $r_k < \operatorname{Re}\lambda_n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) so, daß

$$\int_{\operatorname{Re}\lambda=r_k} S_2(\lambda)\,|d\lambda| = \pi \sum_n |r_k - \operatorname{Re}\lambda_n|^{-1} = O\left(\frac{1}{k}\log k\right)$$

und mithin auch für $k \to \infty$

$$\max\{S_2(\lambda) \mid \operatorname{Re}\lambda = r_k\} \to 0.$$

Das ist wegen

$$\sum_n |x - \operatorname{Re}\lambda_n|^{-1} \to 0 \qquad (x \to -\infty)$$

offenbar möglich.

---

[3]) Denn man hat für $\operatorname{Re}\lambda = (k+a)^2$ offenbar

$$S_2(\lambda)\tfrac{1}{2} \leqq \sum_n |(k+a)^2 - \operatorname{Re}\lambda_n|^{-1}.$$

Schließlich wählen wir positive Zahlen j_k $(k=1, 2, 3, \ldots)$ so groß, daß für $k\to\infty$

$$\min\{j_k - |\operatorname{Im}\lambda_n| \mid \operatorname{Re}\lambda_n < (k+a)^2\} \to +\infty,$$

$$\int\limits_{(\operatorname{Im}\lambda=\pm j_k,\, r_k\leqq\operatorname{Re}\lambda\leqq(k+a)^2)} S_2(\lambda)\,|d\lambda| = O\left(\frac{1}{k}\log k\right),$$

und daß für $k\to\infty$

$$\max\{S_2(\lambda) \mid \operatorname{Im}\lambda = \pm j_k,\ r_k \leqq \operatorname{Re}\lambda \leqq (k+a)^2\} \to 0.$$

Das ist nach Hilfssatz 2 möglich.

Wir wählen dann für hinreichend große k $(\geqq k_0)$ als $\mathfrak{C}_k$ das Rechteck, das durch die 4 Endpunkte der vorstehend notierten Integrationsstrecken gebildet wird. Diese $\mathfrak{C}_k$ erfüllen dann nach Konstruktion sämtliche Behauptungen unseres Satzes; man wird dabei noch, falls nötig, $\mathfrak{C}_1=\cdots=\mathfrak{C}_{k_0-1}=\mathfrak{C}_{k_0}$ setzen.

ZUSATZ. Hilfssatz 2 gilt ebenso, wenn man überall

$$(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \quad \text{durch} \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

und

$$(n\to\pm\infty) \quad \text{durch} \quad (n\to+\infty)$$

ersetzt.

Hilfssatz 3 gilt entsprechend, wenn man ersetzt (in Voraussetzungen und Behauptungen)

$$n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{durch} \quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

$$n\to\pm\infty \quad \text{durch} \quad n\to+\infty,$$

$$\vartheta \text{ nicht ganz} \quad \text{durch} \quad \vartheta \neq -1, -2, -3, \ldots.$$

Hilfssatz 4 gilt entsprechend, wenn man überall

$$n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{durch} \quad n=0, 1, 2, \ldots$$

$$n\to\pm\infty \quad \text{durch} \quad n\to+\infty,$$

$$n_1, n_2=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{durch} \quad n_1, n_2=0, 1, 2, \ldots$$

$$|n|\leqq k \quad \text{durch} \quad n\leqq k$$

ersetzt.

Das ist unmittelbar zu sehen.

2. Eigenwertprobleme mit zwei Parametern

21. VORAUSSETZUNGEN, VORBEMERKUNGEN.

$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, ... seien komplexe lineare Räume. Abgesehen von den Bezeichnungen n, m, k, s für ganze Zahlen schreiben wir die Elemente dieser Räume mit kleinen lateinischen Buchstaben und die komplexen Zahlen mit

kleinen griechischen Buchstaben. Man habe für die genannten Räume

$$\mathfrak{R}_1 \supseteq \mathfrak{R}_2 \supseteq \mathfrak{R}_3 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{R}. \tag{1}$$

Im Raume $\mathfrak{R}_s$ $(s=1, 2, 3, \ldots)$ sei eine Norm $\|f\|_s$ erklärt, bezüglich der $\mathfrak{R}_s$ zu einem Banach-Raum wird. Es gelte für $f \in \mathfrak{R}_{s+1}$

$$\|f\|_s \leqq \|f\|_{s+1} \quad (s=1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Schließlich gelte

$$\mathfrak{R} = \bigcap_{s=1}^{\infty} \mathfrak{R}_s. \tag{3}$$

Eine Folge $f_n \in \mathfrak{R}$ heißt Cauchy-Folge, wenn sie innerhalb jedes Banach-Raumes $\mathfrak{R}_s$ Cauchy-Folge ist; wir schreiben ebenso

$$f_n \to f \qquad (\in \mathfrak{R}),$$

wenn dies innerhalb jedes $\mathfrak{R}_s$ gilt. Wegen (2), (3) ist dann $\mathfrak{R}$ perfekt: zu jeder Cauchy-Folge f_n aus $\mathfrak{R}$ gibt es ein f aus $\mathfrak{R}$ mit $f_n \to f$.

$\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ seien (perfekte!) Unterräume von $\mathfrak{R}$.

Für $u \in \mathfrak{U}$, $v \in \mathfrak{U}^*$ sei ein bilineares Funktional (u, v) erklärt. (u, v) ist also eine komplexe Zahl; man hat

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 (u_1, v) + \alpha_2 (u_2, v),$$

$$(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 (u, v_1) + \alpha_2 (u, v_2).$$

Dies Funktional sei beschränkt: mit einer Konstanten $\varkappa > 0$ gilt stets

$$|(u, v)| \leqq \varkappa \|u\|_s \|v\|_s \qquad (s=1, 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

Weiter möge das Funktional in recht scharfer Weise nichttrivial sein: Gilt für ein $v \in \mathfrak{U}^*$

$$(u, v) = 0$$

mit allen $u \in \mathfrak{U}$, so ist $v = 0$.

F und G seien in der von $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}^*$ aufgespannten Linearmannigfaltigkeit erklärte lineare Operatoren, die $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ invariant lassen:

$$F\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}, \qquad F\mathfrak{U}^* \subseteq \mathfrak{U}^*, \qquad G\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}, \qquad G\mathfrak{U}^* \subseteq \mathfrak{U}^*. \tag{5}$$

Bezüglich des bilinearen Funktionals seien F und G symmetrisch:

$$(Fu, v) = (u, Fv), \qquad (Gu, v) = (u, Gv). \tag{6}$$

G sei beschränkt: im Definitionsbereich gelte mit Konstanten $\gamma_s > 0$

$$\|Gf\|_s \leqq \gamma_s \|f\|_s \qquad (s=1, 2, 3, \ldots). \tag{7}$$

F habe die etwas schwächere Eigenschaft: im Definitionsbereich gelte mit Konstanten $\varphi_s > 0$

$$\|Ff\|_s \leqq \varphi_s \|f\|_{s+1} \qquad (s=1, 2, 3, \ldots). \tag{8}$$

Danach sind F und G in $\mathfrak{R}$ stetig: aus $f_n \to f$ folgt $Ff_n \to Ff$, $Gf_n \to Gf$.

Wir betrachten nun die zweiparametrige Eigenwertaufgabe

$$(9)\qquad \begin{cases} Fy+\lambda y+\mu Gy=0, & y\in\mathfrak{U}, \quad y\neq 0,\\ Fy^*+\lambda y^*+\mu Gy^*=0, & y^*\in\mathfrak{U}^*, \quad y^*\neq 0. \end{cases}$$

Bestehen diese Gleichungen, so nennen wir (λ,μ) Eigenwertpaar, y, y^* zugehörige Eigenlösungen.

Für diese Eigenwertaufgabe legen wir die folgenden Voraussetzungen zugrunde:

① Es gibt eine ganze Funktion, $\Delta(\lambda,\mu)$, zweier komplexer Variablen, derart, daß $\Delta(\lambda,\mu)=0$ für das Bestehen einer der Gln. (5) notwendig, für das Bestehen beider Gln. (5) (mit geeigneten y, y^*) hinreichend ist.

Wenn also eine der Gln. (5) gilt, so ist mit geeignetem y bzw. y^* auch die andere erfüllt.

② Zu jedem Eigenwertpaar (λ_0,μ_0) gibt es zwei Funktionen $y(\lambda,\mu)$, $y^*(\lambda,\mu)$ mit Werten aus $\mathfrak{R}$, die für (λ,μ) in einer Umgebung von (λ_0,μ_0) holomorph[4]) sind, derart daß für ein Eigenwertpaar (λ,μ) aus dieser Umgebung

$$y=\eta\cdot y(\lambda,\mu), \qquad y^*=\eta^*\cdot y^*(\lambda,\mu),$$
$$\eta\neq 0, \qquad \eta^*\neq 0$$

die Gesamtheit der zugehörigen Eigenlösungen darstellt.

Jedes Eigenwertpaar ist danach einfach.

③ Zu $\mu=0$ gibt es abzählbar unendlich viele verschiedene Eigenwerte

$$(10)\qquad \lambda_n=P_2(n)+O(1).$$

Dabei ist P_2 ein Polynom vom Grade 2. n durchläuft entweder $0, 1, 2, \ldots$ oder $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Für je zwei verschiedene solche n_1, n_2 gilt

$$(11)\qquad P_2(n_1)\neq P_2(n_2).$$

y_n, y_n^* seien Eigenlösungen zu $(\lambda_n, 0)$. Sie bilden ein Biorthogonalsystem:

$$(12)\qquad (y_n, y_m^*)=\delta_{nm}.$$

(Dabei läßt sich $(y_n, y_m^*)=0$ $(n\neq m)$ in bekannter Weise mit (6) folgern; nur die Möglichkeit der Normierung $(y_n, y_n^*)=1$ wird also gefordert.)

[4]) Das bedeutet: für jeden Banach-Raum $\mathfrak{R}_s$ $(s=1, 2, 3, \ldots)$ ist z. B. $y(\lambda,\mu)$ eine in der Umgebung von (λ_0,μ_0) holomorphe Funktion in $\mathfrak{R}_s$. Entsprechend definieren wir holomorphe Funktionen einer Variablen in $\mathfrak{R}$. Bezüglich der einfachsten Sätze über analytische Funktionen von einer oder zwei Variablen mit Werten in einem Banach-Raum vergleiche man etwa HILLE-PHILLIPS, Functional Analysis and Semi-Groups, S. 92ff, New York 1957. Bei Beachtung der vorstehenden Definitionen übertragen sich diese Sätze weitgehend fast unmittelbar auf analytische Funktionen in $\mathfrak{R}$, insbesondere Integralsatz, Integralformel, Satz über die Laurent-Entwicklung, Residuensatz. Dazu ist die Konvergenzdefinition in $\mathfrak{R}$ heranzuziehen.

Die y_n bilden innerhalb $\mathfrak{R}$ eine Basis von $\mathfrak{U}$; d.h.: jedes f aus $\mathfrak{U}$ ist — Konvergenz in $\mathfrak{R}$ —

$$f = \sum_n (f, y_n^*)\, y_n \tag{13}$$

entwickelbar; dabei sei mit $\sum_n$ im Falle $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ gemeint

$$\sum_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{|n|\leqq k}.$$

Mit Konstanten $\alpha_s > 0$ gelte für jedes $s = 1, 2, 3, \ldots$

$$\sum_n \|(f, y_n^*)\, y_n\|_s^2 \leqq \alpha_s^2 \|f\|_s^2. \tag{14}$$

④ Die Eigenwerte λ_n zu $\mu = 0$ sind einfache Nullstellen von $\Delta(\lambda, \mu)$.

⑤ Die inhomogene Gleichung

$$Fz + \lambda z + \mu G z = f \tag{15}$$

ist, falls (λ, μ) nicht Eigenwertpaar, für jedes f aus $\mathfrak{U}$ durch ein z aus $\mathfrak{U}$ (eindeutig) lösbar. $\Delta(\lambda, \mu)\, z(\lambda, \mu)$ ist eine ganze Funktion von λ, μ (vgl. Anm. [4]).

22. Grundlagen der Theorie.

Wir betrachten zunächst die Lösung der inhomogenen Aufgabe (15) für $\mu = 0$ und behaupten

Satz 1. *Für*

$$\lambda \neq \lambda_n, \qquad f \in \mathfrak{U}$$

wird

$$Fz + \lambda z = f, \qquad z \in \mathfrak{U}$$

durch

$$z = R(\lambda, 0)\, f = \sum_n \frac{(f, y_n^*)}{\lambda - \lambda_n}\, y_n \tag{16}$$

gelöst.

Es gilt[5])

$$\|R(\lambda, 0)\, f\| \leqq S_2(\lambda)^{\frac{1}{2}} \alpha \|f\|, \tag{17}$$

wenn

$$S_2(\lambda) = \sum_n |\lambda - \lambda_n|^{-2}$$

gesetzt wird.

Beweis. z existiert nach Voraussetzung ⑤ und kann nach ③, (13) entwickelt werden:

$$z = \sum_n (z, y_n^*)\, y_n.$$

Aus

$$Fz + \lambda z = f, \qquad z \in \mathfrak{U}, \qquad f \in \mathfrak{U}$$

$$F y_n^* + \lambda_n y_n^* = 0, \qquad y_n^* \in \mathfrak{U}^*$$

[5]) Hier und im folgenden lassen wir bei Abschätzungen, die für jede Norm $\| \|_s$, $s = 1, 2, 3, \ldots$, gelten, bei $\| \|_s$, α_s, γ_s den Index s fort.

folgt nun mit (6) durch Multiplikation der ersten Gleichung von hinten mit y_n^* und der zweiten von vorn mit z:

$$(\lambda - \lambda_n)(z, y_n^*) = (f, y_n^*),$$

also (16). Die Abschätzung (17) ergibt sich dann aus (14) und (16) mit der Schwarzschen Ungleichung für Reihen:

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &\leqq \Big(\sum_n \Big\| \frac{(f, y_n^*)}{\lambda - \lambda_n} y_n \Big\| \Big)^2 \\ &\leqq \sum_n |\lambda - \lambda_n|^{-2} \sum_n \|(f, y_n^*) y_n\|^2 \\ &\leqq S_2(\lambda)\, \alpha^2 \|f\|^2. \end{aligned}$$

Satz 1 zieht eine wichtige Folgerung nach sich:

SATZ 2. *Für jedes Eigenwertpaar λ, μ gilt*

$$S_2(\lambda)^{-\frac{1}{2}} \leqq \alpha\gamma |\mu|.$$

(Dabei sei

$$S_2(\lambda_n)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

verabredet.)

BEWEIS. Mit einem $y \neq 0$, $\in \mathfrak{U}$ ist

$$F y + \lambda y = -\mu G y.$$

Wir brauchen nur $\lambda \neq \lambda_n$ zu betrachten. Dann wird mit Satz 1 und (7)

$$0 < \|y\| \leqq S_2(\lambda)^{\frac{1}{2}} \alpha \| -\mu G y \| \leqq S_2(\lambda)^{\frac{1}{2}} \alpha\gamma |\mu| \, \|y\|.$$

Dieser Satz 2 liefert nun zusammen mit den Voraussetzungen ①, ③ und ④ schon den Hauptsatz über die Gesamtheit der Eigenwertpaare:

SATZ 3. *Für jedes n läßt sich $\Delta(\lambda, \mu) = 0$ um $\lambda = \lambda_n$, $\mu = 0$ (implizite Funktion!) durch eine Potenzreihe*

$$\lambda_n(\mu) = \lambda_n + \lambda_{n1}\mu + \lambda_{n2}\mu^2 + \cdots$$

auflösen. Mit geeigneten positiven Konstanten C, D gilt für die Konvergenzradien ϱ_n und die Koeffizienten λ_{nk} $(k = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\varrho_n \geqq C\,(1 + |n|),$$

$$|\lambda_{nk}| \leqq D^k (1 + |n|)^{-(k-1)}.$$

Daher ist für jedes μ bei $n \to \pm\infty$ bzw. $n \to \infty$

$$\lambda_n(\mu) = \lambda_n + \lambda_{n1}\mu + \cdots + \lambda_{nk}\mu^k + O(n^{-k}).$$

Die erhaltenen Funktionselemente lassen sich — Verzweigungsstellen endlicher Ordnung zugelassen — längs jedes Weges der komplexen μ-Ebene analytisch fortsetzen. Man erhält so in den $(\lambda_n(\mu), \mu)$ die Gesamtheit der Eigenwertpaare.

Die Spurpunkte der Verzweigungsstellen besitzen keinen endlichen Häufungspunkt. Zieht man z. B. von jedem Verzweigungsspurpunkt μ_0 (natürlich $\neq 0$) den Schnitt (bezüglich 0) radial nach ∞ und rechnet den Schnitt jeweils zu einem bestimmten Ufer, so sind hierdurch (Verbot der Überschreitung der Schnitte bei analytischer Fortsetzung) die Funktionen $\lambda_n(\mu)$ in der μ-Ebene eindeutig definiert.

Die „Ausnahmewerte" μ_0, für die einmal

$$\lambda_{n_1}(\mu_0) = \lambda_{n_2}(\mu_0) \qquad (n_1 \neq n_2)$$

im eben definierten Sinne wird, (darunter sind natürlich die Verzweigungsspurpunkte) haben keinen endlichen Häufungspunkt.

Beweis. Die Auflösbarkeit durch Potenzreihen um $\lambda = \lambda_n$, $\mu = 0$ folgt aus dem Satz über implizite Funktionen wegen der Voraussetzung ④.

Für alles weitere gehen wir davon aus, daß in der komplexen λ-Ebene jede Punktmenge

$$S_2(\lambda) \geqq \delta > 0$$

in abzählbar viele getrennte kompakte Mengen zerfällt. Das liefern sofort die Überlegungen des Abschnitts **1**.

Diese zeigen insbesondere, daß mit einer Konstanten $K > 0$ auf dem Kreise

$$|\lambda - \lambda_n| = \frac{d_n}{2}$$

die Abschätzung

$$S_2(\lambda) \leqq K^2 (|n| + 1)^{-2}$$

gilt. Dann liefert aber Satz 2, daß für

$$|\mu| < \frac{1}{K \alpha \gamma} (|n| + 1)$$

unmöglich

$$|\lambda - \lambda_n| = \frac{d_n}{2}$$

sein kann.

Damit folgen die übrigen Aussagen des Satzes in fast wörtlicher Übereinstimmung auf Grund von Schlußweisen aus früheren Arbeiten des Verfassers[6]). Insbesondere ist

$$\varrho_n \geqq \frac{1}{K \alpha \gamma} (|n| + 1)$$

und für

$$|\mu| < \varrho_n$$

stets

$$|\lambda_n(\mu) - \lambda_n| < \frac{c}{2} (|n| + 1),$$

[6]) Vgl.: Über Eigenwertprobleme mit zwei Parametern. Math. Nachr. **6**, 109–124 (1951). Verbesserte Konvergenz- und Fehlerabschätzungen für die Störungsrechnung. J. angew. Math. Mech. **33**, H. 8/9 (1953); oder auch: Zur Störungstheorie der Spektralzerlegung. Math. Ann. **133**, 219–234 (1957).

also $(k=1, 2, 3, \ldots)$

$$|\lambda_{nk}| \leqq \frac{c}{2}(K\alpha\gamma)^k (|n|+1)^{-(k-1)};$$

dabei ist $c>0$ eine Konstante mit

$$d_n \leqq c(|n|+1).$$

Im folgenden nennen wir ein μ, das nicht Ausnahmewert ist, auch „normal". Für ein normales μ sind alle $\lambda_n(\mu)$ gemäß Satz 3 verschieden und einfache Nullstellen von $\Delta(\lambda, \mu)$.

Wir ziehen nun noch Voraussetzung ② über die Eigenlösungen heran. Wir bilden zu $(\lambda_n(\mu_0), \mu_0)$ die Funktionen $y(\lambda, \mu)$, $y^*(\lambda, \mu)$. Dann sind

$$\hat{y}_n(\mu) = y(\lambda_n(\mu), \mu), \qquad \hat{y}_n^*(\mu) = y^*(\lambda_n(\mu), \mu)$$

für μ in einer Umgebung von μ_0 zugleich mit $\lambda_n(\mu)$ holomorphe Eigenlösungen zu $(\lambda_n(\mu), \mu)$. Speziell hat man um $\mu=0$ Potenzreihenentwicklungen

$$\hat{y}_n(\mu) = \hat{y}_{n0} + \mu\hat{y}_{n1} + \mu^2\hat{y}_{n2} + \cdots,$$
$$\hat{y}_n^*(\mu) = \hat{y}_{n0}^* + \mu\hat{y}_{n1}^* + \mu^2\hat{y}_{n2}^* + \cdots.$$

Nach ② kann durch Multiplikation mit von μ unabhängigem Zahlfaktor

$$\hat{y}_{n0} = y_n, \qquad \hat{y}_{n0}^* = y_n^*$$

erreicht werden, was im folgenden angenommen sei. Wegen der Perfektheit von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ gehören die Koeffizienten $\hat{y}_{nk}$ bzw. $\hat{y}_{nk}^*$ zu $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{U}^*$. Wegen der Stetigkeit von F und G in $\mathfrak{R}$ können diese Operatoren auf die Potenzreihen gliedweise angewandt werden. So folgt mit Koeffizientenvergleich speziell

$$F\hat{y}_{n1} + \lambda_n\hat{y}_{n1} = -\lambda_{n1}y_n - Gy_n.$$

Beachtet man daneben

$$Fy_n^* + \lambda_n y_n^* = 0,$$

multipliziert mit y_n^* von hinten bzw. mit $\hat{y}_{n1}$ von vorn, so folgt

SATZ 3*. *Die Koeffizienten von μ in den Potenzreihen $\lambda_n(\mu)$ sind*

$$\lambda_{n1} = -(Gy_n, y_n^*).$$

Wir erhalten weiter bezüglich der — bis auf Zahlfaktor $\neq 0$ bestimmten — Eigenlösungen $\hat{y}_n(\mu)$, $\hat{y}_n^*(\mu)$ zu $(\lambda_n(\mu), \mu)$:

SATZ 4. *Ist $\lambda_{n_1}(\mu_0) \neq \lambda_{n_2}(\mu_0)$, so gilt*

$$(\hat{y}_{n_1}(\mu_0), \hat{y}_{n_2}^*(\mu_0)) = 0;$$

ist $\lambda_{n_1}(\mu_0) = \lambda_{n_2}(\mu_0)$ mit $n_2 \neq n_1$, so gilt

$$(\hat{y}_{n_1}(\mu_0), \hat{y}_{n_1}^*(\mu_0)) = 0;$$

ist $\lambda_n(\mu) \neq \lambda_m(\mu)$ für alle $m \neq n$, so gilt

$$(\hat{y}_n(\mu), \hat{y}_n^*(\mu)) \neq 0.$$

BEWEIS. Die erste Aussage folgt aus

$$F\hat{y}_{n_1}(\mu) + \lambda_{n_1}(\mu)\hat{y}_{n_1}(\mu) + \mu G\hat{y}_{n_1}(\mu) = 0,$$
$$F\hat{y}^*_{n_2}(\mu) + \lambda_{n_2}(\mu)\hat{y}^*_{n_2}(\mu) + \mu G\hat{y}^*_{n_2}(\mu) = 0$$

durch Multiplikation mit $\hat{y}^*_{n_2}(\mu)$ von hinten bzw. mit $\hat{y}_{n_1}(\mu)$ von vorn.

Die zweite Aussage folgt aus der ersten durch Grenzübergang. Für $\mu \neq \mu_0$ in einer gewissen Umgebung von μ_0 ist sicher $\lambda_{n_1}(\mu) \neq \lambda_{n_2}(\mu)$, also $(\hat{y}_{n_1}(\mu), \hat{y}^*_{n_2}(\mu)) = 0$. Nach der obigen Konstruktion auf Grund von ② können $\hat{y}_{n_1}(\mu)$, $\hat{y}^*_{n_2}(\mu)$ zumindest mit $\hat{y}_{n_1}(\mu) \to \hat{y}_{n_1}(\mu_0)$, $\hat{y}^*_{n_2}(\mu) \to \hat{y}^*_{n_1}(\mu_0)$ gewählt werden. Mit der durch (4) gesicherten Stetigkeit des bilinearen Funktionals folgt daraus die Behauptung.

Zum Beweise der letzen Aussage muß Voraussetzung ⑤ herangezogen werden. Wir betrachten bei festem μ für irgendein f aus $\mathfrak{U}$ die Lösung $z(\lambda, \mu)$ von (15) als Funktion von λ in Umgebung von $\lambda_n(\mu)$. $\lambda_n(\mu)$ ist einfache Nullstelle von $\Delta(\lambda, \mu)$. Nach dem zweiten Teil der Voraussetzung ⑤ hat also $z(\lambda, \mu)$ bei $\lambda = \lambda_n(\mu)$ höchstens einen einfachen Pol und kann in eine Laurent-Reihe entwickelt werden[7]):

$$z(\lambda, \mu) = (\lambda - \lambda_n(\mu))^{-1} z_{-1} + z_0 + (\lambda - \lambda_n(\mu)) z_1 + \cdots .$$

Wegen der Perfektheit von $\mathfrak{U}$ gehören mit $z(\lambda, \mu)$ auch $z_{-1}, z_0, z_1, \ldots$ zu diesem Unterraum. F und G können wegen ihrer Stetigkeit gliedweise angewandt werden. So hat man mit Koeffizientenvergleich

$$Fz_{-1} + \lambda_n(\mu) z_{-1} + \mu G z_{-1} = 0,$$
$$Fz_0 + \lambda_n(\mu) z_0 + \mu G z_0 = f - z_{-1}.$$

Die erste Gleichung zeigt

$$z_{-1} = \zeta \hat{y}_n(\mu),$$

die zweite ergibt durch die bekannte Kombination mit

$$F\hat{y}^*_n(\mu) + \lambda_n(\mu)\hat{y}^*_n(\mu) + \mu G\hat{y}^*_n(\mu) = 0$$

die Gleichung

$$(f, \hat{y}^*_n(\mu)) = \zeta (\hat{y}_n(\mu), \hat{y}^*_n(\mu)).$$

Wegen $\hat{y}^*_n(\mu) \neq 0$ gibt es nach der anfangs gemachten Voraussetzung über das bilineare Funktional ein f aus $\mathfrak{U}$ mit $(f, \hat{y}^*_n(\mu)) \neq 0$, also muß auch $(\hat{y}_n(\mu), \hat{y}^*_n(\mu)) \neq 0$ sein. Wir vermerken noch

$$z_{-1} = \frac{(f, \hat{y}^*_n(\mu))}{(\hat{y}_n(\mu), \hat{y}^*_n(\mu))} \hat{y}_n(\mu).$$

Nun folgt leicht

SATZ 5. *Sei μ_0 ein normaler Wert. Dann gibt es Eigenlösungen $y_n(\mu)$, $y^*_n(\mu)$ zu $(\lambda_n(\mu), \mu)$, die je in einer entsprechenden Umgebung von μ_0 holomorph*

[7]) Vgl. Anm. [4]), S. 446.

sind und ein normiertes Biorthogonalsystem bilden:

$$(y_n(\mu), y_n^*(\mu)) = \delta_{nm}.$$

Dazu brauchen wir bei Beachtung der letzten Aussage von Satz 4 nur mit je in einer Umgebung von μ_0 holomorphen $\hat{y}_n(\mu), \hat{y}_n^*(\mu)$ zu bilden

$$y_n(\mu) = (\hat{y}_n(\mu), \hat{y}_n^*(\mu))^{-\frac{1}{2}} \hat{y}_n(\mu),$$
$$y_n^*(\mu) = (\hat{y}_n(\mu), \hat{y}_n^*(\mu))^{-\frac{1}{2}} \hat{y}_n^*(\mu).$$

Dem Schluß des Beweises von Satz 4 entnehmen wir weiter noch

SATZ 6. *Die Lösung der inhomogenen Aufgabe* (15), *die wir*

$$z(\lambda, \mu) = R(\lambda, \mu) f$$

schreiben, besitzt für normales μ nur die einfachen Pole $\lambda = \lambda_n(\mu)$ mit den Residuen

$$(f, y_n^*(\mu))\, y_n(\mu).$$

23. ENTWICKLUNGSSÄTZE.

Wir geben zuerst ein negatives Resultat:

SATZ 7. *Nicht jedes f aus $\mathfrak{U}$ kann nach den Eigenlösungen $\hat{y}_n(\mu_0)$ zu einem Ausnahmewert μ_0 entwickelt werden.*

BEWEIS. Sei etwa $\lambda_m(\mu_0)$ mehrfache Nullstelle von $\Delta(\lambda, \mu_0)$, so gilt nach Satz 4

$$(\hat{y}_n(\mu_0), \hat{y}_m^*(\mu_0)) = 0$$

für alle n. Aus

$$f = \sum_n \varphi_n \hat{y}_n(\mu_0)$$

würde daher

$$(f, \hat{y}_m^*(\mu_0)) = 0$$

folgen. Das kann wegen $\hat{y}_m^*(\mu_0) \neq 0$ nach einer unserer Annahmen nicht für alle f aus $\mathfrak{U}$ gelten.

Unser Ziel ist nun der Beweis eines Entwicklungssatzes für normale μ. Dazu drücken wir den in Satz 6 eingeführten Operator $R(\lambda, \mu)$ durch $R(\lambda, 0)$, G und μ aus.

SATZ 8[8]). *Seien ϱ, ω positive Konstanten,*

$$\omega > \alpha \gamma \varrho.$$

Dann ist für

$$|\mu| \leqq \varrho, \qquad S_2(\lambda)^{-\frac{1}{2}} \geqq \omega$$

bei absolut gleichmäßig konvergenter Reihe

$$R(\lambda, \mu) f = R(\lambda, 0) f + \sum_{p=1}^{\infty} R(\lambda, 0) \left(-\mu G R(\lambda, 0)\right)^p f.$$

[8]) Man beachte die Verabredung von Anm. [5]), S. 447.

Es ist dort

$$\|R(\lambda,\mu)f - R(\lambda,0)f\| \leqq S_2(\lambda)\frac{\alpha^2\gamma\varrho}{1-\varrho\alpha\gamma\omega^{-1}}\|f\|.$$

BEWEIS. Wegen (7) und Satz 1 ist für $p \geqq 1$

$$\|R(\lambda,0)\left(-\mu G R(\lambda,0)\right)^p f\| \leqq S_2(\lambda)\alpha^2\gamma\varrho(\varrho\alpha\gamma\omega^{-1})^{p-1}\|f\|.$$

Daher ist die Reihe absolut gleichmäßig konvergent. Daß $R(\lambda,\mu)f$ ihre Summe ist, folgt aus

$$z = R(\lambda,\mu)f,$$

$$Fz + \lambda z = f - \mu G z,$$

$$z = R(\lambda,0)f + R(\lambda,0)(-\mu G z)$$

durch Iteration.

Satz 8 und die Abschätzungen von Abschnitt 1 liefern nun zunächst

SATZ 9. *μ sei normaler Wert. Dann kann jedes f aus $\mathfrak{U}$ in die Reihe*[9])

$$f = \sum_n \left(f, y_n^*(\mu)\right) y_n(\mu)$$

entwickelt werden. Man hat

$$\Big\| \sum_{|n| \leqq k} \left\{\left(f, y_n^*(\mu)\right) y_n(\mu) - (f, y_n^*)\, y_n\right\} \Big\| = \|f\| O\left(\frac{1}{k}\log k\right),$$

$$\left\|\left(f, y_n^*(\mu)\right) y_n(\mu) - (f, y_n^*)\, y_n\right\| = \|f\| O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mit einer Konstanten $\alpha(\mu) > 0$ gilt daher

$$\sum_n \left\|\left(f, y_n^*(\mu)\right) y_n(\mu)\right\|^2 \leqq \alpha(\mu)^2 \|f\|^2.$$

BEWEIS. Wir setzen $\varrho = |\mu|$ und wählen ein $\omega > \alpha\gamma\varrho$. Wir betrachten dann die Kurven $\mathfrak{C}_k$ von 1, Hilfssatz 4[10]). Wegen der dort notierten Eigenschaft (4) ist auf $\mathfrak{C}_k$ sicher $S_2(\lambda)^{-\frac{1}{2}} \geqq \omega$ für alle hinreichend großen k. Da für $|\tilde{\mu}| \leqq \varrho$ und ein $\lambda = \lambda_n(\tilde{\mu})$ nach Satz 2

$$S_2(\lambda)^{-\frac{1}{2}} \leqq \alpha\gamma|\tilde{\mu}| < \omega$$

gilt, werden für jedes n die Zahlen λ_n und $\lambda_n(\mu)$ von den $\mathfrak{C}_k$ mit hinreichend großem k zugleich umschlossen oder nicht.

Betrachten wir nun für diese k

(a) $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_k}\left(R(\lambda,\mu) - R(\lambda,0)\right) f\, d\lambda.$$

Dies ist wegen des Residuensatzes und Satz 6 gleich der Summe

$$\sum_n^{(k)}\left[\left(f, y_n^*(\mu)\right) y_n(\mu) - (f, y_n^*)\, y_n\right],$$

[9]) Wie bei (13) ist hier im Falle $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $\sum_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{|n|\leqq k}$ zu interpretieren.

[10]) Im Falle der Numerierung $n = 0, 1, 2, \ldots$ ist der Zusatz am Schluß von 1 heranzuziehen.

wobei $\sum_n^{(k)}$ die Summe über diejenigen n bedeutet, für die λ_n (und $\lambda_n(\mu)$) von $\mathfrak{C}_k$ umschlossen wird.

Andererseits kann nun der Integrand in (a) gemäß Satz 8, letzte Zeile, abgeschätzt werden. Bis auf den von k unabhängigen Faktor

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{\alpha^2\gamma\varrho}{1-\varrho\alpha\gamma\omega^{-1}}\,\|f\|$$

kann also der Ausdruck (a) der Norm nach durch

$$\oint_{\mathfrak{C}_k} S_2(\lambda)\,|d\lambda|$$

abgeschätzt werden. Dies ist nun nach **1**, Hilfssatz 4 [11]), $O\left(\frac{1}{k}\log k\right)$ bei $k\to\infty$.

Damit ist zunächst

$$\text{(b)}\qquad \Big\|\sum_n^{(k)}\left[(f, y_n^*(\mu))\,y_n(\mu)-(f, y_n^*)\,y_n\right]\Big\| = \|f\|\,O\left(\frac{1}{k}\log k\right).$$

Weiter betrachten wir nun die Folge der

$$\max\left\{S_2(\lambda)\;|\;|\lambda-\lambda_n|=\frac{d_n}{2}\right\},$$

die nach **1**, Hilfssatz 3 [12]), $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ sind, also für hinreichend große $|n|$ sicher $\leqq\omega^{-2}$.

Dann gilt wieder — wie eben —: Der Kreis

$$\mathfrak{K}_n=\left\{\lambda\;|\;|\lambda-\lambda_n|=\frac{d_n}{2}\right\}$$

umschließt von allen λ_m, $\lambda_m(\mu)$ genau das Paar λ_n, $\lambda_n(\mu)$.

Nun gilt $\frac{d_n}{2}\leqq\frac{c}{2}(|n|+1)$, also

$$\oint_{\mathfrak{K}_n} S_2(\lambda)\,|d\lambda| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Wie oben schließt man damit wegen des Residuensatzes, Satz 6 und Satz 8

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{K}_n}\left(R(\lambda,\mu)-R(\lambda,0)\right)f\,d\lambda\right\| = \left\|\left(f, y_n^*(\mu)\right)y_n(\mu)-(f, y_n^*)\,y_n\right\| = \|f\|\,O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dies ist schon die dritte Aussage von Satz 9. Nach ihr ist

$$\sum_n \left\|\left(f, y_n^*(\mu)\right)y_n(\mu)-(f, y_n^*)\,y_n\right\|^2 \leqq \hat{\alpha}(\mu)^2\,\|f\|^2,$$

---

[11]) Vgl. Anm. [10]), S. 453.
[12]) Vgl. Anm. [10]), S. 453.

also mit (14)

$$\sum_n \|(f, y_n^*(\mu))\, y_n(\mu)\|^2 \leqq (\alpha + \hat{\alpha}(\mu))^2 \|f\|^2;$$

das ist mit

$$\alpha(\mu) = \alpha + \hat{\alpha}(\mu)$$

die letzte Aussage von Satz 9. Die zweite Aussage ergibt sich nun aus (b) wegen der dritten Aussage und der Eigenschaft (2) der Kurven $\mathfrak{C}_k$ in **1**, Hilfssatz 4 [13]). Diese zweite Aussage liefert schließlich die erste Aussage, also den Entwicklungssatz, zusammen mit (13).

24. Potenzreihen und Asymptotik von Eigenlösungen.

Wir betrachten, wie oben beim Beweise von Satz 9, die Kreise $\mathfrak{K}_n$, die für hinreichend große $|n|$ genau λ_n, $\lambda_n(\mu)$ umschließen. Wir können dann die Reihe von Satz 8 über $\mathfrak{K}_n$ gliedweise integrieren; wir setzen dabei speziell $f = y_n$:

$$(y_n, y_n^*(\mu))\, y_n(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathfrak{K}_n} R(\lambda, \mu)\, y_n\, d\lambda = y_n + \sum_{p=1}^{\infty} \mu^p\, y_{np}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathfrak{K}_n} R(\lambda, 0)\, y_n\, d\lambda + \sum_{p=1}^{\infty} \mu^p\, \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathfrak{K}_n} R(\lambda, 0)\, (-G\, R(\lambda, 0))^p\, y_n\, d\lambda.$$

Wir können nun

$$\|R(\lambda, 0)\, (-G\, R(\lambda, 0))^p\, y_n\| \leqq \gamma^p\, \alpha^{p+1}\, S_2(\lambda)^{\frac{p+1}{2}}\, \|y_n\|$$

abschätzen, was also auf $\mathfrak{K}_n$ gemäß **1**, Hilfssatz 3 [13]), für jedes $p = 1, 2, \ldots$ bei $n \to \infty$

$$= \|y_n\|\, O(n^{-p-1})$$

ist. Damit folgt

$$\|y_{np}\| = \|y_n\|\, O(n^{-p}) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

und mit entsprechender Abschätzung des Reihenrestes:

Satz 10. *Die μ-Potenzreihe*

$$(y_n, y_n^*(\mu))\, y_n(\mu) = y_n + \sum_{p=1}^{\infty} \mu^p\, y_{np}$$

ist zugleich asymptotische Reihe für $n \to \pm\infty$: bei festem μ und k hat man für $n \to \pm\infty$ stets

$$\|(y_n, y_n^*(\mu))\, y_n(\mu) - y_n - \mu\, y_{n1} - \cdots - \mu^k\, y_{nk}\| = \|y_n\|\, O(n^{-k-1}).$$

25. Bemerkung.

Ist μ normaler Wert, so sind für $F + \mu G$ an Stelle von F wieder die Voraussetzungen von **21** gegeben. Bei den Forderungen ①, ②, ⑤ ist das trivial; ④ ist erfüllt, da μ normaler Wert ist. ③ schließlich ist in den Sätzen 3, 5 und 9 gegeben.

[13]) Vgl. Anm. [10]), S. 453.

26. EINE MODIFIKATION.

Wir nehmen im folgenden an:

Bezüglich $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}^* = \mathfrak{U}$, (u, v), F, G mögen die Annahmen von 21 bis einschließlich (8) erfüllt sein.

Es seien nun $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ (in $\mathfrak{R}$) perfekte Unterräume von $\mathfrak{U}$, derart daß für $u_1 \in \mathfrak{U}_1$, $u_2 \in \mathfrak{U}_2$ stets

(*) $$(u_1, u_2) = (u_2, u_1) = 0.$$

Für $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ an Stelle von $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^*$ mögen ebenfalls die genannten Annahmen gegeben sein. Ferner sollen für die beiden Eigenwertprobleme (9) mit $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ an Stelle von $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^*$ je die Voraussetzungen ① bis ⑤ gelten. Dabei seien jedoch — mit geänderter Bezeichnung —

$$\lambda_n = n^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

die Eigenwerte zu $\mu = 0$ im Falle $\mathfrak{U}_1$ und

$$\lambda_{-n} = n^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

die Eigenwerte zu $\mu = 0$ im Falle $\mathfrak{U}_2$; entsprechend seien

$$y_n = y_n^* \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

bzw.

$$y_{-n} = y_{-n}^* \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

die zugehörigen Eigenlösungen. Analog numerieren wir die $\lambda_n(\mu)$, $y_n(\mu)$.

Es gelte nun: Jedes $f \in \mathfrak{U}$ ist entwickelbar

(a) $$f = (f, y_0)\, y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(f, y_n)\, y_n + (f, y_{-n})\, y_{-n}]$$

mit

(b) $$\|(f, y_0)\, y_0\|_s^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \|(f, y_n)\, y_n + (f, y_{-n})\, y_{-n}\|_s^2 \leqq \tilde{\alpha}_s^2 \|f\|_s^2 \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dann behaupten wir:

SATZ 11. *Ist μ normaler Wert sowohl bezüglich der Eigenwertaufgabe für $\mathfrak{U}_1$ als auch bezüglich der für $\mathfrak{U}_2$, so ist jedes f aus $\mathfrak{U}$ auch entwickelbar*

$$f = (f, y_0(\mu))\, y_0(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} [(f, y_n(\mu))\, y_n(\mu) + (f, y_{-n}(\mu))\, y_{-n}(\mu)].$$

BEWEIS. Wir können wegen (*) in den Voraussetzungen ③, (14) für $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ $\alpha = \tilde{\alpha}$ annehmen.

Wir dehnen nun die Definition von $R(\lambda, \mu) f$ aus auf alle $f \in \mathfrak{U}$. Zunächst bilden wir für $\lambda \neq \lambda_n$

$$R(\lambda, 0)\, f = \frac{(f, y_0)\, y_0}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, y_n)\, y_n + (f, y_{-n})\, y_{-n}}{\lambda - n^2}.$$

Das ist nach unserer Annahme (b) für $f\in\mathfrak{U}$ konvergent und wir haben[14])

$$\|R(\lambda,0)f\|\leqq\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda-n^2|^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}}\tilde{\alpha}\,\|f\|.$$

Wir bilden dann weiter zunächst

$$R(\lambda,\mu)f=R(\lambda,\mu)f_1+R(\lambda,\mu)f_2$$

für die

$$f=f_1+f_2,\qquad f_1\in\mathfrak{U}_1,\qquad f_2\in\mathfrak{U}_2.$$

Es gilt wieder, wie in Satz 8,

$$(*_*)\qquad R(\lambda,\mu)f=R(\lambda,0)f+\sum_{p=1}^{\infty}R(\lambda,0)\big(-\mu\,G\,R(\lambda,0)\big)^p f$$

mit

$$(*^*_*)\qquad \|R(\lambda,\mu)f-R(\lambda,0)f\|\leqq\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda-n^2|^{-2}\,\frac{\tilde{\alpha}^2\gamma\varrho}{1-\tilde{\alpha}\gamma\varrho\omega^{-1}}\,\|f\|,$$

falls

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda-n^2|^{-2}\Big)^{-\frac{1}{2}}\geqq\omega,\qquad \omega>\tilde{\alpha}\gamma\varrho,\qquad |\mu|=\varrho.$$

$(*_*)$ wählen wir nun für beliebiges $f\in\mathfrak{U}$ und die angegebenen Paare λ, μ als Definition von $R(\lambda,\mu)f$; $(*^*_*)$ bleibt dabei gültig.

Nun ziehen wir die Kurven $\mathfrak{C}_k$ von **1**, Hilfssatz 4 (mit Zusatz) heran[15]). Wir betrachten

$$(c)\qquad \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_k}\big(R(\lambda,\mu)f-R(\lambda,0)f\big)\,d\lambda$$

für ein $f\in\mathfrak{U}$. Das ist für hinreichend große k möglich, da dann die Paare $\lambda\in\mathfrak{C}_k$, μ die obige Definition von $R(\lambda,\mu)f$ zulassen. (c) ist danach auch gewiß $O\left(\frac{1}{k}\log k\right)$ für $k\to\infty$.

Andererseits behaupten wir nun, daß (c) gleich

$$(d)\qquad (f,y_0(\mu))\,y_0(\mu)-(f,y_0)\,y_0+\sum_{1\leq|n|\leq k}\big((f,y_n(\mu))\,y_n(\mu)-(f,y_n)\,y_n\big)$$

wird. Dies gilt nämlich zunächst für die $f=f_1+f_2$ mit $f_1\in\mathfrak{U}_1$, $f_2\in\mathfrak{U}_2$, da dort

$$R(\lambda,\mu)f=R(\lambda,\mu)f_1+R(\lambda,\mu)f_2,$$

und da für $f=f_1$, $f=f_2$ die entsprechenden Darstellungen gemäß der obigen Theorie bezüglich $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ gelten. Nun hängen aber die Ausdrücke (c) und (d) innerhalb $\mathfrak{U}$ stetig von f ab; das folgt für (c) aus $(*^*_*)$ und für (d) aus Voraussetzung (4) für (u,v). Weiter kann nach Annahme (a) jedes $f\in\mathfrak{U}$ erhalten werden in der Form

$$f_\nu\to f\qquad(\nu\to\infty)$$
$$f_\nu=f_{1\nu}+f_{2\nu},\qquad f_{1\nu}\in\mathfrak{U}_1,\qquad f_{2\nu}\in\mathfrak{U}_2;$$

[14]) Vgl. Anm. [5]), S. 447.

[15]) Wir können sie hier so wählen, daß sie genau die λ_n, $\lambda_n(\mu)$ mit $\lceil n\rceil\leq k$ umschließen.

man braucht ja nur

$$f_{1\nu} = (f, y_0)\, y_0 + \sum_{n=1}^{\nu} (f, y_n)\, y_n$$

$$f_{2\nu} = \sum_{n=-1}^{-\nu} (f, y_n)\, y_n$$

zu setzen. Damit gilt die Übereinstimmung von (c) und (d) für alle f aus $\mathfrak{U}$. Da (c) als $O\left(\frac{1}{k}\log k\right)$ nachgewiesen wurde, folgt nun mit (a) der Satz 11.

3. Anwendung auf die Hillsche Differentialgleichung

31. NICHT-GANZER CHARAKTERISTISCHER EXPONENT.

Die Funktion $g(t)$ sei für

$$r_1 < \operatorname{Im} t < r_2$$

— wir bezeichnen diesen Streifen im folgenden mit $\mathfrak{S}$ — holomorph und π-periodisch:

$$g(t+\pi) = g(t). \tag{1}$$

Wir betrachten die Hillsche Differentialgleichung

$$y''(t) + \big(\lambda + g(t)\big)\, y(t) = 0. \tag{2}$$

Sei t_0 eine Stelle aus $\mathfrak{S}$. Mit $y_1(t)$, $y_2(t)$ bezeichnen wir die Lösungen von (2) mit

$$\begin{cases} y_1(t_0) = 1, & y_1'(t_0) = 0, \\ y_2(t_0) = 0, & y_2'(t_0) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Sie sind abhängig noch von λ. Für irgendein komplexes ν werde

$$\Delta_\nu(\lambda) = \tfrac{1}{2}\big(y_1(t_0+\pi) + y_2'(t_0+\pi)\big) - \cos\pi\nu \tag{4}$$

gesetzt. Es ist bekanntlich $\Delta_\nu(\lambda) = 0$ notwendig und hinreichend für die Existenz einer Lösung $y(t)$ von (2) mit

$$y(t+\pi) = e^{\pi i \nu}\, y(t) \not\equiv 0. \tag{5}$$

Damit existiert zugleich eine Lösung $y^*(t)$ von (2) mit

$$y^*(t+\pi) = e^{-\pi i \nu}\, y^*(t) \not\equiv 0; \tag{6}$$

denn man hat

$$\Delta_\nu(\lambda) = \Delta_{-\nu}(\lambda).$$

Unser Ziel ist nun zunächst der Beweis des folgenden Satzes:

SATZ 1. *ν sei nicht ganz, $\Delta_\nu(\lambda)$ besitze keine mehrfachen Nullstellen.*

Dann hat das Eigenwertproblem (2), (5) *zugleich mit* (2), (6) *abzählbar unendlich viele Eigenwerte $\lambda_{\nu+2r}$ $(r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, die so numeriert werden*

können (und im folgenden angenommen seien), daß

$$\lambda_{\nu+2r} = (\nu+2r)^2 - \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\pi} g(t)\,dt + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

gilt.

Die zu $\lambda_{\nu+2r}$ gehörenden Eigenlösungen von (2), (5) *bzw.* (2), (6), $y_{\nu+2r}(t)$, $y^*_{\nu+2r}(t)$, *können so normiert werden, daß die Biorthogonalitäts- und Normierungsrelationen*

$$\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\pi} y_{\nu+2r}(t)\, y^*_{\nu+2s}(t)\,dt = \delta_{rs}$$

gelten. Für $r \to \pm\infty$ hat man [16]) *(bei obiger Numerierung!)*

$$y_{\nu+2r}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\pi} y_{\nu+2r}(\tau)\, e^{-i(\nu+2r)\tau}\,d\tau \cdot e^{i(\nu+2r)t}\left(1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right),$$

wobei das $O\left(\frac{1}{r}\right)$ gleichmäßig bezüglich t in einem abgeschlossenen Streifen innerhalb $\mathfrak{S}$:

$$\varrho_1 \leqq \operatorname{Im} t \leqq \varrho_2$$

mit

$$r_1 < \varrho_1 < \varrho_2 < r_2$$

gilt.

Jede im Streifen $\mathfrak{S}$ reguläre analytische Funktion $f(t)$ mit $f(t+\pi) = e^{\pi i\nu} f(t)$ kann in die in kompakten Teilgebieten absolut gleichmäßig konvergente Reihe

$$f(t) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{2r}\, y_{\nu+2r}(t)$$

mit den Koeffizienten

$$c_{2r} = \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\pi} f(t)\, y^*_{\nu+2r}(t)\,dt$$

entwickelt werden.

Zum Beweise verwenden wir die Resultate von 2. Dazu betten wir (2) zusammen mit

$$(2_0) \qquad y''(t) + \lambda\, y(t) = 0$$

in die zweiparametrige Aufgabe

$$(2\mu) \qquad y''(t) + \left(\lambda + \mu\, g(t)\right) y(t) = 0$$

ein.

Betrachten wir dann die Eigenwertaufgaben (2μ) mit (5) bzw. (6), so lassen sich die Voraussetzungen der Theorie von **2** bestätigen.

---

[16]) Darin liegt, daß der Faktor von $e^{i(\nu+2r)t}$ für große r nicht 0 ist.

Wir wählen dazu als $\mathfrak{R}$ den Raum der im Streifen $\mathfrak{S}$ holomorphen Funktionen. Wir wählen

$$r_1 < \cdots < \varrho_{31} < \varrho_{21} < \varrho_{11} = \varrho_{12} < \varrho_{22} < \varrho_{32} < \cdots < r_2$$

mit $\varrho_{n1} \to r_1$, $\varrho_{n2} \to r_2$. Dann sei $\mathfrak{R}_s$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ der Banach-Raum der im offenen Rechteck $\varrho_{s1} < \operatorname{Im} t < \varrho_{s2}$, $-(s-1)\pi < \Re e\, t < s\pi$ holomorphen (das entfällt für $s = 1$), im abgeschlossenen Rechteck stetigen Funktionen mit $\|f\|_s = \max |f(t)|$ für t im entsprechenden Rechteck. Damit sind **21**, (1), (2), (3) erfüllt. Als $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{U}^*$ nehmen wir die Gesamtheit der im Streifen $\mathfrak{S}$ holomorphen Funktionen mit $f(t+\pi) = e^{\pi i \nu} f(t)$ bzw. $f(t+\pi) = e^{-\pi i \nu} f(t)$. Die Perfektheit ist leicht zu sehen. Wir setzen dann

$$(u, v) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+\pi} u(t)\, v(t)\, dt,$$

was für $u \in \mathfrak{U}$, $v \in \mathfrak{U}^*$ von t_0 unabhängig ist. Es gilt offenbar (4) von **21** mit $\varkappa = 1$. Weiter folgt $v = 0$ schon aus $v \in \mathfrak{U}^*$,

$$\frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+\pi} e^{i(\nu+2r)t} v(t)\, dt = 0 \qquad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

F sei dann der Operator der zweimaligen Differentiation, G der der Multiplikation mit $g(t)$. Man hat **21**, (5) und weiter auch **21**, (6) wegen

$$u'' v - u v'' = (u' v - u v')'$$

und

$$u' v - u v' \Big|_{t_0}^{t_0+\pi} = 0.$$

21, (7) gilt mit $\gamma_s = \|g\|_s$, wobei $g(t)$ als Element von $\mathfrak{R}_s$ aufgefaßt wird.

21, (8) folgt, wie üblich, aus der Cauchyschen Integralformel für die zweite Ableitung.

21, (9) entspricht dann gerade (2μ), (5) und (2μ), (6).

Dabei gilt nun die Voraussetzung **21**, ① mit

$$\Delta(\lambda, \mu) = \tfrac{1}{2}\left(y_1(t_0 + \pi; \lambda, \mu) + y_2'(t_0 + \pi; \lambda, \mu)\right) - \cos \pi \nu,$$

wo $y_1(t; \lambda, \mu)$, $y_2(t; \lambda, \mu)$ die Lösungen von (2μ) mit (3) sind. — Man hat die Gültigkeit von ②, wenn man

(α) $$y(\lambda, \mu) = y_1(t + \pi; \lambda, \mu) - e^{-i\pi\nu} y_1(t; \lambda, \mu)$$

oder

(β) $$y(\lambda, \mu) = y_2(t + \pi; \lambda, \mu) - e^{-\pi i \nu} y_2(t; \lambda, \mu)$$

wählt, wobei jedoch (α) oder (β) ausscheiden, falls die rechte Seite für $(\lambda, \mu) = (\lambda_0, \mu_0)$ in t identisch verschwindet. Letzteres kann offenbar nicht für beide Fälle gleichzeitig eintreten. Für $y^*(\lambda, \mu)$ ist natürlich nur ν durch $-\nu$ zu zu ersetzen. — ③ ist erfüllt mit den Eigenwerten

$$(\nu + 2n)^2 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

und den Eigenlösungen

$$e^{i(\nu+2n)t}, \qquad e^{-i(\nu+2n)t}$$

21, (13) ist im wesentlichen der Satz über die Entwickelbarkeit in Laurent-Reihen, und **21**, (14) ist eine einfache Folgerung des zugehörigen Gutzmerschen Koeffizientensatzes. Oder man hat direkt:

$$e^{-i\nu t} f(t) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{2r} e^{i2rt}$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{2r} e^{-2r \operatorname{Im} t} e^{i2r \operatorname{Re} t},$$

$$\overline{e^{-i\nu t} f(t)} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \bar{c}_{2r} e^{-2r \operatorname{Im} t} e^{-i2r \operatorname{Re} t},$$

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{(\operatorname{Im} t = \operatorname{Im} t_0)}^{t_0+\pi} |e^{-i\nu t} f(t)|^2 dt = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} |c_{2r}|^2 e^{-4r \operatorname{Im} t_0}, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{(\operatorname{Im} t = \operatorname{Im} t_0)}^{t_0+\pi} |e^{-i\nu t} f(t)|^2 dt \leqq \|e^{-i\nu t}\|_s^2 \, \|f\|_s^2 \qquad (\varrho_{s1} \leqq \operatorname{Im} t_0 \leqq \varrho_{s2}),$$

$$\|e^{i(\nu+2r)t}\|_s \leqq \|e^{i\nu t}\|_s \begin{cases} e^{-2r\varrho_{s1}} & (r < 0) \\ e^{-2r\varrho_{s1}} & (r \geqq 0). \end{cases}$$

Schreibt man daher (*) für $\operatorname{Im} t_0 = \varrho_{s1}$ und $\operatorname{Im} t_0 = \varrho_{s2}$ auf und addiert, so wird sicher

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} |c_{2r}|^2 \, \|e^{i(\nu+2r)t}\|_s^2 \leqq 2 \, \|e^{i\nu t}\|_s^2 \, \|e^{-i\nu t}\|_s^2 \, \|f\|_s^2;$$

das ist **21**, (10) mit $\alpha_s^2 = 2 \, \|e^{i\nu t}\|_s^2 \, \|e^{-i\nu t}\|_s^2$.

④ ist erfüllt wegen

$$\Delta(\lambda, 0) = \cos \sqrt{\lambda}\, \pi - \cos \nu \pi.$$

Für ⑤ beachte man, daß die allgemeine Lösung von **21**, (15), bzw.

$$(+) \qquad z''(t) + \big(\lambda + \mu\, g(t)\big) z(t) = f(t)$$

die Form

$$z(t) = z_0(t) + \eta_1 y_1(t) + \eta_2 y_2(t)$$

hat, wo etwa $z_0(t)$ die durch

$$z_0(t_0) = 0, \qquad z_0'(t_0) = 0$$

bestimmte, in λ, μ ganz analytische Lösung von (+) ist und $y_1(t)$, $y_2(t)$ die Lösungen von (2μ), (3) sind. Die Gleichungen

$$(\times) \qquad \begin{cases} z(t_0 + \pi) - e^{\pi i \nu} z(t_0) = 0 \\ z'(t_0 + \pi) - e^{\pi i \nu} z'(t_0) = 0 \end{cases}$$

sind dann lineare Gleichungen für η_1, η_2, deren Determinante gerade

$$-2e^{\pi i\nu}\Delta(\lambda,\mu)$$

ist. Aus $(\times)$ und $(+)$ folgt aber wegen (1) und $f(t)\in\mathfrak{U}$ auch $z(t)\in\mathfrak{U}$. Damit gilt ⑤.

Für (2μ), (5), (6) ist nun $\mu=1$ ein normaler Wert wegen der Voraussetzung von Satz 1, daß $\Delta_\nu(\lambda)$ keine mehrfachen Nullstellen besitzt.

Daher liefern zunächst **22**, Satz 3 und Satz 3* die Aussage über die $\lambda_{\nu+2r}$, wenn man noch berücksichtigt, daß der Koeffizient von μ in der μ-Potenzreihe von $\lambda_n(\mu)$:

$$\lambda_{n1}=-(G\,y_n,y_n^*)=-\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\pi}g(t)\,e^{i(\nu+2r)t}\,e^{-i(\nu+2r)t}\,dt$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\pi}g(t)\,dt$$

ist.

Die Möglichkeit der Normierung des zugehörigen Systems der Eigenfunktionen zu einem Biorthogonalsystem ergibt **22**, Satz 5.

Zum Beweise der asymptotischen Eigenschaft der Eigenfunktionen hat man nach **24**, Satz 10

$$\|(y_n,y_n^*(\mu))\,y_n(\mu)-y_n\|_s=\|y_n\|_s O_s\left(\frac{1}{n}\right)\qquad(s=1,2,3,\ldots)$$

auszuwerten. Dabei beachtet man, daß die entsprechende Abschätzung für ein $s=S$ zugleich auch für $s=1,2,\ldots,S-1$ gilt. Denn man hat, wie man oben erkennt, $\alpha_\sigma\leqq\alpha_{\sigma+1}$, $\gamma_\sigma\leqq\gamma_{\sigma+1}$; alles andere aber ist von $\mathfrak{R}_s$ ganz unabhängig. Weiter gilt nun, daß für

$$\operatorname{Im}\tau=\varrho_{11}=\varrho_{12},\qquad 0\leqq\operatorname{Re}\tau\leqq\pi$$

$$\frac{|e^{i(\nu+2r)\tau}|}{\|e^{i(\nu+2r)t}\|_1}$$

zwischen positiven Schranken bleibt, die nur von ν abhängen. Es ist ja

$$\|e^{i(\nu+2r)t}\|_1=|e^{i(\nu+2r)\tau_1}|$$

mit einem τ_1, $\operatorname{Im}\tau_1=\varrho_{11}=\varrho_{12}$, $0\leqq\operatorname{Re}\tau_1\leqq\pi$. Also wird der obige Quotient

$$|e^{i(\nu+2r)(\tau-\tau_1)}|=|e^{i\nu(\tau-\tau_1)}|$$

mit reellem $\tau-\tau_1$ zwischen $-\pi$ und π.

Somit kann geschrieben werden — zunächst für $\operatorname{Im}t=\varrho_{11}=\varrho_{12}$, damit aber wegen der Willkür der Wahl der ϱ_{ik} für alle t —

$$\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\pi}e^{i(\nu+2r)\tau}\,y_{\nu+2r}^*(\tau)\,d\tau\cdot y_{\nu+2r}(t)=e^{i(\nu+2r)t}\left(1+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)$$

mit der entsprechenden Gleichmäßigkeit des $O(1/r)$. Durch Multiplikation und Integration folgt dann

$$\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\pi} e^{i(\nu+2r)t}\, y^*_{\nu+2r}(t)\, dt \cdot \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\pi} y_{\nu+2r}(t)\, e^{-i(\nu+2r)t}\, dt = 1 + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

und somit die Behauptung des Satzes.

Es bleibt der Beweis des Entwicklungssatzes. Daß

$$\sum_{|r|\leqq k} c_{2r}\, y_{\nu+2r}(t) \to f(t) \qquad (k\to\infty)$$

gleichmäßig in kompakten Teilgebieten gilt, ist Folge von **23**, Satz 9; ebenso, daß dort gleichmäßig

$$c_{2r}\, y_{\nu+2r}(t) \to 0 \qquad (r\to\pm\infty).$$

Daher sind die Reihenglieder z. B. für

$$\varrho_{s1} \leqq \operatorname{Im} t \leqq \varrho_{s2}, \qquad 0 \leqq \operatorname{Re} t \leqq \pi$$

gleichmäßig beschränkt. Für $r \leqq r_0 < 0$, $\operatorname{Im} t = \varrho_{s2}$,

$$\varrho_{s-1,1} \leqq \operatorname{Im}\tau \leqq \varrho_{s-1,2}, \qquad 0 \leqq \operatorname{Re}\tau = \operatorname{Re} t \leqq \pi$$

wird weiter

$$\left|\frac{y_{\nu+2r}(\tau)}{y_{\nu+2r}(t)}\right| = \left|e^{i(\nu+2r)(\tau-t)}\right|\left(1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right) \leqq \text{const}\, e^{2r(\varrho_{s2}-\varrho_{s-1,2})};$$

$$|c_{2r}\, y_{\nu+2r}(\tau)| \leqq \text{const}\, e^{2r(\varrho_{s2}-\varrho_{s-1,2})}.$$

Entsprechendes gilt für $r \geqq r_0^* > 0$. Damit folgt die absolut gleichmäßige Konvergenz der Reihe in jedem kompakten Teilgebiet des Streifens. — Satz 1 ist damit vollständig bewiesen.

Ergänzend entnehmen wir **22**, Satz 3 und Satz 3* und **24** noch den

Satz 2. *Für jedes μ mit $|\mu|<2$ bei höchstens endlich vielen Ausnahmen sind mit $\mu g(t)$ an Stelle von $g(t)$ die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt. Die zu $\mu g(t)$ entsprechend Satz 1 gehörenden Eigenwerte und Eigenlösungen seien $\lambda_{\nu+2r}(\mu)$, $y_{\nu+2r}(t,\mu)$, $y^*_{\nu+2r}(t,\mu)$.*

Bei entsprechender Numerierung gelten für die Eigenwerte um $\mu=0$ Potenzreihenentwicklungen

$$\lambda_{\nu+2r}(\mu) = (\nu+2r)^2 - \frac{\mu}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\pi} g(t)\, dt + \mu^2\lambda_{\nu+2r,2} + \mu^3\lambda_{\nu+2r,3} + \cdots.$$

Es gibt positive Konstanten C, D, derart, daß für die Konvergenzradien $\varrho_{\nu+2r}$ und die Koeffizienten

$$\varrho_{\nu+2r} \geqq C(1+|r|), \qquad |\lambda_{\nu+2r,k}| \leqq D^k(1+|r|)^{-(k-1)}$$

gilt. Danach hat man speziell für $\mu=1$ bei $r\to\pm\infty$

$$\lambda_{\nu+2r} = (\nu+2r)^2 - \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\pi} g(t)\, dt + \lambda_{\nu+2r,2} + \cdots + \lambda_{\nu+2r,k} + O\left(\frac{1}{r^k}\right).$$

Für die Eigenlösungen hat man bei entsprechender Numerierung Potenzreihen um $\mu=0$

$$\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\pi} e^{i(\nu+2r)\tau}\, y^*_{\nu+2r}(\tau,\mu)\, d\tau \cdot y_{\nu+2r}(t,\mu) = e^{i(\nu+2r)t}\left(1+\mu\, y_{\nu+2r,1}(t)+\mu^2\, y_{\nu+2r,2}(t)+\cdots\right).$$

Sie sind für t *in kompakten Teilgebieten von* $\mathfrak{S}$ *und* μ *in einem abgeschlossenen Gebiet* $|\mu|\leqq q<\hat{\varrho}_{\nu+2r}$ *absolut gleichmäßig konvergent. Es gilt mit positiver Konstanten* $\hat{C}$

$$\hat{\varrho}_{\nu+2r}\geqq \hat{C}\,(1+|r|)$$

und für t *in abgeschlossenem Teilstreifen von* $\mathfrak{S}$ *mit positiver Konstante* $\hat{D}$

$$|y_{\nu+2r,k}(t)|\leqq \hat{D}^k(1+|r|)^{-k}.$$

Daher hat man speziell für $\mu=1$ *bei* $r\to\pm\infty$ *in abgeschlossenem Teilstreifen von* $\mathfrak{S}$ *gleichmäßig*

$$\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\pi} e^{i(\nu+2r)\tau}\, y^*_{\nu+2r}(\tau)\, d\tau \cdot y_{\nu+2r}(t) = e^{i(\nu+2r)t}\left(1+y_{\nu+2r,1}(t)+\cdots+y_{\nu+2r,k}(t)+O\left(\frac{1}{r^{k+1}}\right)\right).$$

Zur Begründung des letzten Teils des Satzes werden die letzten Überlegungen des Beweises von Satz 1 entsprechend herangezogen. Man bemerkt dazu, daß die Funktionen $y_{\nu+2r,k}(t)$ π-periodisch sind.

32. $g(t)$ GERADE; $\nu=0$ ODER $\nu=1$.

$g(t)$ sei in diesem Abschnitt als π-periodische Funktion angenommen, die in einem zur reellen Achse symmetrischen parallelen Streifen $\mathfrak{S}_0$ holomorph und gerade $\left(g(-t)=g(t)\right)$ ist. $\mathfrak{S}$ sei irgendein Teilstreifen des Holomorphiestreifens $\mathfrak{S}_0$ von $g(t)$. $\mathfrak{S}$ braucht nicht zur reellen Achse symmetrisch zu sein, ja nicht einmal diese zu enthalten.

Die Lösungen der Hillschen Differentialgleichung (2) — natürlich in $\mathfrak{S}_0$ holomorph — mit den Anfangsbedingungen (3) seien jetzt speziell zu $t_0=0$ gewählt. Man hat dann bekanntlich[17])

$$y_1(\pi)=y_2'(\pi). \tag{7}$$

Man erkennt ferner, daß eine nichttriviale 2π-periodische Lösung

$$y(t)=y(t+2\pi)\not\equiv 0 \tag{8}$$

von (2) genau dann existiert, wenn entweder $\nu=0$, d.h. $y_1(\pi)=1$, oder $\nu=1$, d.h. $y_1(\pi)=-1$. Da mit $y(t)$ auch $y(-t)$ Lösung ist, existiert mit einer 2π-periodischen Lösung stets auch entweder eine gerade oder eine ungerade

[17]) Vgl. z.B. den in diesem allgemeinen Falle gültigen Beweis von MS, 2.12, Satz 4, S. 99.

2π-periodische Lösung. Dazu kann man die Gleichungen[18])

$$(9)\qquad \begin{cases} y_1(\pi)+1=2y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right), & y_1(\pi)-1=2y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ y_1'(\pi)=2y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right), & y_2(\pi)=2y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

heranziehen. Sie zeigen u.a., daß eine Lösung von (2) mit

$$(8_1)\qquad y(t)=y(-t)=y(t+2\pi)\not\equiv 0$$

genau dann existiert, wenn

$$(10_1)\qquad y_1'(\pi)=0,$$

und eine mit

$$(8_2)\qquad y(t)=-y(-t)=y(t+2\pi)\not\equiv 0$$

genau dann, wenn

$$(10_2)\qquad y_2(\pi)=0.$$

Unser Ziel ist nun der dem Satz 1 weitgehend entsprechende

Satz 3. *Die ganzen Funktionen $y_1'(\pi;\lambda)$ und $y_2(\pi;\lambda)$ mögen je keine mehrfachen Nullstellen besitzen.*

Dann hat das Eigenwertproblem (2), (8) *abzählbar unendlich viele Eigenwerte — entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt — λ_n $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. Davon sind λ_n $(n=0,1,2,\ldots)$ die verschiedenen Nullstellen von $y_1'(\pi;\lambda)$ und λ_n $(n=-1,-2,-3,\ldots)$ die verschiedenen Nullstellen von $y_2(\pi;\lambda)$. Sie lassen sich so numerieren, daß*

$$\lambda_n=n^2-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}g(t)\,dt+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

gilt.

Diese und die zugehörigen Eigenlösungen $y_n(t)$ lassen sich so wählen, daß $y_n(t)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ die Eigenlösungen von (2), (8_1) *und $y_n(t)$ $(n=-1,-2,-3,\ldots)$ die von* (2), (8_2) *— und zwar in jedem dieser Fälle für gerades n die mit $y(t+\pi)=y(t)$ und für ungerades n die mit $y(t+\pi)=-y(t)$ — sind. Sie können so normiert werden, daß die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y_n(t)\,y_m(t)\,dt=\delta_{nm}\qquad(n,m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

gelten. Für $n\to+\infty$ hat man dann

$$y_n(t)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}y_n(\tau)\cos n\tau\,d\tau\cdot\left[\cos nt\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\sin nt\cdot O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

und

$$y_{-n}(t)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}y_{-n}(\tau)\sin n\tau\,d\tau\cdot\left[\sin nt\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\cos nt\cdot O\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

und zwar beides gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilstreifen von $\mathfrak{S}_0$.

[18]) Vgl. z.B. den in diesem allgemeinen Falle gültigen Beweis von MS, 2.12, Satz 5, S. 99.

Ist der Teilstreifen $\mathfrak{S}$ symmetrisch zur reellen Achse, so läßt sich jede dort holomorphe 2π-periodische Funktion $f(t)$ in der Form

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(t)+\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n y_n(t)$$

mit

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, y_n(t)\, dt$$

entwickeln. Die Reihen sind in jedem abgeschlossenen Teilstreifen von $\mathfrak{S}$ absolut gleichmäßig konvergent.

Ist dagegen $\mathfrak{S}$ nicht symmetrisch zur reellen Achse, so läßt sich jede dort holomorphe 2π-periodische Funktion $f(t)$ in die Reihe

$$f(t)=a_0 y_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n y_n(t)+a_{-n} y_{-n}(t)\right)$$

mit

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} f(t)\, y_n(t)\, dt, \qquad t_0\in\mathfrak{S}$$

entwickeln. Die Reihe ist in jedem abgeschlossenen Teilstreifen von $\mathfrak{S}$ absolut gleichmäßig konvergent.

Zum Inhalt des Satzes bemerken wir, daß man aus ihm in gewohnter Weise die entsprechende Aussage über die beiden Eigenwertprobleme $y(t+\pi)=y(t)\not\equiv 0$ und $y(t+\pi)=-y(t)\not\equiv 0$ oder bzw. und die Zerlegung bezüglich gerader und ungerader Funktionen entnehmen kann. Dazu wird man zweckmäßig (9) heranziehen.

Der Beweis von Satz 3 wird wieder durch Zurückführung auf die Theorie von Abschnitt **2** erhalten.

Wir zeigen zunächst, daß für jedes der vier Eigenwertprobleme (2μ) mit bzw.

(11_1) $\qquad y(t+\pi)=y(t)=y(-t)\not\equiv 0,$

(11_2) $\qquad y(t+\pi)=y(t)=-y(-t)\not\equiv 0,$

(11_3) $\qquad y(t+\pi)=-y(t)=-y(-t)\not\equiv 0,$

(11_4) $\qquad y(t+\pi)=-y(t)=y(-t)\not\equiv 0$

die Voraussetzungen von **21** erfüllbar sind. Man wird $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, ... zum Streifen $\mathfrak{S}_0$ wie in **31** bilden, so daß **21**, (1), (2), (3) gegeben sind. $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}^*$ wird hier die Gesamtheit der Funktionen von $\mathfrak{R}$ mit (11_1) bzw. $\cdots(11_4)$. Man setzt

$$(u,v)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} u(t)\, v(t)\, dt,$$

so daß wieder (4) mit $\varkappa=1$ gilt.

F und G werden wie in **31** erklärt und erfüllen wie dort **21**, (5) bis (8).

21, ① ist erfüllt — man beachte Formeln (9) dieses Abschnitts — mit $\Delta(\lambda,\mu)=y_1'\left(\frac{\pi}{2};\lambda,\mu\right)$ bzw. $=y_2\left(\frac{\pi}{2};\lambda,\mu\right)$ bzw. $y_1\left(\frac{\pi}{2};\lambda,\mu\right)$ bzw. $y_2'\left(\frac{\pi}{2};\lambda,\mu\right)$. Die Gültigkeit von ② hat man mit $y(\lambda,\mu)=y_1(t;\lambda,\mu)$ in den Fällen (11_1), (11_3) und mit $y(\lambda,\mu)=y_2(t;\lambda,\mu)$ bei (11_2) und (11_4). Die Eigenwerte und Eigenlösungen zu $\mu=0$ sind

$$4n^2 \quad (n=0,1,2,\ldots); \quad 1,\ \sqrt{2}\cos 2nt \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

bzw.

$$4(n+1)^2; \qquad \sqrt{2}\sin 2(n+1)t \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

bzw.

$$(2n+1)^2; \qquad \sqrt{2}\cos(2n+1)t \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

bzw.

$$(2n+1)^2; \qquad \sqrt{2}\sin(2n+1)t \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

Schließlich werden **21**, (13), (14) sowie ④ und ⑤ ganz analog wie in **31** bestätigt. Auf die Durchführung im einzelnen kann wohl verzichtet werden.

Hiermit folgen die Behauptungen von Satz 3, abgesehen nur vom letzten Absatz, ganz ähnlich wie in **31**. Zusätzlich ist zunächst

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} g(t)\cos^2 nt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} g(t)\,dt+O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

zu beachten, was mit $\cos^2 nt=\frac{1}{2}(1+\cos 2nt)$ und partieller Integration für jedes natürliche k sofort ersichtlich ist. Damit liefern **22**, Satz 3 und Satz 3* die Aussage über die Eigenwerte. **23**, Satz 4 ergibt die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen. Für die Asymptotik der Eigenlösungen verwendet man wieder **24**, Satz 10 zusammen mit den oben beim Beweise von Satz 1 gemachten Bemerkungen. Man hat danach z. B.

$$\|(\cos 2nt,\ y_{2n}(t))\,y_{2n}(t)-\cos 2nt\|_1=\|\cos 2nt\|_1 O\left(\frac{1}{n}\right)$$

für $n\to+\infty$, wobei $\|f\|_1$ das Maximum der π-periodischen Funktion $f(t)$ auf einer zur reellen Achse parallelen Geraden innerhalb $\mathfrak{S}_0$ bedeutet und das $O(1/n)$ gleichmäßig innerhalb eines abgeschlossenen Teilstreifens von $\mathfrak{S}_0$ gilt. Man beachtet nun noch, daß für τ auf der genannten Geraden gleichmäßig

$$\|\cos 2nt\|_1=\cos 2n\tau\cdot O(1)+\sin 2n\tau\cdot O(1)$$

gilt. Dann erhält man leicht die gesuchten Formeln.

Der Entwicklungssatz für symmetrisches $\mathfrak{S}$ läßt sich für jedes unserer vier Teilprobleme (2) mit (11_1) bzw. ... (11_4) aus **23**, Satz 9 hier unmittelbar entnehmen. Im Satz 3 ist sogleich die Zusammenfassung, die den vier Teilaussagen äquivalent ist, notiert worden.

Es bleibt nun der Beweis der abgeschwächten Entwicklungsaussage des letzten Absatzes von Satz 3 für den Fall des nicht symmetrischen Streifens. Hier wird die Überlegung von **26** angewandt.

$\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots$ seien wie oben, jedoch hier bezüglich $\mathfrak{S}$, definiert. $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}^*$ ist der Unterraum der 2π-periodischen Funktionen. Die Annahmen von **21** bis einschließlich (8) sind offensichtlich mit

$$(u,v)=\frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} u(t)\,v(t)\,dt$$

und den wie oben definierten F, G erfüllt. Wir bezeichnen nun mit $\hat{\mathfrak{S}}$ den kleinsten offenen zur reellen Achse symmetrischen Streifen, der $\mathfrak{S}$ enthält. $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ seien die Unterräume der in $\hat{\mathfrak{S}}$ holomorphen 2π-periodischen geraden bzw. ungeraden Funktionen. Diese sind in $\mathfrak{R}$ perfekt. Denn sind z.B. $f_m(t)$ Funktionen aus $\mathfrak{U}_1$, die innerhalb jedes abgeschlossenen Teilstreifens von $\mathfrak{S}$ gleichmäßig gegen die Funktion $f(t)$ (aus $\mathfrak{U}$) konvergieren, so läßt sich $f(t)$ aus $\mathfrak{S}$ in $\hat{\mathfrak{S}}$ (eindeutig) fortsetzen, und man hat $f(t)\in\mathfrak{U}_1$. Man hat nämlich in $\mathfrak{S}$ eine Entwicklung

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$$

mit

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt.$$

Daher gilt für $m\to\infty$

$$c_{mn}=\frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} f_m(t)\,e^{-int}\,dt\to c_n.$$

Andererseits hat man wegen $f_m(t)\in\mathfrak{U}_1$

$$c_{m,-n}=c_{m,n}.$$

Dann gilt aber auch

$$c_{-n}=c_n;$$

also ist die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$$

sogar in $\hat{\mathfrak{S}}$ konvergent, und es gilt $f(t)\in\mathfrak{U}_1$. Die wechselseitige Orthogonalität (*) in **26** von $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ ist offensichtlich. Die Eigenschaften von **21** bis einschließlich (8) sind auch für $\mathfrak{U}_1$ oder $\mathfrak{U}_2$ an Stelle von $\mathfrak{U}$ erfüllt.

Für (2μ) mit (8_1) bzw. (8_2) sind nach den vorangehenden Überlegungen zum Beweise der ersten Aussagen von Satz 3 die Voraussetzungen ① bis ⑤ von **21** erfüllt, und zwar mit den in **26** notierten Angaben über die Eigenwerte zu $\mu=0$.

Schließlich ist die abgeschwächte Entwicklungsaussage (a), (b) von **26** durch die in $\mathfrak{S}$ gültige Entwicklung

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$$

bei Zusammenfassung der Glieder mit n und $-n$ gegeben. (b) wird ähnlich wie in **31** bewiesen.

Damit ist auf unser Problem **26**, Satz 11 anwendbar, was sofort die letzte Aussage von Satz 3 ergibt.

Die zu Satz 2 analogen asymptotischen Aussagen können ohne Modifikation direkt durch Anwendung von **24** auf die Probleme (2μ) mit (11_1) bzw. ... (11_4) erhalten werden:

SATZ 4. *Für jedes μ mit $|\mu|<2$ bei höchstens endlich vielen Ausnahmen sind mit $\mu g(t)$ an Stelle von $g(t)$ die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt. Die zu $\mu g(t)$ entsprechend Satz 3 gehörenden Eigenwerte und Eigenlösungen seien $\lambda_n(\mu)$, $y_n(t,\mu)$.*

Bei entsprechender Numerierung gelten für die Eigenwerte um $\mu=0$ Potenzreihenentwicklungen

$$\lambda_n(\mu) = n^2 + \lambda_{n1}\mu + \lambda_{n2}\mu^2 + \cdots \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Es gibt positive Konstanten C, D, derart, daß für die Konvergenzradien ϱ_n und die Koeffizienten

$$\varrho_n \geqq C\,(1+|n|), \qquad |\lambda_{nk}| \leqq D^k\,(1+|n|)^{-(k-1)}$$

gilt. Danach hat man speziell für $\mu=1$ bei $n\to\infty$

$$\lambda_n = n^2 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} g(t)\,dt + \lambda_{n2} + \cdots + \lambda_{nk} + O\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Für die Eigenlösungen hat man bei entsprechender Numerierung Potenzreihen um $\mu=0$, z. B. für $n=1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos n\tau\, y_n(\tau,\mu)\,d\tau\, y_n(t,\mu) = \cos nt + \mu\, y_{n1}(t) + \mu^2\, y_{n2}(t) + \cdots,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin n\tau\, y_{-n}(\tau,\mu)\,d\tau\, y_{-n}(t,\mu) = \sin nt + \mu\, y_{-n,1}(t) + \mu^2\, y_{-n,2}(t) + \cdots.$$

Sie sind für t in abgeschlossenem Teilstreifen von $\mathfrak{S}_0$ und $|\mu|\leqq q<\hat{\varrho}_n$ bzw. $|\mu|\leqq q<\hat{\varrho}_{-n}$ absolut gleichmäßig konvergent. Man hat mit positiver Konstante $\hat{C}$

$$\hat{\varrho}_n \geqq \hat{C}\,(1+|n|) \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

und für t in abgeschlossenem Teilstreifen gleichmäßig

$$|y_{nk}(t)| \leqq |\cos nt|\,\hat{D}_1^k\,(1+|n|)^{-k} + |\sin nt|\,\hat{D}_2^k\,(1+|n|)^{-k}$$

mit positiven Konstanten $\hat{D}_1$, $\hat{D}_2$. Daher hat man speziell für $\mu=1$ bei $n\to\infty$ in abgeschlossenen Teilstreifen von $\mathfrak{S}_0$ gleichmäßig

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos n\tau\, y_n(\tau)\,d\tau\, y_n(t)$$
$$=\cos n t\left(1+O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)\right)+y_{n1}(t)+\cdots+y_{nk}(t)+\sin n t\cdot O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right),$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin n\tau\, y_{-n}(\tau)\,d\tau\, y_{-n}(t)$$
$$=\sin n t\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)\right)+y_{-n,1}(t)+\cdots+y_{-n,k}(t)+\cos n t\cdot O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

Zum Beweise sind neben **24** einige Bemerkungen des Beweises von Satz 3 heranzuziehen.

32. BEMERKUNG ÜBER DEN FALL: ν GANZ, $g(t)$ NICHT GERADE.

Hier ist das System der Eigenlösungen in gewissen Fällen zu keinem Werte $\mu\neq 0$ vollständig, so daß ein voll analoger Entwicklungssatz nicht gilt. Als einfachstes Beispiel mag dienen

$$y''(t)+(\lambda-\mu e^{2it})\,y(t)=0.$$

Diese Differentialgleichung entsteht mit $z=e^{it}$ aus der Besselschen Differentialgleichung

$$z\left(z\,u'(z)\right)'+(\mu z^2-\lambda)\,u(z)=0.$$

Die 2π-periodischen Eigenwerte und Eigenlösungen sind

$$\lambda=n^2,\qquad y(t)=J_n\left(\sqrt{\mu}\,e^{it}\right)\qquad(n=0,1,2,\ldots).$$

Sie reichen, da $J_n\left(\sqrt{\mu}\,z\right)$ nur nicht-negative Potenzen von z enthält, offenbar nicht aus, um jede in einem Streifen parallel der reellen Achse holomorphe 2π-periodische Funktion $f(t)$ darzustellen.

Eine genauere Untersuchung gerade dieses Beispiels der Besselschen Differentialgleichung, insbesondere auch im Falle ν ganz, findet man im Abschnitt **4** im zweiten Teil dieser Arbeit.

Institut für Angewandte Mathematik der Universität Köln

(Eingegangen am 29. Februar 1960)